Chương 13

TÍNH CHUYỂN VỊ CỦA HỆ THANH

Trong các bài toán riêng biệt kéo (nén) đúng tâm, uốn ngang phẳng, xoắn thuần tuý chúng ta đã trình bày cách xác định chuyển vị (thông qua tính biến dạng) của các mặt cắt ngang. Tuy vậy các phương pháp đã trình bày không mang tính chất tổng quát, bởi vì đối với các hệ thanh phẳng cũng như không gian ta chưa tính được, hoặc cũng như chưa xác định được chuyển vị theo một phương bất kì ngay trong bài toán thanh thẳng.

Trong chương này chúng ta sẽ trình bày phương pháp tổng quát để xác định chuyển vị của thanh và hệ thanh.

13.1. NGUÊN LÍ CHUYỂN VỊ KHẢ DĨ.

Người đầu tiên phát biểu nguyên lí này là Bécnuli, sau đó là Lagơrăng đã hoàn thiện và đã trình bày trong sách giáo khoa giải tích. Sách này được dịch từ tiếng Pháp sang tiếng Nga và xuất bản tại Matscơva năm 1950.

Nguyên lí như sau:

Để một hệ có các liên kết hoàn thiện ở trạng thái cân bằng tại một vị trí nào đó, điều kiện cần và đủ là tổng công của lực đặt lên hệ trong các chuyển vị khả dĩ vô cùng bé là bằng không.

Chuyển vị khả dĩ là chuyển vị vô cùng bé sao cho trong các chuyển vị các liên kết của hệ không bị phá vỡ.

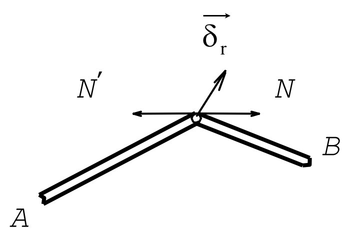
Một liên kết hoàn thiện là một liên kết mà tổng công các phản lực trong tất cả mọi chuyển vị khả dĩ của cả hệ là bằng không.

Các trường hợp sau đây có thể xem là những liên kết hoàn thiện:

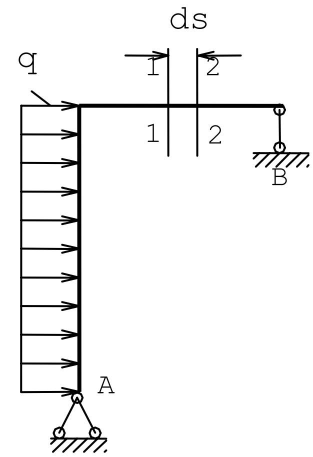
1. Một chất điểm hoặc một vật rắn luôn luôn tì lên một mặt nhẵn cố định.Vì mặt nhẵn nên xem như không có lực ma sát, phản lực liên kết đó có phương theo phương pháp tuyến với bề mặt. Các chuyển vị khả dĩ có thể xảy ra trong mặt phẳng tiếp tuyến với mặt tì và như vậy công của các phản lực trong các chuyển vị đó là bằng không.
2. Các liên kết là bất động, nghĩa là các lực liên kết không gây nên công.
3. Khớp nối giữa các vật thể. Khớp này tạo nên các phản lực ngược chiều, nên công của chúng trong các chuyển vị khả dĩ 1 là bằng không (hình 13.1).

Ta hãy áp dụng nguyên lí trên cho một vật thể đàn hồi. Ví dụ có một hệ đàn hồi được biểu diễn như hình 13.2. Gọi ds là một phân tố vô cùng bé tách ra bởi hai mặt cắt [1-1] và [2-2] cách nhau một khoảng cách ds.

Hệ được xem như một tập hợp các phân tử đàn hồi ds. Dưới tác dụng của ngoại lực P và các phản lực tại A và B, thì trên các mặt cắt [1-1] và [2-2] xuất hiện các thành phần nội lực. Bây giờ ta gây cho hệ một chuyển vị khả dĩ. Một chuyển vị như vậy có thể có được bằng cách đặt một hệ mới nào đó tạo cho hệ một trạng thái biến dạng mới hay làm cho hệ biến dạng bằng nhiệt độ.



Hình 31.1: Khớp nối giữa các vật thể có phản lực ngược chiều nhau



Hình 13.2:Hệ đàn hồi theo nguyên lí chuyển vị khả dĩ

Ta nhận thấy công khả dĩ đây không chỉ có công A_{ng} do ngoại lực tạo nên mà còn có công khả dĩ A_n do nội lực tạo nên. Do đó ta có:

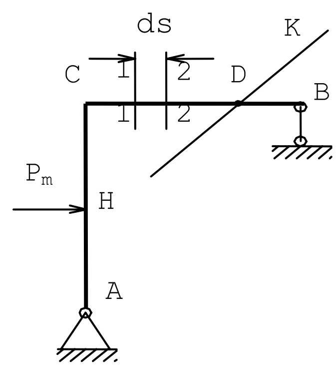
$$A_{ng}+A_n = 0 \tag{13-1}$$

Và đó là biểu thức của nguyên lí chuyển vị khả dĩ áp dụng vào một hệ đàn hồi.

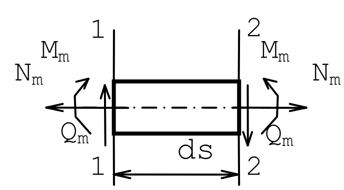
13.2. CÔNG THỨC MOHR ĐỂ XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ

Trước hết ta hãy đề cập đến bài toán phẳng.

Bài toán đặt ra như sau: Cho khung phẳng chịu lực như hình 13.3. Đòi hỏi ta phải tính chuyển vị theo phương K của trọng tâm mặt cắt qua D.



Hình 13.3: Tính chuyển vị cho một khung phẳng



Hình 13.4: Sơ đồ nội lực trên một phân tố

Ta gọi trạng thái chịu lực ở hình 13.3 là trạng thái"m", tức ngoại lực cũng như nội lực của hệ đều mang chỉ số m để đánh dấu. Chúng ta coi chuyển vị theo phương K do lực ở trạng thái m gây ra nên được kí hiệu là Δ_{km}. Dĩ nhiên P_m cũng gây ra chuyển vị cho mọi vị trí của hệ. Như vậy, nếu xét một phân tố ds nào đó giới hạn bởi hai mặt cắt [1-1] và [2-2] sẽ bị tác dụng bởi nội lực N_m, Q_m, M_m (hình 13.4)

Các thành phần nội lực này tạo nên chuyển vị tương đối giữa hai mặt [1-1] và [2-2] , các chuyển vị đó được trình bày như sau:

1. Chuyển vị dọc theo chiều trục:

$$\Delta ds_m = \frac{N_m ds}{EF} \tag{13-2}$$

2. Chuyển vị góc tương đối (hình 13.5):

$$\Delta d\varphi_m = \frac{M_m ds}{EJ} \qquad (13\text{-}3)$$

3. Chuyển vị trượt tương đối giữa hai mặt cắt (hình 13.6):

$$\Delta\beta_m = \gamma_{tb} ds$$

Trong đó: γ_{tb}- Góc trượt tỉ đối trung bình. Giá trị góc trượt tỉ đối đó tỉ lệ với ứng suất tiếp do Q_m gây nên trên các mặt cắt. Ta có thể tính trị số ứng suất tiếp trung bình với công thức:

$$\tau_{tb} = \eta \frac{Q_m}{F}$$

Trong đó: η- là hệ số điều chỉnh ứng suất do Q_m gây ra phân bố không đều trên mặt cắt.Ví dụ: với mặt cắt hình chữ nhật : η=1,2

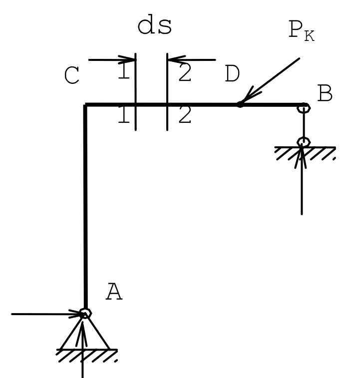
Với mặt cắt tròn: $$\eta = \frac{32}{27}$$

Với mặt cắt chữ I: $$\eta = \frac{F}{F_{lòng}}$$

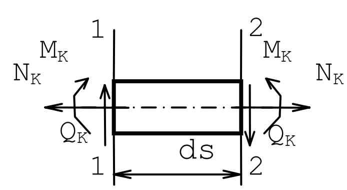
Trong đó: F- Diện tích toàn phần; $F_{lòng}$- Diện tích của lòng chữ I.

Từ đó ta có: $$\Delta\beta_m = \frac{\tau_{tb}}{G} ds = \eta \frac{Q_m ds}{GF} \qquad (13\text{-}4)$$

Bây giờ ta hãy tưởng tượng tạo nên một trạng thái "K" bằng cách bỏ tất cả các ngoại lực ở trạng thái "m" và đặt vào phương 'K" một lực P_K (hình 13.7). P_K và các phản lực R_K gây nên các thành phần nội lực N_K, Q_K và M_K trên các mặt cắt [1-1] và [2-2], như hình 13.8.



Hình 13.7: Tạo trạng thái "K"



Hình 13.8: Sơ đồ nội lực trên các mặt cắt

Vì hệ là một hệ cân bằng nên công của ngoại lực và nội lực của hệ trong bất kì một chuyển vị khả dĩ nào cũng phải bằng không.

Ta hãy chọn ngay trạng thái biến dạng của trạng thái " m" như là các chuyển vị khả dĩ. Công của ngoại lực khi đó là $P_K\Delta_{km}$; còn công của nội lực thì ta chưa tính được, nhưng ta phải có :

$$P_K\Delta_{km} + A_n = 0 \qquad (13\text{-}5)$$

Ta chú ý rằng các phản lực R_K tại A và B không sinh công vì các gối tựa đó bất động.

Để tính công A_n ta để ý đến phân tố ds. Ta thấy rằng: các thành phần nội lực N_K, Q_K và M_K trên các mặt cắt [1-1] và [2-2] đối với phân tố có thể xem như các ngoại lực tác dụng lên ds. Phân tố đó có các chuyển vị khả dĩ là Δds_m , $\Delta\beta_m$ và $\Delta d\varphi_m$. Công của ngoại lực lúc này là:

$$dA_{ng} = N_K \Delta ds_m + Q_K \Delta\beta_m + M_K \Delta d\varphi_m$$

Theo nguyên lí chuyển vị khả dĩ , ta phải có:

$$N_K \Delta ds_m + Q_K \Delta\beta_m + M_K \Delta d\varphi_m + dA_n = 0 \qquad (13\text{-}6)$$

Ta đưa các giá trị ở (13-2), (13-3), (13-4) vào (13-6), ta có:

$$dA_n = -\left(\frac{M_K \cdot M_m}{EJ} ds + \frac{N_K \cdot N_m}{EF} ds + \eta \frac{Q_K \cdot Q_m}{GF} ds\right) \qquad (13\text{-}7)$$

Đối với một thanh, hoặc một hệ thanh thì các thành phần M_K, M_m, N_K ,N_m ,Q_k, Q_m , có thể và thường là hằng số hoặc hàm số liên tục suốt chiều dài của thanh hoặc hệ thanh. Nên công của nội lực của thanh hoặc hệ thanh sẽ là tổng các tích phân của từng đoạn mà trong mỗi đoạn phải đảm bảo hàm số liên tục hoặc hằng số.

Vì vậy cuối cùng để tổng quát hoá bài toán, ta có công thức tính công nội lực của toàn hệ sẽ là:

$$A_n = -\left(\sum\int \frac{M_K \cdot M_m}{EJ} ds + \sum\int \frac{N_K \cdot N_m}{EF} ds + \sum\int \eta \frac{Q_K \cdot Q_m}{GF} ds\right) \qquad (13\text{-}8)$$

Thay (13-8) vào (13-5), ta được:

$$P_K \Delta_{Km} = \sum\int \frac{M_K \cdot M_m}{EJ} ds + \sum\int \frac{N_K \cdot N_m}{EF} ds + \sum\int \eta \frac{Q_K \cdot Q_m}{GF} ds \qquad (13\text{-}9)$$

Nếu đem chia hai vế cho P_K hay nói một cách khác đi trong trạng thái “k” lấy lực $\overline{P}_K$ =1/một đơn vị, thì từ đó ta có công thức chuyển vị Δ_{Km}:

$$\Delta_{Km} = \sum\int \frac{\overline{M}_K \cdot M_m}{EJ} ds + \sum\int \frac{\overline{N}_K \cdot N_m}{EF} ds + \sum\int \eta \frac{\overline{Q}_K \cdot Q_m}{GF} ds \qquad (13\text{-}10)$$

Trong đó: $\overline{M}_K$, $\overline{N}_K$, $\overline{Q}_K$ là các thành phần nội lực trong hệ do $\overline{P}_K = 1$ gây nên.

Công thức đó được gọi là công thức Mohr.

Đối với bài toán không gian, khi trên các mặt cắt ngang có đầy đủ sáu thành phần nội lực, thì công thức Mohr có dạng như sau:

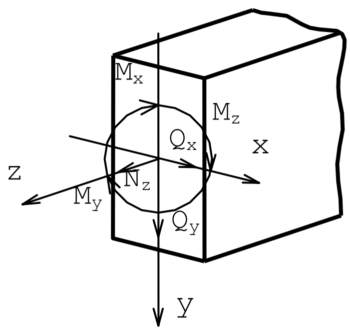
$$\Delta_{Km} = \sum\int \frac{\overline{M}_{xK} \cdot M_{xm}}{EJ_x} dz + \sum\int \frac{\overline{M}_{yK} \cdot M_{ym}}{EJ_y} dz + \sum\int \eta \frac{\overline{M}_{zK} \cdot M_{zm}}{EJ_z} dz +$$

$$+ \sum\int \frac{\overline{N}_{zK} \cdot N_{zm}}{EF} dz + \sum\int \eta \frac{\overline{Q}_{yK} \cdot Q_{ym}}{GF} dz + \sum\int \eta \frac{\overline{Q}_{xK} \cdot Q_{xm}}{GF} dz \qquad (13\text{-}11)$$

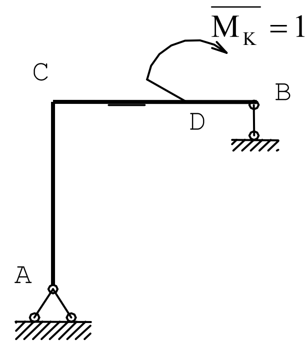
Trong đó: dz- độ dài của phân tố; dz=ds và các thành phần nội lực được biểu diễn như hình 13.9.

Trên đây ta đã tìm chuyển vị thẳng theo phương K. Tất cả mọi điểm ta vừa chứng minh cũng sẽ hoàn toàn đúng khi ta cần tìm góc xoay của mặt cắt ngang nào đó của hệ thì ta thay $\overline{P}_K = 1$ bằng một mô men m_k=1 tại nơi cần tính góc xoay, sau đó tìm các đại lượng nội lực $\overline{M}_K$, $\overline{N}_K$, $\overline{Q}_K$ như ở trên và đưa vào công thức Mohr và thực hiện các phép tính để có góc xoay tại đó.Từ đó có thể suy rộng ra khi ta cần tìm chuyển vị thẳng tương đối của hệ hay góc xoay tương đối của hai mặt cắt tại hai điểm bất kì nào đó của hệ, khi đó ta sẽ tạo nên trạng thái “k” bằng cách đặt hai lực tập trung hai chiều trực đối nhau hay hai mô men ngược chiều có giá trị là 1, rồi sau đó cũng lặp lại quá trình tính toán như đã làm.

Kí hiệu Δ_{Km} tuỳ theo trường hợp, sẽ có nghĩa là góc xoay của mặt cắt ngang, độ dịch gần hay độ dịch xa của hai trọng tâm hai mặt cắt và góc xoay tương đối của hai mặt cắt.



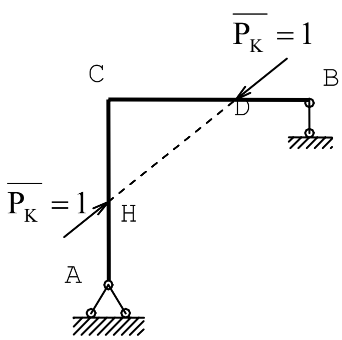
Hình 13.9: Sơ đồ nội lực



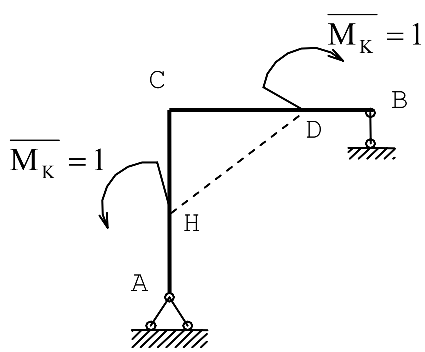
Hình 13.10: Tạo trạng thái "K" để tính góc xoay giữa hai mặt cắt

Ví dụ: Để tìm góc xoay của mặt cắt D, ta tạo ra trạng thái "k" như trên hình 13.10.

Để tìm độ dịch gần giữa hai điểm D và H, ta tạo nên trạng thái "k" như trên hình 13.11



Hình 13.11: Tạo trạng thái "K" để tìm độ dịch gần giữa hai điểm



Hình 13.12: Tạo trạng thái "K" để tính góc xoay giữa hai mặt cắt

Để tính góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt ngang qua D và H, ta tạo trạng thái "k" như hình 13.12

13.3. MỘT SỐ ĐỊNH LÍ QUAN TRỌNG

13.3.1. Định lí về công tương hỗ *(*còn gọi là định lí Beti).

Định lí phát biểu như sau: *Công của ngoại lực ở trạng thái "m" trên chuyển vị của trạng thái "k" là bằng công của ngoại lực ở trạng thái "k" thực hiện trên chuyển vị của trạng thái "m".*

Thực vậy, từ biểu thức (13-9), ta luôn có:

$$P_K \Delta_{Km} = P_m \Delta_{mk} = \sum \int \frac{M_K \cdot M_m}{EJ} ds + \sum \int \frac{N_K \cdot N_m}{EF} ds + \sum \int \eta \frac{Q_K \cdot Q_m}{GF} ds \quad (13\text{-}13)$$

13.3.2. Định lí về chuyển vị đơn vị:

Nếu hai trạng thái "m" và "k" đều là các trạng thái do lực đơn vị tác dụng theo phương m và phương k gây nên, khi đó các chuyển vị Δ_{km} và Δ_{mk} là các chuyển vị đơn vị và được kí hiệu δ_{km} và δ_{mk} .

Thật vậy, căn cứ vào biểu thức (13-13) khi $\overline{P}_K = \overline{P}_m = 1$, thì:

$$\delta_{Km} = \delta_{mK} = \sum\int\frac{\overline{M}_K \cdot \overline{M}_m}{EJ}ds + \sum\int\frac{\overline{N}_K \cdot \overline{N}_m}{EF}ds + \sum\int\eta\frac{\overline{Q}_K \cdot \overline{Q}_m}{GF}ds \qquad (13\text{-}14)$$

Do đó ta có thể phát biểu định lí này như sau:

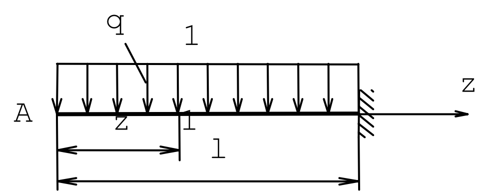
Chuyển vị đơn vị theo phương k do lực một đơn vị theo phương m gây nên là bằng chuyển vị theo phương m do lực một đơn vị tác dụng theo phương K gây nên.

Định lí này được gọi là chuyển vị đơn vị tương hổ MaxWell. Định lí này giúp ta đơn giản nhiều khi giải các hệ siêu tĩnh.

Ví dụ 1: Cho một dầm chịu lực như trên hình vẽ 13.13. Xác định độ võng và góc xoay tại A (bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt). Độ cứng EJ=const.

Bài giải: Ta xem trạng thái đã cho của dầm là trạng thái "m". Hệ trục toạ độ được chọn như hình vẽ. Gọi z là hoành độ của mặt cắt [1-1]. Mô men uốn M_m trên mặt cắt có trị số là:

$$M_m = -q\frac{z^2}{2} \qquad \text{(a)}$$



Hình 13.13: Dầm chịu lực

Để tính độ võng A, ta tạo nên trạng thái "k" như hình 13.14. Mô men trên mặt cắt [1-1] là:

$$\overline{M}_K = -1 \times z \qquad \text{(b)}$$

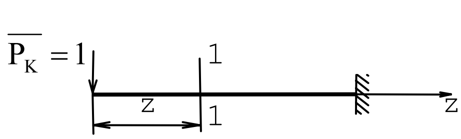
Ở đây ta bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt, còn lực dọc N_z là bằng không. Do đó chuyển vị thẳng đứng tại A sẽ có trị số là:

$$\Delta_{km} = Y_A = \int_0^l \frac{\overline{M}_K \cdot M_m}{EJ_x}dz = \int_0^l q\frac{z^3}{2}\cdot\frac{1}{EJ_x}dz = \frac{q\ l^4}{8EJ_x}$$

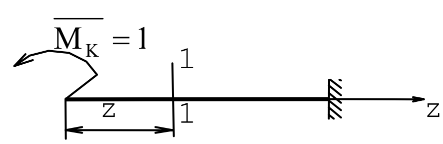
Để tính góc xoay tại A, ta tạo nên trạng thái "k" như hình 13.15, khi đó ta có: $\overline{M}_K = -1$

Vậy:
$$\Delta_{km} = \theta_A = \int_0^l \frac{\overline{M}_K \cdot M_m}{EJ_x}dz$$

$$\theta_A = \int_0^l q\frac{z^2}{2}\cdot\frac{1}{EJ_x}dz = \frac{q l^3}{6EJ_x}$$



Hình 13.14: Tạo trạng thái "K" để tính độ võng tại A



Hình 13.14: Tạo trạng thái "K" để tính góc xoay tại A

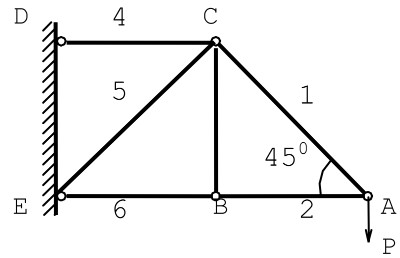
Các kết quả nhận được trên đây là những trị số dương, điều đó có nghĩa là độ võng và góc xoay cùng chiều với $\overline{P}_K$ và $\overline{M}_K$.

Ví dụ 2: Cho giàn chịu lực như hình 13.16. Tìm chuyển vị thẳng đứng tại A. Các thanh cùng làm bằng một vật liệu và cùng có mặt cắt như nhau, các thanh 2, 3, 4 và 6 đều có chiều dài bằng a.

Bài giải: Ta xem trạng thái đã cho của hệ là trạng thái "m". Trị số lực dọc trong các thanh có được bằng lần lượt tách các nút A, B, C như sau:

$$N_m^1 = P\sqrt{2}\,,\; N_m^2 = -P\,,\; N_m^3 = 0$$

$$N_m^4 = 2P\,,\; N_m^5 = -P\sqrt{2}\,,\; N_m^6 = -P$$



Hình 13.6: Một giàn

Để tìm chuyển vị thẳng đứng tại A ta bỏ lực P và thay vào đó một lực $\overline{P}_K = 1$. Trị số nội lực trong các thanh sẽ là:

$$\overline{N_k^1} = \sqrt{2}\,;\; \overline{N_k^2} = -1\,;\; \overline{N_k^3} = 0$$

$$\overline{N_k^4} = 2\,;\; \overline{N_k^5} = -\sqrt{2}\,;\; \overline{N_k^6} = -1$$

Ở đây mô men uốn và lực cắt bằng không, nên chuyển vị thẳng đứng tại A sẽ là:

$$\Delta_{km} = Y_A = \sum\int_0^l \frac{\overline{N}_K \cdot N_m}{EF} ds$$

$$Y_A = \frac{P\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}}{EF} + \frac{P\cdot la}{EF} + \frac{2P\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot a}{EF} + \frac{P\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}}{EF} + \frac{P\cdot 1\cdot a}{EF}$$

$$= \left(10 + 4\sqrt{2}\right)\frac{Pa}{EF}$$

Kết quả dương chứng tỏ là chuyển vị xuống dưới, tức là cùng chiều với $\overline{P}_K$.

13.4.PHƯƠNG PHÁP NHÂN BIỂU ĐỒ CỦA VÊRÊSAGHIN.

Khi mặt cắt ngang của thanh không đổi trên từng đoạn, khi đó các thành phần công thức Mohr (13-1) có thể viết như sau:

$$\Delta_{km} = \sum_{i=1}^{n}\int_0^{li} G(z)\cdot f(z)dz \qquad (13\text{-}15)$$

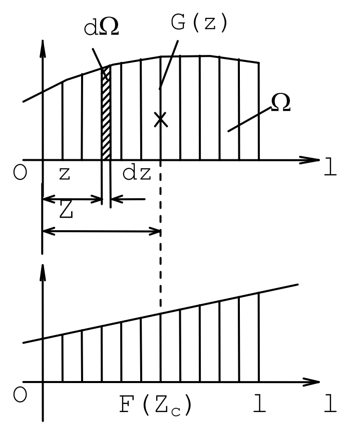
Nếu trong đó luôn luôn có một hàm số bậc nhất, thì các tích phân sẽ được thực hiện một cách đơn giản. Bây giờ ta giả sử trên một đoạn dài từ $0 \rightarrow l_i$ nào đó mà f(z) là một hàm số bậc nhất và G(z) có thể là một đường cong náo đó (xem hình 13.17).

Như vậy ta có thể biểu diễn:

$$f(z) = az + b \qquad (13\text{-}16)$$

Đem thay (13-16) vào (13-15) và tính tích phân cho một đoạn từ $0 \rightarrow l_i$, sau đó sẽ suy rộng ra cho tổng quát các tích phân, ta sẽ được:

$$I = \int_\Omega (az+b)\cdot G(z)dz \qquad (13\text{-}17)$$



Hình 13.17:Phương pháp nhân biểu đồ

Trong đó: tích G(z)·dz là vi phân diện tích dΩ của biểu thức G(z). Ta có thể viết (13-17) dưới dạng:

$$I = \int_\Omega (az+b)\cdot G(z)dz = a\int_\Omega z d\Omega + b\int_\Omega d\Omega \qquad (13\text{-}18)$$

Trong đó: $\int_\Omega d\Omega$ là diện tích Ω của biểu thức G(z) từ $0 \to l_i$ và $\int_\Omega z d\Omega$ là mô men tĩnh của biểu đồ G(z) đối với trục tung (trong chương đặc trưng hình học của mặt cắt ngang).

Trị số này có thể tính với biểu thức:

$$\int_\Omega z d\Omega = Z_c\Omega$$

Trong đó: Z_c- Hoành độ trọng tâm của Ω.

Vậy biểu thức (13-18) có thể được viết lại dưới dạng:

$$I = aZ_c\Omega + b\Omega = \Omega(aZ_c + b) \qquad (13\text{-}19)$$

Trong đó: $aZ_c+b=f(Z_c)$ là tung độ của biểu thức f(z) tại hoành độ Z_c của biểu thức G(z) và (13-19) sẽ là:

$$I=\Omega f(Z_c) \qquad (13\text{-}20)$$

Cuối cùng để thực hiện một tích phân nào đó theo Mohr mà một phương trình biểu diễn nội lực là bậc nhất thì tích phân đó được tính bằng diện tích của biểu đồ kia nhân với tung độ của biểu đồ bậc nhất này ứng với trọng tâm C của biểu đồ kia (biểu đồ đường cong).

Ví dụ 3: Tìm độ võng tại B và góc xoay tại A của dầm chịu lực như hình 13.18 (bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt)

Bài giải: Ta hãy tìm góc xoay tại A. Tạo nên trạng thái "k" hình 13.19. Vì bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt, nên góc xoay tại A sẽ được tính với biểu thức:

$$\Delta_{km} = \theta_A = \int_0^l \frac{\overline{M}_K \cdot M_m}{EJ_x} dz$$

Các biểu thức M_m và $\overline{M}_K$ được biểu diễn như hình 13.20

Theo phép nhânVêrêSaghin,ta có:

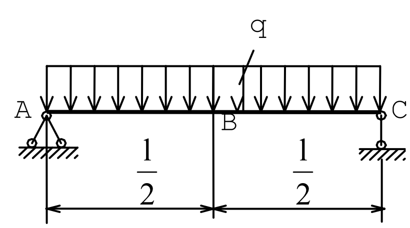
$$\theta_A = -\frac{2}{3}\frac{ql^2}{8}1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{EJ_x} = -\frac{ql^3}{24EJ_x}$$

Chú ý :

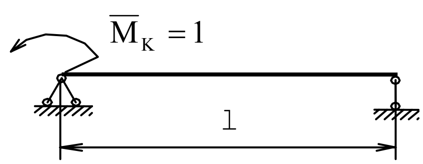
$\frac{2}{3}\frac{ql^2}{8}1$: là diện tích của biểu đồ M_m (đường cong).

$1/2$: là tung độ ứng với trọng tâm C (của biểu đồ M_m) lấy trên biểu đồ $\overline{M}_K$ (đường thẳng).

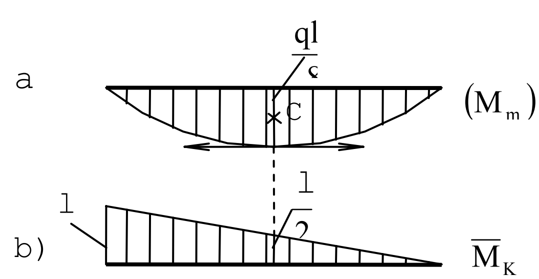
Dấu −: vì hai biểu đồ mô men nằm về hai phía.



Hình 13.18: Một dầm



Hình 13.19: Tạo trạng

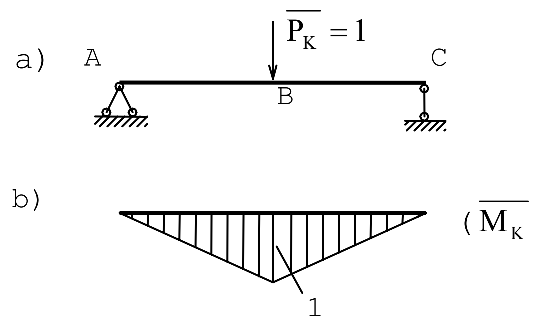


Hình 13.20: Biểu đồ M_m

Kết quả mang dấu âm (vì hai biểu đồ có thớ căng khác nhau), điều đó có nghĩa là góc xoay tại A có chiều ngược lại với chiều $\overline{M}_K$ đã chọn.

Để tìm độ võng tại B, ta tạo nên trạng thái "k" (hình 13.21a). Biểu đồ mô men $\overline{M}_K$ được biểu diễn trên hình 13.21b.Và thực hiện phép nhân biểu đồ theo VêrêSaghin của hai biểu đồ M_m (hình 13.20a) và biểu đồ $\overline{M}_K$ (hình 13.21b)

Ở đây ta nhận thấy trong hai đoạn AB và BC biểu đồ $\overline{M}_K$ được biểu diễn bằng các đường thẳng khác nhau, vì vậy để tính biểu thức tích phân ta cũng chia biểu đồ theo hai thành phần từ A đến B và từ B đến C. Do M_m và $\overline{M}_K$ điều là những biểu đồ đối xứng, cho nên ta có thể thực hiện nhân biểu đồ cho một nửa và sau đó nhân đôi, ta sẽ có kết quả:



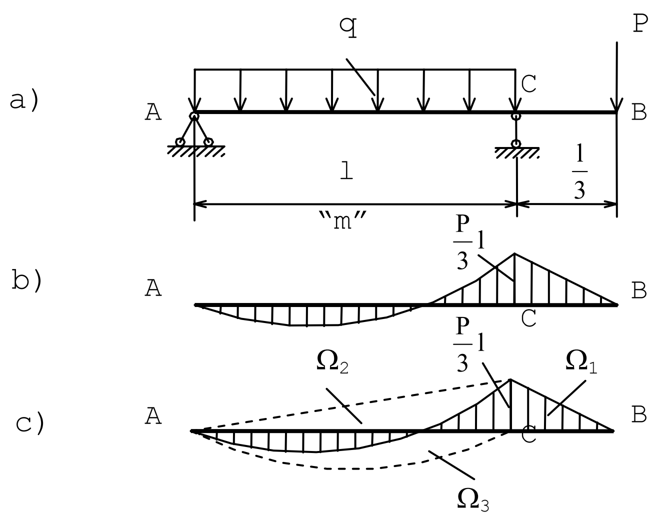
Hình 13.21: Tạo trạng thái "K" để tính độ võng ~~tại~~ B (a) và biểu đồ M_k (b)

$$\Delta_{km} = Y_B = 2\times\frac{2}{3}\cdot\frac{ql^2}{8}\cdot\frac{1}{2}\times\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{4}\times\frac{1}{EJ_x}$$

$$= \frac{5}{384}\cdot\frac{ql^2}{EJ_x}$$

Ví dụ 4: Tìm độ võng tại B của dầm chịu lực như hình 13.22a (bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt)

Bài giải: Biểu đồ mô men ở trạng thái "m" được biểu diễn trên hình 13.22b. Để tính chuyển vị tại B, ta tạo ra trạng thái "k" như hình 13.23a, biểu đồ mô men được biểu diễn trên hình 13.22b.



Hình 13.22: Tìm độ võng của dầm chịu lực (a); Biểu đồ mô men ở trạng thái "m" (b); Chia diện tích tính toán (c)

Chúng ta có thể chia hình 13.22b ra làm ba diện tích Ω_1, Ω_2, Ω_3 như trên hình 11.22c và thực hiện phép nhân biểu đồ với $\overline{M}_K$ như trên hình 13.23b.

Tuy nhiên ta nhận thấy ngay phép nhân biểu đồ VêrêSaghin giữa hai biểu đồ M_m và $\overline{M}_K$ là phức tạp, vì khó xác định được trọng tâm diện tích M_m trong khoảng AC. Để tránh sự phức tạp đó, ta có thể xem biểu đồ M_m trong khoảng đó như tổng cộng của một biểu đồ bậc nhất và một đường bậc 2 (hình 13.24a,b).

Điều đó cũng giống như chúng ta xem rằng trạng thái "m" là tổng cộng của hai trạng thái: trạng thái chỉ có một mình lực P tác dụng (hình 13.24a) và trạng thái chỉ có một mình lực q tác dụng (hình 13.24b).

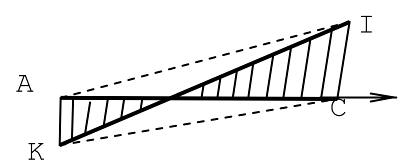
Với cách đó ta có thể thực hiện được phép nhân một cách dễ dàng:

$$\Delta_{km} = Y_B = \sum\int \frac{\overline{M}_K \cdot M_m}{EJ_x} ds = \left(\Omega_1 y_1 + \Omega_2 y_2 + \Omega_3 y_3\right)\cdot\frac{1}{EJ_x}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{Pl}{8}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{Pl}{3}l\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{ql^2}{8}l\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{EJ_x}$$

$$= \frac{4Pl^3}{41EJ} - \frac{ql^4}{72EJ_x}$$

Chú ý : Tương tự như trên, nếu gặp biểu đồ trong đoạn AC là đường thẳng IK cắt qua trục hoành (hình 13.25), thì ta có thể xem biểu đồ đó là tổng của các biểu đồ biểu diễn bởi các đường AKC và KIC.



Hình 13.25: Khi AC cắt trục hoành

Ví dụ 5: Tìm chuyển vị ngang tại A và góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt tại gối tựa A và C của khung chịu lực như hình vẽ (hình 13.26a). Giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt đến chuyển vị của khung.

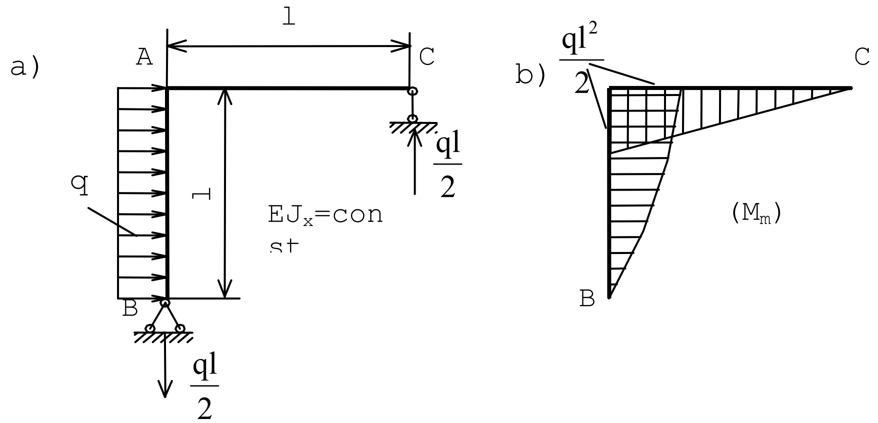
Bài giải: Ta xem trạng thái chịu lực của khung là trạng thái "m". Biểu đồ M_m được biểu diễn như trên hình 13.26b. Để tìm chuyển vị ngang tại A ta tạo trạng thái "k" như trên hình 13.27. Chuyển vị ngang tại A sẽ là:

$$\Delta_{km} = Y_A = \int_0^l \frac{\overline{M}_K \cdot M_m}{EJ_x} dz$$

$$Y_A = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{ql^2}{2}l\frac{2}{3}l + \frac{2}{3}\cdot\frac{ql^2}{2}l\frac{5}{8}l\right)\frac{1}{EJ_x}$$

$$Y_A = \frac{3ql^4}{8EJ_x}$$

(nhân biểu đồ M_m ở hình 11.26b với biểu đồ ở hình 13.27)



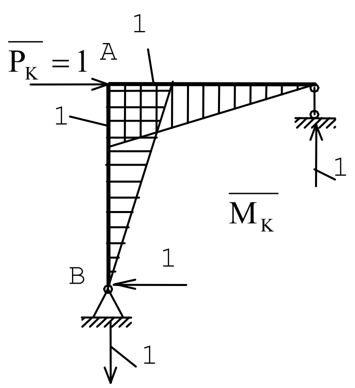
Hình 13.26: Khung chịu lực (a); Biểu đồ M_m (b)

Muốn xác định góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt B và C ta tạo nên trạng thái "K" như trên hình 13.28 và ta có :

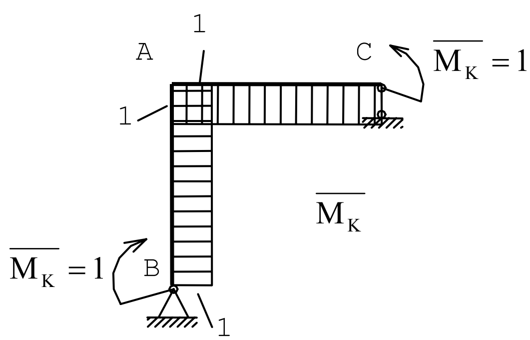
$$\theta_{BC} = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{ql^2}{2}1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{ql^2}{2}\right)\frac{1}{EJ_x}$$

$$\theta_{BC} = \frac{7}{12}\cdot\frac{ql^3}{EJ_x}$$

(nhân biểu đồ M_m trên hình 13.26b với biểu đồ trên hình 13.28)



Hình 13.27: Tạo trạng thái "k" để tính chuyển vị ngang tại A

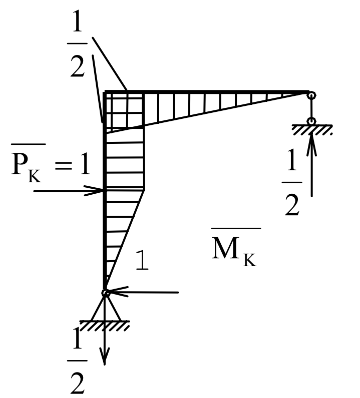


Hình 13.28: Tạo trạng thái "k" để xác định góc xoay tại B và C

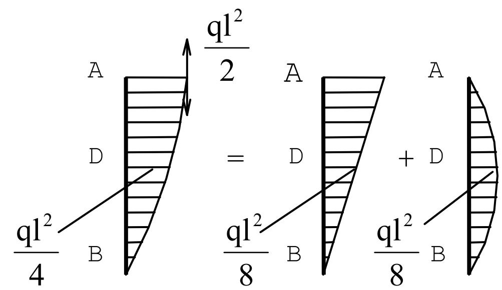
Ví dụ 6: Với khung chịu lực trên đây, hãy tìm chuyển vị ngang tại D là điểm giữa của AB.

Bài giải*:* Tạo nên trạng thái "K" như hình 13.29, ta nhận thấy phép nhân biểu đồ Vêrêsaghin trong đoạn AB trở nên phức tạp vì ta phải chia biểu đồ đó thành hai phần trên hai đoạn AD và DB mà trọng tâm mỗi phần ta điều chưa xác nhận.

Để tránh khó khăn đó, ta xem biểu đồ M_m trên đoạn AB như tổng hai biểu đồ (hình13.30).



Hình 13.29: Tạo trạng thái "K"



Hình 13.30: Phân tích biểu đồ M

Với cách đó, ta có thể thực hiện phép nhân VêrêSaghin dễ dàng:

$$\Delta_{km} = Y_D = \int_0^l \frac{\overline{M}_K \cdot M_m}{EJ_x} dz$$

$$= \left[\frac{ql^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2ql^2}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{ql^2}{2} + \frac{2ql^2}{8}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{ql^2}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{2} \right]\frac{1}{EJ_x}$$

$$Y_D = \frac{89}{384}\cdot\frac{ql^4}{EJ_x}$$

Khi sử dụng phương pháp VêrêSaghin cần chú ý những điều sau đây:

1. Nếu hai biểu đồ do tải trọng và trạng thái "k" (do $\overline{P}_K$ sinh ra) đều là đường bậc nhất cả thì ta có thể tính diện tích biểu đồ này nhân cho tung độ biểu đồ kia ứng với trọng tâm của biểu đồ đã lấy diện tích.

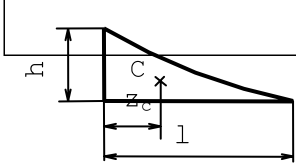
2. Nếu chỉ có một biểu đồ bậc nhất thì tung độ phải lấy tại biểu đồ đó ứng với trọng tâm của diện tích biểu đồ kia (biểu đồ đường cong).

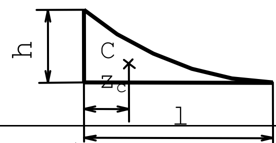
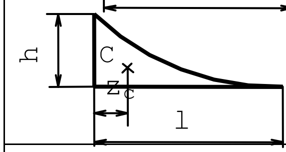
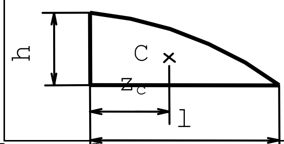
3. Nếu các biểu đồ có dạng phức tạp và không liên tục thì ta chia ra từng đoạn sao cho mỗi đoạn là hàm số liên tục để dễ tính được diện tích và cũng như dễ xác định được trọng tâm rồi cộng lại. Để dễ tính ở trạng thái "m" ta vẽ biểu đồ ứng với từng tải trọng và thực hiện phép nhân với tất cả các biểu đồ $\overline{M}_K$ rồi cộng lại.

4. Trong phép nhân, nếu hai biểu đồ M_m và $\overline{M}_K$ cùng phía thì kết quả mang dấu +. Điều đó cũng có nghĩa là chuyển vị đúng như chiều $\overline{P}_K$ đã chọn. Nếu kết quả mang dấu –, thì chuyển vị ngược lại so với chiều $\overline{P}_K$ đã chọn và biến dạng theo chiều ngược lại.

Bảng 13.1 giới thiệu cách tính diện tích và xác định trọng tâm của một số hình.

Bảng 13.1

 Bậc 2	$\Omega = \frac{1}{3}hl$ $Z_c = \frac{1}{4}l$

	Bậc 3	$\Omega = \frac{1}{4}hl$ $Z_c = \frac{1}{5}l$
	Bậc n	$\Omega = \frac{1}{(n+1)}hl$ $Z_c = \frac{1}{(n+2)}l$
	Bậc 2	$\Omega = \frac{21}{3}hl$ $Z_c = \frac{3}{8}l$

CÂU HỎI TỰ HỌC:

13.1. Khái niệm về công khả dĩ ?
13.2. Công thức Mohr để xác định chuyển vị ?
13.3. Những định lí rút ra từ công thức Mohr ?
13.4. Cách nhân biểu đồ VêrêSaghin và thuận lợi của nó ?
13.5. Những chú ý khi sử dụng phương pháp nhân biểu đồ VêrêSaghin ?

----- -----