THANH CONG PHẲNG

12.1. KHÁI NIỆM CHUNG

Trong chương uốn ngang phẳng khi tính toán chúng ta chưa để ý đến độ cong của trục thanh. Người ta nhận thấy rằng những thanh cùng vật liệu, cùng liên kết như nhau, cùng có mặt cắt như nhau, nhưng có độ cong khác nhau thì khả năng chịu lực cũng khác nhau. Ảnh hưởng của độ cong đến độ bền của thanh được đặc trưng bởi tỷ số h/ρ, trong đó h là chiều cao của mặt cắt và ρ là bán kính cong của trục thanh tại mặt cắt có chiều cao h đó.

Người ta nhận thấy rằng nếu độ cong bé, nghĩa là tỷ số h/p nhỏ thì sự phân bố ứng suất trên mặt cắt ngang gần như trong thanh thẳng. Vì vậy khi tỷ số $h/\rho > 1/10$ thì người ta mới tính toán theo thanh cong. Còn khi $h/\rho < 1/10$, thì ta vẫn sử dụng những kết quả tính toán trong thanh thẳng.

Trong thực tế ta gặp loại thanh cong là loại móc treo của cần trục, các vòng xích... Những loại này thường trục thanh nằm trong một mặt phẳng, nên được gọi là thanh cong phẳng.

Giới hạn nghiên cứu như sau:

1. Loại thanh cong phẳng mà mọi mặt cắt ngang có ít nhất một trục đối xứng và trục này nằm trong mặt phẳng chứa trục thanh. Mặt phẳng đó được gọi là mặt phẳng đối xứng của thanh.
2. Tải trọng tác dụng lên thanh đều nằm trong mặt phẳng đôi xứng của thanh.

Những điều kiện đó giúp ta đơn giản được bài toán, nhưng cũng phù hợp với thực tế.

12.2. ỨNG SUẤT PHÁP TRONG THANH CONG PHẲNG

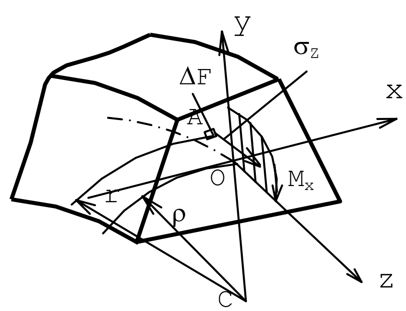
12.2.1. Thanh cong chịu uốn thuần túy:

Gốc của hệ tọa độ oxyz được chọn như trên hình vẽ 12.1, trong đó trục y được chọn có chiều dương hướng từ tâm cong ra ngoai, C là tâm cong của trục thanh.

Thanh cong chịu uốn thuần túy là thanh cong chịu lực sao cho trên mọi mặt cắt ngang của nó chỉ có một thành phần mô men uốn M_x. M_x được coi là dương khi nó làm cong thêm thanh cong. Trên hình 12.1, $M_x > 0$.

Chúng ta dựa vào các giả thiết sau đây để làm cơ sở tính biến dạng và ứng suất trong thanh cong như đã gặp trong tính toán về thanh thẳng:

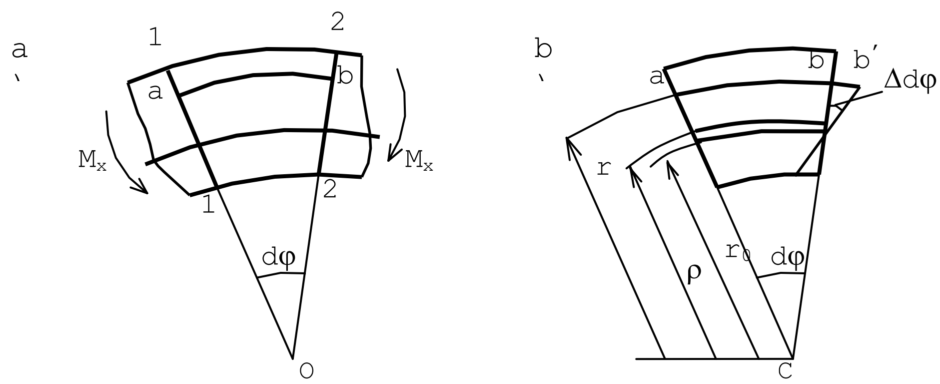
1. Trước và sau biến dạng mặt cắt ngang của thanh vẫn phẳng và vuông góc với trục thanh.
2. Trong quá trình biến dạng các thớ dọc (thớ song song với trục cong của thanh) không ép lên thanh và cũng không tách xa nhau.



Hình 12.1:Thanh chịu ứng suất thuần tuý

Với giả thiết 1 chúng ta có thể khẳng định trên mặt cắt ngang của thanh chỉ có ứng suất pháp mà không thể có ứng suất tiếp.

Như trong uốn thuần túy của thanh thẳng, chúng ta tách ở thanh cong ra một đoạn thanh giới hạn bởi hai mặt cắt 1-1 và 2-2 (xem hình 12.2).



Hình 12.2: Sơ đồ tính ứng suất của một thanh cong chịu uốn thuần tuý

Dưới tác dụng của mô men uốn M_x các thớ phía trên của thanh bị giãn ra và các thớ phía dưới bị co lại. Chắc chắn có những thớ không co và cũng không giãn, tức là những thớ không biến dạng. Các thớ này tạo nên một lớp gọi là lớp trung hòa. Giao tuyến giữa mặt cắt ngang và lớp trung hòa là một đường thẳng gọi là đường trung hòa.

Khác với trong thanh thẳng đường trung hòa trong thanh cong không đi qua trọng tâm của mặt cắt ngang.

Ta chỉ xét biến dạng tương đối của một thớ ab có bán kính cong là r nên cũng có thể giữ cố định mặt cắt 1-1 và xem mặt cắt 2-2 xoay quanh đường trung hòa (lớp trung hòa có bán kính cong là r_o). Như vậy sau biến dạng thớ ab có độ dài là ab' .Vậy biến dạng tỷ đối ε_z của thớ ab sẽ là:

$$\varepsilon_z = \frac{ab' - \widehat{ab}}{\widehat{ab}} = \frac{bb'}{\widehat{ab}}$$

$$\varepsilon_z = \frac{(r - r_o)\Delta d\varphi}{r d\varphi} = \left(1 - \frac{r_o}{r}\right)\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$$

Theo giả thiết các thớ dọc không ép lên nhau và cũng không tách xa nhau, nên trạng thái ứng suất ở điểm b đang xét là trạng thái ứng suất đơn. Do đó dựa vào định luật Hooke ta có biểu thức tính σ_Z tại b như sau:

$$\sigma_z = E.\varepsilon_z = E \cdot \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}\left(1 - \frac{r_o}{r}\right) \qquad (12\text{-}1)$$

Công thức (12-1) chưa cho ta tính được giá trị ứng suất pháp, nó mới cho ta thấy được quan hệ σ_Z là hàm Hypecbol của r. Để tính được σ_Z ta sử dụng phương trình cân bằng tĩnh học .Ta có hai phương trình cần thiết sau đây:

$$\sum P(z) = \int_F \sigma_z dF = N_z = 0 \qquad (a)$$

(theo giả thiết uốn thuần tuý không có lực dọc)

và
$$\sum M(0) = \int_F (\sigma_z dF) r = M_x \qquad (b)$$

Từ (a) , ta có: $$\int_F \sigma_z dF = \int_F E\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}\cdot\left(1-\frac{r_o}{r}\right)dF = 0$$

Vì $E\dfrac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$ là không đổi ở mọi điểm trên mặt cắt , nên ta đưa nó ra ngoài dấu tích phân:

$$E\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}\int_F\left(1-\frac{r_o}{r}\right)dF = 0 \rightarrow \int_F\left(1-\frac{r_o}{r}\right)dF = 0$$

$$\rightarrow \int_F dF - r_o\int_F\frac{dF}{r} = 0 \rightarrow r_o = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{F}} \qquad (12\text{ -}2)$$

Biểu thức (12-2) cho phép xác định giá trị của bán kính cong lớp trung hòa r_o. Phương trình (b) cho ta tính được:

$$\int_F \sigma_z.rdF = \frac{E\Delta d\varphi}{d\varphi}\int_F r\left(1-\frac{r_o}{r}\right)dF = M_x$$

Chúng ta nhận thấy rằng:

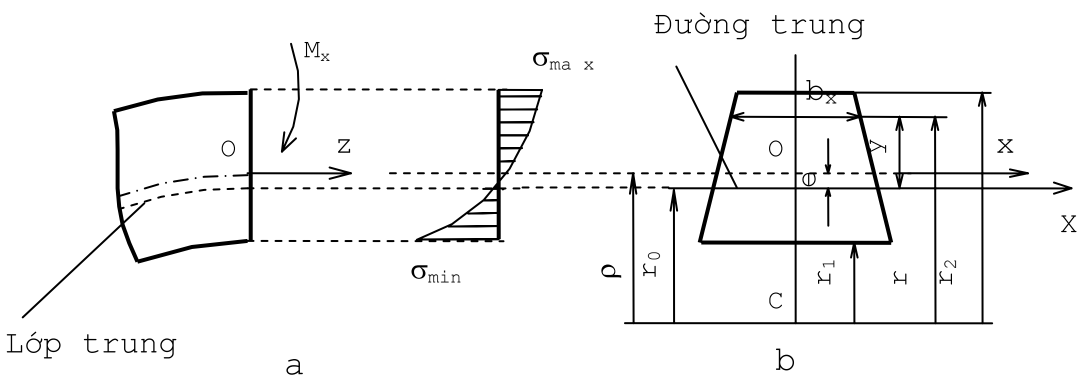
$$\int_F r\left(1-\frac{r_o}{r}\right)dF = \int_F (r-r_o)dF = S$$

Trong đó S chính là mômen tĩnh của mặt cắt ngang đối với đường trung hòa. Do đó:

$$E\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}\cdot S = M_x \rightarrow E\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M_x}{S}$$

Trở lại biểu thức (12-1), ta có: $$\sigma_z = \frac{M_x}{S}\left(1-\frac{r_o}{r}\right) \qquad (12\text{-}3)$$

Xem hình 12.3: y - Khoảng cách từ điểm đang xét đến đường trung hòa X; l - khoảng cách từ trung tâm mặt cắt đến đường trung hòa X. ρ -Bán kính cong của trục thanh, ta có: $y = r - r_o$; $S = F \times l$; $l = \rho - r_o$



Hình 12.3: Sơ đồ tính ứng suất

F - diện tích của mặt cắt ngang và (12-3) có thể viết thành :

$$\sigma_z = \frac{M}{F\cdot e}\cdot\frac{y}{r} \qquad (12\text{-}4)$$

Từ (12-3) hay (12-4), ta thấy biểu đồ ứng suất theo r là một đường cong Hypecbol và với những điểm có cùng khoảng cách đến đường trung hòa thì có giá trị ứng suất như nhau (xem 12.3a). Cũng từ đây ta thấy giá trị tuyệt đối của ứng suất lớn ở mép trong hơn ở mép ngoài. Bởi vì do đường trung hoà X dịch vào trong tâm cong (xem hình 12.3b) nên diện tích phần dưới trục trung hoà nhỏ hơn phần diện tích trên trục trung hoà mà tổng ứng suất pháp chịu kéo ở trên phải bằng tổng ứng suất nén ở dưới nên giá trị tuyệt đối ứng suất bên mép trong phải lớn hơn mép ngoài, đây cũng là đặc điểm của thanh cong.

12.2.2. Thanh cong chịu uốn đồng thời với kéo (nén đúng tâm).

Trong trường hợp có thêm lực dọc, nếu thanh cong vẫn làm việc trong miền đàn hồi và biến dạng nhỏ thì theo nguyên lý cộng tác dụng ta có:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{S}\left(1 - \frac{r_o}{r}\right) \qquad (12\text{-}5)$$

hay

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{F \cdot e} \cdot \frac{y}{r} \qquad (12\text{-}6)$$

I.XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ ĐƯỜNG TRUNG HÒA

a) Phương pháp chính xác:

1.Mặt cắt hình thang, (hình 12.4).

Giải vô cùng nhỏ song song với trục x là vi phân diện tích vô cùng bé, được tính như sau: $dF = b \cdot dr$

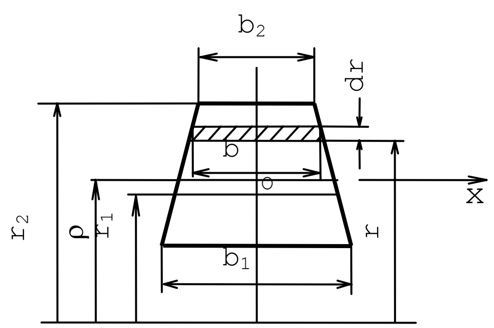
Suy ra: $dF = bdr = \left[b_2 + \frac{b_1 - b_2}{h}(r_2 - r)\right]dr$

Theo (12-2), ta có:

$$r_o = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{r}}$$

hay

$$r_o = \frac{\frac{(b_2 + b_1)}{2}h}{\int_{r1}^{r2}\left[\frac{b_2 + \frac{b_1 - b_2}{h}(r_2 - r)}{r}\right]dr}$$



Hình 12.4: Xác định đường trung hoà bằng phương pháp chính xác

$$r_o = \frac{h}{2} \cdot \frac{b_2 + b_1}{\int_{r1}^{r2}\left(b_2 + \frac{b_1 - b_2}{h} \cdot r_2\right)\frac{dr}{r} - \int_{r1}^{r2}\frac{b_1 - b_2}{h}dr}$$

Sau khi tích phân và rút gọn ta có:

$$r_0 = \frac{h}{2} \times \frac{b_2 + b_1}{\left(b_2 + \frac{b_1 - b_2}{h}\right)\ln\frac{r_2}{r_1} - (b_1 - b_2)} \qquad (12\text{-}7)$$

Trong đó: h- Chiều cao của hình thang.

2. Mặt cắt ngang hình tam giác.

Trong công thức (12-7), ta có $b_2 = 0$; $b_1 = b$.

Ta có:
$$r_o = \frac{h}{2\left(\frac{r_2}{h}\ln\frac{r_2}{r_1} - 1\right)} \qquad (12\text{-}8)$$

3. Mặt cắt ngang là hình chữ nhật.

Trong công thức (12-7), ta cho $b_2 = b_1 = b$

Ta có:
$$r_o = \frac{h}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \qquad (12\text{-}9)$$

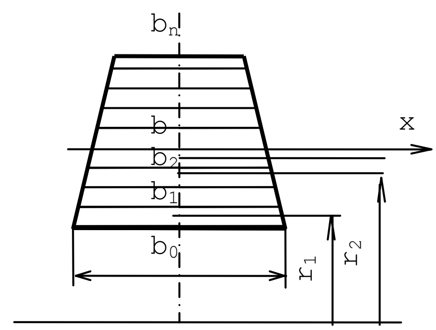
4. Mặt cắt ngang hình tròn.

Ta cũng tiến hành tính toán tương tự, cuối cùng ta có:
$$r_0 = \frac{d^2}{4\left(2\rho - \sqrt{4\rho^2 - d^2}\right)} \qquad (12\text{-}10)$$

Trong đó ρ là bán kính cong của trục thanh, d là đường kính của mặt cắt ngang.

b) Phương pháp gần đúng để tính r_o.

Ta có thể tính tích phân $\int_F \frac{dF}{F}$ trong công thức r_o một cách gần đúng bằng cách chia mặt cắt ngang thành những giải hẹp ΔFi song song với trục x (hình 12.5).Rõ ràng mỗi giải hẹp này xem như là hình chữ nhật và trọng tâm của nó xác định được, cũng có nghĩa là biết được khoảng cách r_i từ các trọng tâm của những giải đó đến tâm cong và do đó:
$$r_o = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{r}} = \frac{\sum \Delta F_i}{\sum \frac{\Delta F_i}{r_i}} \qquad (12\text{-}11)$$



Hình 12.5: Xác định đường trung hoà bằng phương pháp gần đúng

Để thuận tiện cho việc tính toán người ta thiết lập các bảng cho một số mặt cắt thông thường.

Ví dụ: Một chi tiết biểu diễn như trên hình 12.6, chịu tác dụng của hai lực P = 800N. Mặt cắt ngang của chi tiết là hình chữ nhật, kích thước 80×30mm. Xác định ứng suất pháp ở các điểm A và B. Biết rằng bán kính cong của trục thanh tại mặt cắt ngang có các điểm A và B bằng ρ = 8cm.

Bài giải:

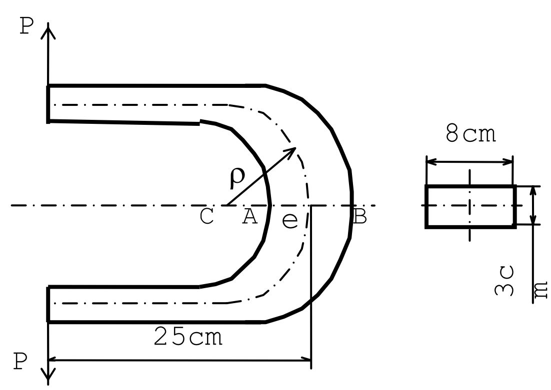
Xét tỷ số $\frac{h}{\rho} = \frac{80}{80} = 1 > \frac{1}{10}$, nên phải tính toán theo thanh cong.

Tại mặt cắt ngang qua điểm A và B có giá trị nội lực:

$N_Z = +P = +800N.$

$M_X = -P \times 25 = -20\,000$ Ncm

Bán kính cong của lớp trung hòa được tính theo (12-9):



Hình 12.6: Tính ứng suất pháp của một thanh cong tiết diện chữ nhật

$$r_o = \frac{h}{\ln\frac{r_2}{r_1}} = \frac{8}{\ln\frac{8+4}{8-4}} = 7{,}28\text{cm}$$

$e=\rho-r_o=8-7{,}28=0{,}72\text{cm}$

Ứng suất được tính theo công thức (12-6): $\sigma_z^B = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{F\cdot e}\cdot\frac{y_B}{r_B}$

$$= \frac{800}{8\cdot 3} + \frac{-20000}{8\cdot 3\cdot 0.72}\times\frac{(8+4)-7{,}28}{8+4} = -422\text{N}/\text{cm}^2$$

và $$\sigma_z^{(A)} = \frac{800}{8\cdot 3} + \frac{-2000}{8\cdot 3\cdot 0{,}72}\times\frac{(8-4)-7{,}28}{8-4} = +981\text{N}/\text{cm}^2$$

Kết quả này cho ta thấy tại mép trong A của thanh con,vì giá trị tuyệt đối ứng suất này lớn hơn giá trị tuyệt đối của ứng suất ở mép ngoài B. Đây cũng là kết luận chung cho các thanh cong chịu lực tương tự. Tức là đối với thanh cong, thì điểm nguy hiểm vẫn ở mép trong của thanh cong. Vì vậy, mặt cắt ngang của thanh cong thường có kích thước ở mép trong lớn hơn mép ngoài như mặt cắt ngang có dạng hình thang hay tương tự mà mép trong thì dày hơn. Trong thực tế, các móc của các cần cẩu hay các mắc xích thì diện tích ở mặt cắt ngang thường có cấu tạo hình thang hoặc hình tương tự.

CÂU HỎI TỰ HỌC

12.1. Một thanh như thế nào gọi là thanh cong ?

12.2. Sự khác nhau về công thức tính ứng suất và biểu đồ ứng suất của thanh cong và thanh thẳng .

12.3. Cách xác định r_0 trong thanh cong. Tóm tắt phương pháp chính xác và phương pháp gần đúng .

12.4. Đối với thanh cong thì ở nơi nào nguy hiểm hơn. Vì sao ?

12.5. Hình dáng hợp lí của mặt cắt ngang đối vơi thanh cong ?