Chương 14

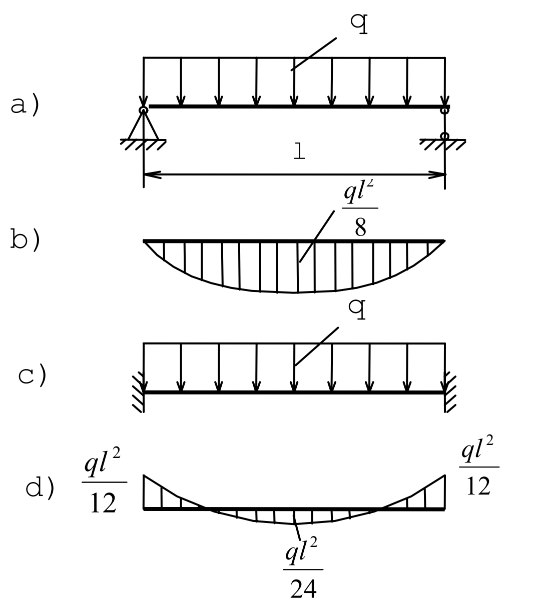
TÍNH HỆ SIÊU TĨNH
BẰNG PHƯƠNG PHÁP LỰC

14.1.KHÁI NIỆM VỀ HỆ SIÊU TĨNH

Hệ siêu tĩnh là một hệ mà các phương trình cân bằng tĩnh học thông thường chưa thể xác định phản lực của chúng, cũng như nội lực trên các mặt cắt ngang của hệ, cũng có nghĩa là bài toán chưa giải được.

Trong kỹ thuật ta thường gặp những hệ như vậy và để tìm các phản lực cũng như nội lực của chúng ngoài những phương trình cân bằng tĩnh học thông thường, còn phải lập thêm các phương trình khác căn cứ vào từng trường hợp tùy theo biến dạng và chuyển vị của hệ thanh ở những vị trí đặc biệt.

Ví dụ: Xét 2 thanh chịu lực như nhau trên hình vẽ 14.1, nhưng hệ chịu lực như trên hình 14.1a là tĩnh định và hệ trên hình 14.1c là siêu tĩnh. Ở hệ chịu lực như hình 14.1c có số phản lực nhiều hơn số phương trình cân bằng tĩnh học ta có thể có được. Trên hình 14.1b biểu diễn biểu đồ mô men uốn trong hệ tĩnh định và trong hình 14.1d biểu diễn biểu đồ mô men uốn trong hệ siêu tĩnh.



Hình 14.1: Hệ chịu lực (a,c -hệ siêu tĩnh; b- hệ tĩnh định; c- mô men uốn trong hệ siêu tĩnh)

Qua đó ta có một số nhận xét sau:

1-Nội lực trong hệ siêu tĩnh phân bố đều hơn, ứng suất và biến dạng nhỏ hơn so với hệ tĩnh định tương đương. Như vậy hệ siêu tĩnh tiết kiệm vật liệu hơn hệ tĩnh định tương đương.

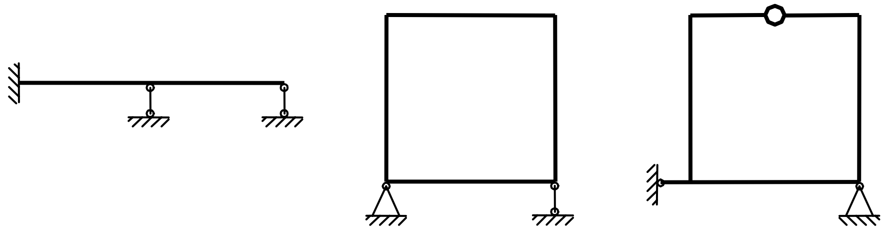
Nhưng hệ siêu tĩnh có thể phát sinh ra ứng suất khi nhiệt độ thay đổi, khi các gối tựa lún không đều và khi các chỗ nối chế tạo không chính xác.

Như đã biết trong cơ học lý thuyết đối với bài toán phẳng số liên kết đơn cần thiết đê giữ cho hệ cố định là 3. Số liên kết đó đúng bằng số phương trình cân bằng tĩnh học, vì vậy nếu số liên kết đơn (hoặc quy ra liên kết đơn) đặt vào hệ lớn hơn 3, thì với số phương trình cân bằng nói trên, ta chưa có thể xác định được các phản lực liên kết, do đó cũng chưa tính được nội lực trong các thanh, ta nói hệ siêu tĩnh có những liên kết thừa. Các liên kết này là liên kết giữa vật thể nối với mặt đất hoặc nối với các vật thể khác thường gọi là vật thể ngoại.

Ngoài ra sự liên kết thừa có thể do sự liên kết giữa các thanh của hệ sinh ra gọi là liên kết nội. Ví dụ một khung kín thì không thể xác định nội lực của nó bằng các phương trình cân bằng tĩnh học thông thường, và ta coi số liên kết nội của hệ là 3.

Tổng số các liên kết thừa nội và ngoại chính là số bậc siêu tĩnh của hệ.

Ví dụ: Trên hình 14.2a biểu diễn hệ siêu tĩnh có hai bậc siêu tĩnh do thừa hai liên kết ngoại, trên hình 14.2b biểu diễn hệ siêu tĩnh có 3 bậc siêu tĩnh (liên kết thừa ngoại không có nhưng có 3 liên kết nội, hình 14.2c biểu diễn hệ siêu tĩnh là 4, vì có hai liên kết thừa ngoại và hai liên kết thừa nội (chú ý 1 khớp làm giảm bớt một bậc siêu tĩnh).



a b c

Hình 14.2: Các dạng hệ siêu tĩnh: a-Hệ siêu tĩnh do thừa hai liên kết ngoại;b- Hệ siêu tĩnh do thừa 3 liên kết nội; c-Hệ siêu tĩnh có 2 liên kết thừa nội và 2 liên kết thừa

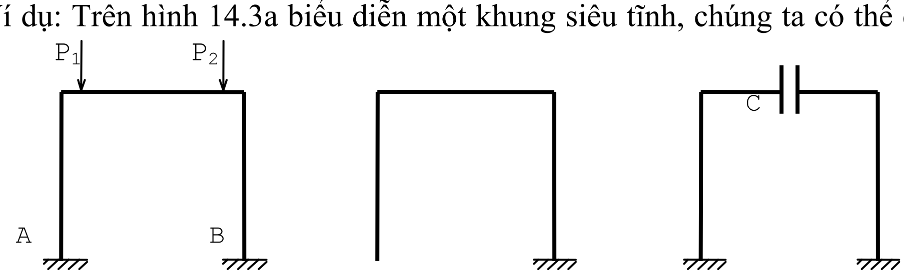
Sau đây chúng ta trình bày một phương pháp để tính các phản lực và xác định nội lực trong các hệ siêu tĩnh gọi *là phương pháp lực* vì nó lấy lực là ẩn số trong quá trình giải bài toán

14.2 . TÍNH HỆ THANH SIÊU TĨNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP LỰC

14.2.1. Hệ cơ bản: Muốn giải hệ siêu tĩnh phải từ nó chọn một hệ tĩnh định tương ứng bằng cách loại bỏ những liên kết thừa đi. Hệ tĩnh định đó gọi *là hệ cơ bản*. Cần chú ý rằng hệ cơ bản vẫn phải cố định, không bị biến hình (thay đổi dạng hình học của hệ khi chưa có tải trọng).

Việc bỏ các liên kết thừa có thể thực hiện bằng nhiều cách và từ đó có thể nhận thấy có nhiều hệ cơ bản khác nhau. Cho nên phải chọn hệ cơ bản sao cho việc tính toán đơn giản nhất

Ví dụ: Trên hình 14.3a biểu diễn một khung siêu tĩnh, chúng ta có thể chọn nhiều



a b c

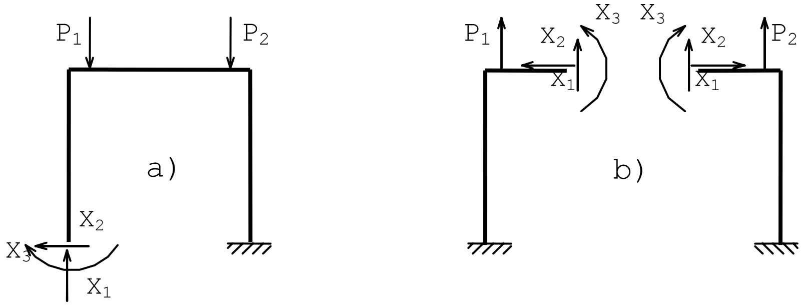
Hình 14.3: Chọn hệ cơ bản. a:Hệ siêu tĩnh; b,c: Hệ cơ bản từ hệ (a)

hệ cơ bản tĩnh định khác nhau. Ở hình 14.3b và 14.3c biểu diễn hai hệ cơ bản rút ra từ hình 14.3a.

14.2.2.Hệ tương đương:

Ta dễ dàng thấy rằng hệ cơ bản muốn làm việc như hệ siêu tĩnh thì tại A phải có những lực có trị số và chiều sao cho tại A có chuyển vị bằng không (hình 14.3b), tức là chuyển vị và góc xoay ở ngoài không có hoặc chuyển vị tương đối bằng không tại điểm C (hình 14.3c).

Như vậy muốn hệ tĩnh định làm việc tương tự như hệ đã cho cùng với ngoại lực (P_1, P_2 chẳng hạn) ta còn phải đặt vào những nơi đã bỏ liên kết những lực chưa biết theo phương mà liên kết đã bỏ để đảm bảo cơ cấu hoàn toàn tương đương với hệ siêu tĩnh đã cho (xem hình 14.4a,b).



Hình 14.4: Hệ tương đương a,b với hệ

Với điều kiện chuyển vị tại A ở hệ tĩnh định cơ bản này giống như chuyển vị cũng tại A trong hệ siêu tĩnh đã cho. Rõ ràng nếu hệ có n bậc siêu tĩnh thì ta có n lực chưa biết, hệ như vậy *gọi là hệ tương đương*. Để xác định các lực chưa biết X_1, X_2 ,... X_n đó ta căn cứ vào điều kiện chuyển vị tương đương, tức là:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_{x1}(X_1,X_2,\ldots X_n,P)=0\\ \Delta_{X2}(X_1,X_2,\ldots X_n,P)=0\\ \ldots\\ \Delta_{Xn}(X_1,X_2,\ldots X_n,P)=0\end{array}\right\} \qquad (14\text{-}1)$$

Các Δ_{X1}, Δ_{X2},...Δ_{Xn} là chuyển vị theo phương X_1, X_2. ...X_n do lực X_1, X_2, ...X_n và các tải trọng P gây ra. Trong (14-1) các X_1, X_2, ...,X_n là những lực cũng là những ẩn số, *nên gọi là phương pháp lực*.

14.2.3. Hệ phương trình chính tắc.

Từ (14-1), áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có:

$$\Delta_{X1}(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n, P) = \Delta_{X1}(X_1) + \Delta_{X2}(X_2) + \ldots. + \Delta_{Xn}(X_n) + \Delta_{Xn}P = 0$$

Có thể viết gọn hơn là:

$$\Delta_{K1} + \Delta_{K2} + \ldots. + \Delta_{Km} + \ldots. + \Delta_{Kn} + \Delta_{KP} = 0$$

Trong đó Δ_{Km} là chuyển vị theo phương X_K gây ra do X_m sinh ra ... Δ_{KP} là chuyển vị theo phương X_K gây ra do tất cả tải trọng sinh ra. Nếu gọi δ_{km} là chuyển vị đơn vị theo phương X_K, gây ra do lực $\overline{X_m} = 1$ (đặt tại X_m và có trị số bằng 1).

Thì $\Delta_{Km} = \delta_{Km} \cdot X_m$

Khi đó phương trình thứ K của (14-1) có dạng:

$$\delta_{K1} \cdot X_1 + \delta_{K2} \cdot X_2 + \delta_{Km} \cdot X_m + \ldots. + \delta_{Kn} \cdot X_n + \Delta_{KP} = 0$$

Vậy hệ (14-1) sẽ có dạng:

$$\left.\begin{array}{l}\delta_{11}\cdot X_1+\delta_{12}\cdot X_2+\ldots..+\delta_{1n}\cdot X_n+\Delta_{1P}=0\\ \ldots..\\ \delta_{n1}\cdot X_1+\delta_{n2}\cdot X_2+\ldots..+\delta_{nn}\cdot X_n+\Delta_{nP}=0\end{array}\right\} \qquad (14\text{-}2)$$

Hệ (14-2) gọi là hệ phương trình chính tắc của phương pháp lực giải hệ siêu tĩnh vì nhờ (14-2) ta tìm được các ẩn số X_1, X_2,...X_n thì ta có thể xem các lực đó cùng với ngoại lực đã cho trong hệ siêu tĩnh là những tải trọng bên ngoài tác dụng lên hệ tĩnh định (hệ cơ bản), sau đó xác định nội lực của hệ tĩnh định với các tải trọng không những chỉ là P_1, ... P_n mà có cả X_1, ... X_n nữa, tức là khi đã biết X_1.......X_n thì coi nó là ngoại lực tác dụng lên hệ.

δ_{km} (khi $K \neq m$) gọi là hệ số phụ, có thể dương hoặc âm.

δ_{kk} (khi $K = m$) gọi là hệ số chính, giá trị của nó bao giờ cũng dương.

Δ_{kp} là số hạng tự do.

Nhờ có định lý chuyển vị đơn vị tương hỗ nên ta có $\delta_{km} = \delta_{mk}$ và nhờ vậy sẽ giảm bớt việc tính các hệ số trong khi giải hệ phương trình chính tắc (14-2).

Nếu bỏ qua ảnh hưởng của các lực cắt, lực dọc đối với chuyển vị của hệ thì theo công thức Mohr chỉ còn lại thành phần mô men và ta có:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{km} &= \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\ell_i} \frac{\overline{M_k} \cdot \overline{M_n}}{EJ_x} dz \\ \delta_{KK} &= \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\ell_i} \frac{\overline{M_k^2}}{EJ_x} dz \\ \Delta_{kp} &= \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\ell_i} \frac{\overline{M_k} \cdot M_p}{EJ_x} dz \end{aligned}\right\} \qquad (14 - 3)$$

Ví dụ1: Vẽ biểu đồ nội ... hình 14.5.

Bài giải: Khung có hai bậc siêu tĩnh. Hệ cơ bản có được bằng cách bỏ liên kết kép tại A và hệ tương đương như trên hình 14.5b.

Phương trình chính tắc có dạng:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2P} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (14\text{-}4)$$

Biểu đồ mô men do các lực bằng 1 đơn vị tác dụng theo X_1, X_2 được biểu diễn trên hình 14.5c và 14 .5d, còn biểu đồ do tải trọng q được biểu diễn ở hình 14.5e.

Trên cơ sở các biểu đồ đó, bằng phương pháp Vêrêsaghin ta tìm được:

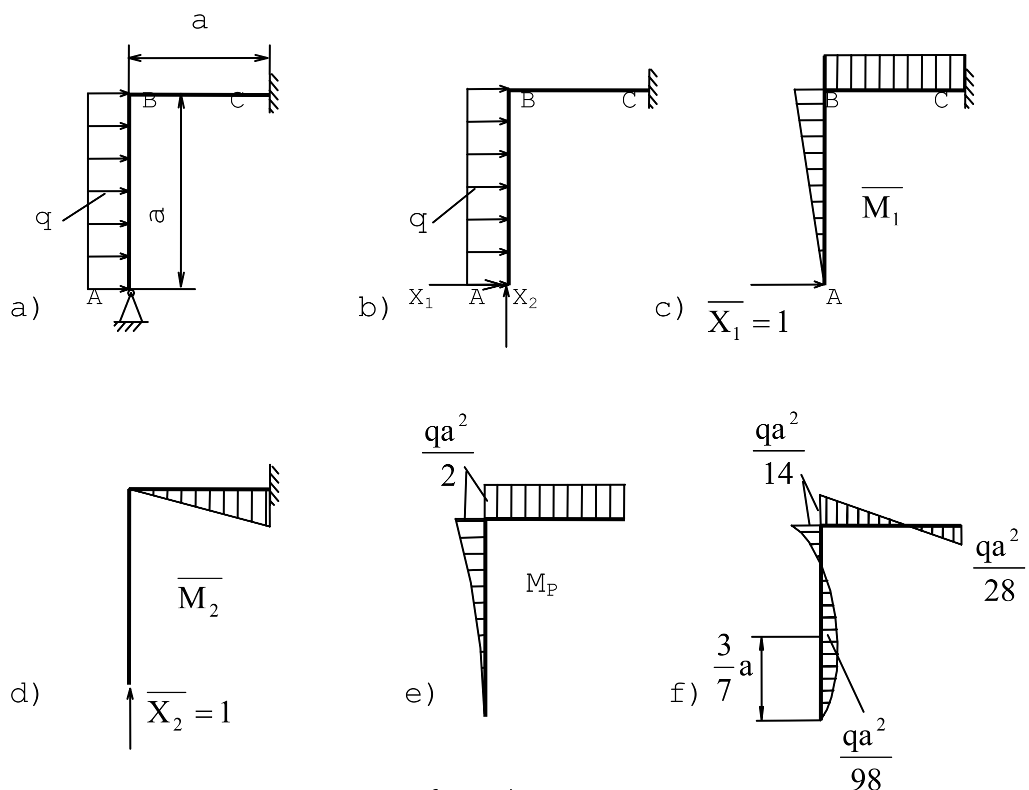
$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x}\left(\frac{a^2}{2} \cdot \frac{2}{3} a + a^2 \cdot a\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{a^3}{EJ_x}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ_x} a \cdot a \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{2EJ_x} \cdot a^3$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ_x} \cdot \frac{a^2}{2} \times \frac{2}{3} a = \frac{a^3}{3EJ_x}$$

$$\Delta_{2P} = \frac{-qa^2}{2EJ_x} \cdot a \cdot \frac{a}{2} = -\frac{qa^4}{4EJ_x}$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EJ_x}\left(\frac{1}{3}qa^2\cdot a\cdot\frac{3}{4}a + \frac{qa^2}{2}\cdot a\cdot a\right) = \frac{5}{8EJ_x}qa^4$$



Hình 14.5: Vẽ biểu đồ nội lực của khung siêu tĩnh

Sau khi thay các giá trị δ_{11}, δ_{12}, δ_{22}, Δ_{1P} và Δ_{2P} vào hệ phương trình (14-4) và rút gọn ta được:

$$\left.\begin{aligned} \frac{4}{3}X_1 - \frac{1}{2}X_2 + \frac{5}{8}qa = 0 \\ -\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 - \frac{1}{4}qa = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (14\text{-}5)$$

Giải hệ phương trình (14-5), ta sẽ được:

$$X_1 = -\frac{3}{7}qa\ ;\quad X_2 = \frac{13}{28}qa$$

Như vậy ở hệ tương đương ta có X_1 (đổi chiều) và X_2 đã biết giá trị của nó. Từ đó ta vẽ các biểu đồ nội lực của nó, biểu đồ mô men được biểu diễn trên hình 14.5f.

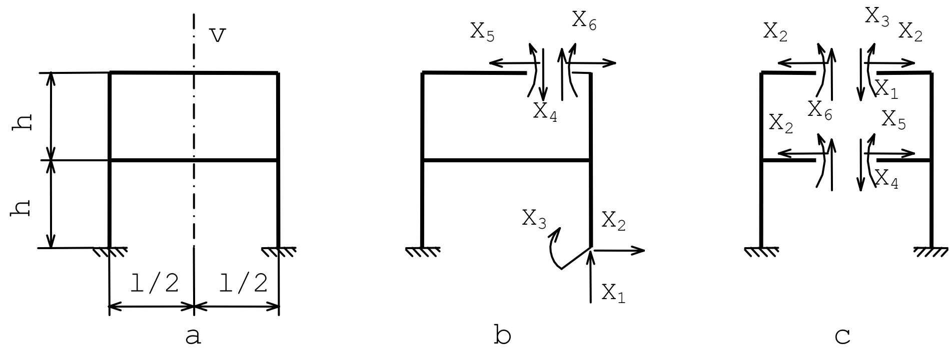
Cũng có thể căn cứ vào X_1, X_2, ta tăng giá trị các biểu đồ $\overline{M}_1$ và $\overline{M}_2$ đã có ở hinh 14.5c và 14.5d bằng cách nhân mọi giá trị $\overline{M}_1$ và $\overline{M}_2$ cho X_1, X_2. Sau đó cộng 3 biểu đồ mô men do tải trọng (hình 14.5e) với M_1, M_2 (hình 14.5c,d) khi đã nhân X_1 và X_2, ta cũng có được biểu đồ mô men tổng cộng như hình 14.5f.

14.3. TÍNH HỆ SIÊU TĨNH ĐỐI XỨNG

Một hệ được coi là đối xứng khi có hình dạng, độ cứng (EJ_x chẳng hạn), đối xứng qua một trục nào đó. Ví dụ khung biểu diễn trên hình 14.6a, khung đối xứng qua trục v nào đó. Giả sử khung chịu tác dụng bởi hệ lực nào đó.

Rõ ràng khung có 6 bậc siêu tĩnh. Nếu chọn hệ cơ bản, rồi hệ tương đương như hình 14.6b, thì ta cần có 6 phương tình để giải hệ siêu tĩnh như sau:

$$\left.\begin{array}{l} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \delta_{15}X_5 + \delta_{16}X_6 + \Delta_{1p} = 0 \\ .... \\ \delta_{61}X_1 + \delta_{62}X_2 + \delta_{63}X_3 + \delta_{64}X_4 + \delta_{65}X_5 + \delta_{66}X_6 + \Delta_{6P} = 0 \end{array}\right\} \quad (14\text{-}6)$$



Hình 14.6: Hệ siêu tĩnh đối xứng (a); hệ tương đương không đối xứng (b); Hệ tương đương đối xứng (c)

Giải hệ phương trình này tốn rất nhiều thời gian.

Nhưng ta nhận thấy rằng: Nếu ta chọn hệ cơ bản, rồi hệ tương đương như trên hình14.6c (có tính chất đối xứng), thì việc tính toán sẽ đơn giản hơn nhiều.

Bởi vì với hệ tương đương đó các biểu đồ mô men $\overline{M}_2$, $\overline{M}_3$, $\overline{M}_5$, $\overline{M}_6$ (do các lực $\overline{X}_2$, $\overline{X}_3$, $\overline{X}_5$, $\overline{X}_6$ có tính chất đối xứng sinh ra) đều có tính chất đối xứng. Còn $\overline{M}_1$, $\overline{M}_4$ có tính chất phản đối xứng (do các lực $\overline{X}_1 = 1, \overline{X}_4 = 1$). Các biểu đồ đó do các lực bằng 1 từ $\overline{X}_1, ... \overline{X}_6$ được biểu diễn trên hình 14.7..

Dễ dàng thấy rằng kết quả việc thực hiện cách nhân biểu đồ theo Vêrêsaghin giữa các biểu đồ đối xứng và phản đối xứng sẽ bằng không. Một nửa kết quả dương và nửa kia là âm.Vì vậy sẽ có nhiều δ_{km} sẽ bằng 0, nên việc giải hệ phương trình chính tắc sẽ dễ dàng và nhanh chóng hơn.

Ví dụ 2: Để tìm δ_{12} ta nhân biểu đồ $\overline{M}_1$ (trên hình 14.7a) và biểu đồ $\overline{M}_2$ (hình 14.7b). Kết quả :

Nửa bên phải là: $\quad 2h \times \frac{2h}{2} \cdot \frac{l}{2} = h^2 l$

Nửa bên trái là: $\quad -2h \times \frac{2h}{2} \cdot \frac{l}{2} = -h^2 l$

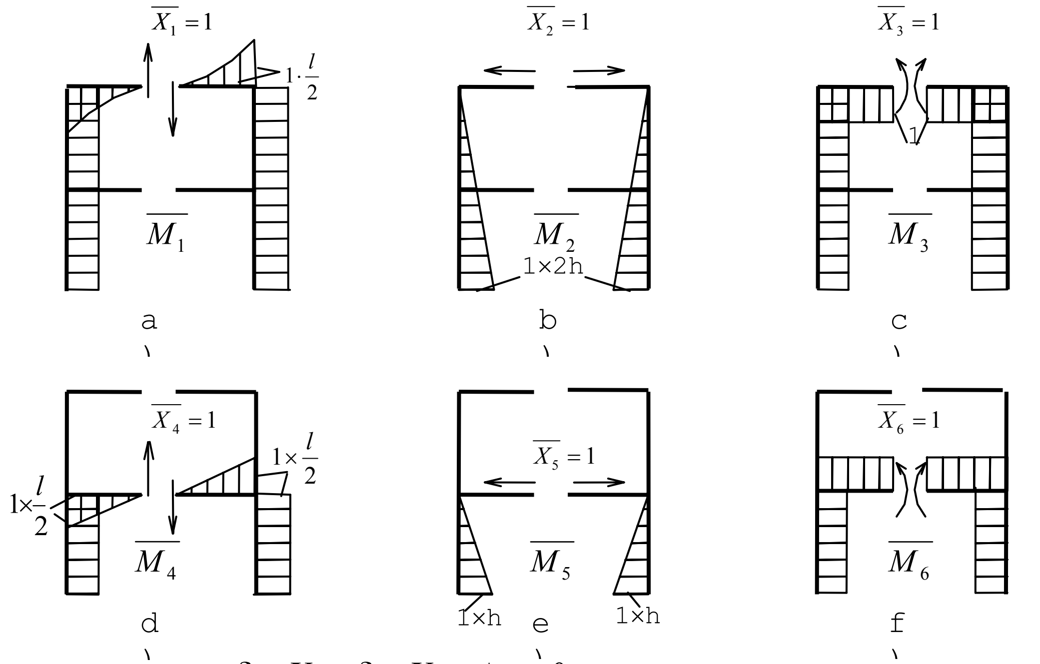
Do đó: $\quad \delta_{12} = \frac{1}{EJ_x}\left(h^2 l - h^2 l\right) = 0 = \delta_{21}$

Tương tự, ta có thể tính cho các hệ số phu khác, kết quả là:

$$\delta_{13} = \delta_{31} = 0; \quad \delta_{15} = \delta_{51} = 0; \quad \delta_{16} = \delta_{61} = 0$$

$\delta_{24} = \delta_{42} = 0$; $\delta_{34} = \delta_{43} = 0$; $\delta_{45} = \delta_{54} = 0$; $\delta_{46} = \delta_{64} = 0$

Như vậy hệ phương trình (14-6), khi tính đến một số hệ số phụ bằng không nhờ các biểu đồ ở hình 14.7, sau khi đã thay các hệ số có giá trị bằng 0 vào (14-6), ta có:



Hình 14.7: Biểu đồ mô men để tính các hệ số δ

$$\left.\begin{aligned}
\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{14} \cdot X_4 + \Delta_{1p} &= 0 \\
\delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \delta_{25} \cdot X_5 + \delta_{26} \cdot X_6 + \Delta_{2P} &= 0 \\
\delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \delta_{35} \cdot X_5 + \delta_{36} \cdot X_6 + \Delta_{3P} &= 0 \\
\delta_{41} \cdot X_1 + \delta_{44} \cdot X_4 + \Delta_{4P} &= 0 \\
\delta_{52} \cdot X_2 + \delta_{53} \cdot X_3 + \delta_{56} \cdot X_6 + \Delta_{5P} &= 0 \\
\delta_{62} \cdot X_2 + \delta_{63} \cdot X_3 + \delta_{65} \cdot X_5 + \delta_{66} \cdot X_6 + \Delta_{6P} &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (14\text{-}7)$$

Hệ phương trình (14 - 7) có thể tách ra hai hệ:

$$\left.\begin{aligned}
\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{14} \cdot X_4 + \Delta_{1P} &= 0 \\
\delta_{41} \cdot X_1 + \delta_{44} \cdot X_4 + \Delta_{4P} &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (14\text{-}8)$$

Và

$$\left.\begin{aligned}
\delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \delta_{25} \cdot X_5 + \delta_{26} \cdot X_6 + \Delta_{2P} &= 0 \\
\delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \delta_{35} \cdot X_5 + \delta_{36} \cdot X_6 + \Delta_{3P} &= 0 \\
\delta_{52} \cdot X_2 + \delta_{53} \cdot X_3 + \delta_{55} \cdot X_5 + \delta_{56} \cdot X_6 + \Delta_{5P} &= 0 \\
\delta_{62} \cdot X_2 + \delta_{63} \cdot X_3 + \delta_{65} \cdot X_5 + \delta_{66} \cdot X_6 + \Delta_{6P} &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (14\text{- }9)$$

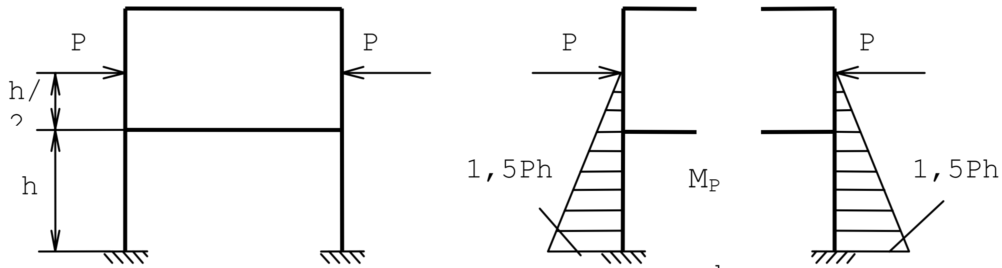
Việc giải hai hệ phương trình (14-8) và (14-9) tuy còn phức tạp nhưng dù sao nó cũng dễ hơn nhiều so với việc giải hệ phương trình (14-6).

Sau đây chúng ta xét hai trường hợp cụ thể.

14.3.1.Hệ siêu tĩnh đối xứng chịu tải trọng đối xứng:

Ví dụ 3: Hệ lực như trên hình 14.8a là hệ đối xứng, chịu tải trọng cũng đối xứng. Chúng ta cũng chọn hệ cơ bản, rồi hệ tương đương như trên hình 14.6c và có các biểu đồ mô men đơn vị như trên hình 14.7. Bây giờ ta vẽ các biểu đồ mô men do tải trọng gây nên

như trên hình 14.8b .



a　　　　　　　　b

Hình 14.8: a-Hệ siêu tĩnh đối xứng chịu tải trọng đối xứng. b-Biểu đồ mô men

Với những điều kiện bài toán siêu tĩnh như vậy, chúng ta tiến hành tính các hệ số tự do do tải trọng gây ra ở các phương Δ_{1P}, Δ_{2P}, Δ_{3P}, Δ_{4P}, Δ_{5P} và Δ_{6P}.

- Trước tiên chúng ta xét hệ phương trình (14-8), ta xét các hệ số Δ_{1P} và Δ_{4P}. Để có Δ_{1P} ta tiến hành nhân biểu đồ của M_P và $\overline{M}_1$. Như vậy, nếu ta nhân biểu đồ $\overline{M}_1$ (phản đối xứng) với M_P (đối xứng) thì kết quả sẽ bằng không. Cho nên trong ví dụ này $\Delta_{1P} = 0$, tương tự ta có $\Delta_{4P} = 0$.

Do đó hệ phương trình (14-8) sẽ trở thành:

$$\left.\begin{aligned}\delta_{11}\cdot X_1+\delta_{14}\cdot X_4=0\\ \delta_{41}\cdot X_1+\delta_{44}\cdot X_4=0\end{aligned}\right\} \qquad (14\text{-}10)$$

Có thể giải hệ phương trình (14-10) này như sau: Ta nhân phương trình 1 của nó với δ_{41} và nhân phương trình 2 của nó với $(-\delta_{11})$.

Ta sẽ được:

$$\left.\begin{aligned}\delta_{11}\cdot\delta_{41}\cdot X_1+\delta_{11}\cdot\delta_{41}\cdot X_4=0\\ -\delta_{11}\cdot\delta_{41}\cdot X_1-\delta_{11}\cdot\delta_{44}\cdot X_4=0\end{aligned}\right\} \qquad (14\text{-}10a)$$

Thực hiện phép cộng, cuối cùng ta được:

$$0 + (\delta_{11}\cdot\delta_{41}-\delta_{11}\cdot\delta_{44})\cdot X_4 = 0$$

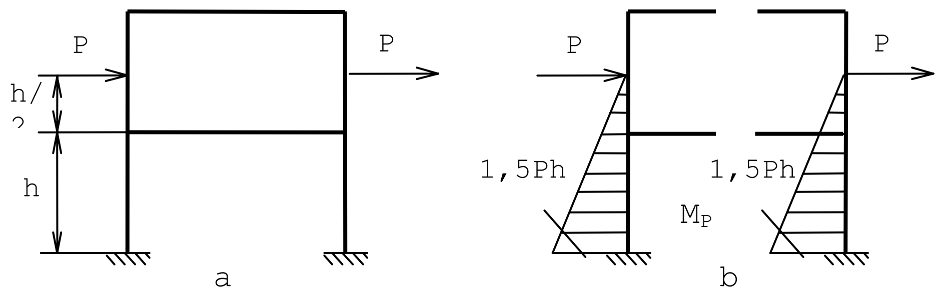
Vậy $X_4=0$ và $X_1=0$, có nghĩa là các lực cắt $X_1=X_4=0$.

Tóm lại cách giải một hệ siêu tĩnh đối xứng có lợi nhất là chọn hệ cơ bản bằng cách cắt hệ bằng 1 mặt đối xứng và xét các ẩn số tại đó.

Như vậy ta có nhận xét: Nếu tải trọng là đối xứng thì các lực chưa biết phản đối xứng sẽ bằng không.

14.3.2. Hệ siêu tĩnh đối xứng, chịu tải trọng phản đối xứng.

Nếu tải trọng là phản đối xứng như trên hình 14.9a thì các lực chưa biết đối xứng cũng sẽ bằng không.



Hình 14.9: a-Hệ đối xứng chịu tải trọng phản đối xứng.
b- Biểu đồ mô men

Cũng tương tự cách làm ở trên, việc nhân biểu đồ của M_P phản đối xứng với các biểu đồ $\overline{M}_2$, $\overline{M}_3$, $\overline{M}_5$ và $\overline{M}_6$ đối xứng sẽ đưa đến kết quả:

$$\Delta_{2P}=\Delta_{3P}=\Delta_{5P}=\Delta_{6P}=0$$

Vậy thực chất chỉ còn X_1 và X_4 là các lực phản đối xứng khác không.

Cuối cùng sẽ dẫn ta từ hệ phương trình (14-9) thành hệ phương trình sau đây:

$$\left.\begin{aligned}\delta_{22}\cdot X_2+\delta_{23}\cdot X_3+\delta_{25}\cdot X_5+\delta_{26}\cdot X_6=0\\ \delta_{32}\cdot X_2+\delta_{33}\cdot X_3+\delta_{35}\cdot X_5+\delta_{36}\cdot X_6=0\\ \delta_{52}\cdot X_2+\delta_{53}\cdot X_3+\delta_{55}\cdot X_5+\delta_{56}\cdot X_6=0\\ \delta_{62}\cdot X_2+\delta_{63}\cdot X_3+\delta_{65}\cdot X_5+\delta_{66}\cdot X_6=0\end{aligned}\right\}\qquad(14\text{-}11)$$

Chúng ta cũng có thể thực hiện phép giải như đã giải hệ phương trình (14-10) và hiển nhiên vì các hệ số δ_{22} ...δ_{66} đều khác 0, nên chỉ có thể $X_2 = X_3 = X_5 = X_6 = 0$.

Vậy ta có kết luận:

Nếu một hệ đối xứng chịu tải trọng phản đối xứng thì các ẩn số đối xứng đều bằng không. Trong ví dụ trên $X_2 = X_3 = X_5 = X_6 = 0$, có nghĩa là các mô men uốn và lực dọc tại mặt cắt trên trục đối xứng của khung bằng không.

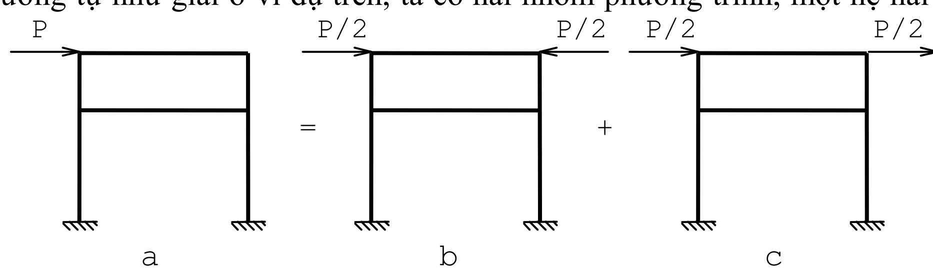
14.3.3. Hệ siêu tĩnh đối xứng tải trọng bất kì.

Ví dụ 4: Giả sử cho một hệ đối xứng chịu tải trọng P như hình 14.10a.

Ở đây không giống ở hai trường hợp trên, tức là tải trọng không đối xứng mà cũng không phải phản đối xứng. Trong trường hợp này, ta phân tích hệ này là tổng hợp của hệ đối xứng (hình 14.10b) và một hệ phản đối xứng (như trên hình 14.10c). Tưc là khi

tải trọng bất kì thì tạo nên một hệ tải trọng đối xứng và một hệ tải trọng bất đối xứng

Tương tự như giải ở ví dụ trên, ta có hai nhóm phương trình, một hệ hai phương



Hình 14.10: a)-Hệ đối xứng tải trọng bất kì.
b-c): Hệ đối xứng và phản đối xứng phân

trình và một hệ bốn phương trình. Dĩ nhiên tổng cộng vẫn có 6 phương trình nhưng dễ giải hơn nếu ta không sử dụng những tính chất nêu ở trên.

14.4.TÍNH HỆ SIÊU TĨNH KHI CHỊU TÁC DỤNG CỦA NHIỆT ĐỘ THAY ĐỔI

Về nguyên tắc tính siêu tĩnh chịu tác dụng của nhiệt độ thay đổi cũng giống như tính đối với tải trọng, chỉ khác ở chỗ nguyên nhân gây ra nội lực trong hệ là do nhiệt độ mà thôi. Phương trình chính tắc thứ K của phương pháp lực có dạng:

$$\delta_{K1} X_1 + \delta_{K2} X_2 + ... + \delta_{KK} X_K + ... + \delta_{Kn} X_n + \Delta_{K1} = 0 \qquad (14\text{-}12)$$

Trong đó Δ_{K1} là chuyển vị theo phương của lực X_k do sự thay đổi nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản. Theo công thức trong chương chuyển vị, ta có:

$$\Delta_{kt} = \int_0^{\ell} \alpha \cdot t_c \overline{N}_k dz + \int_0^{\ell} \alpha \cdot \frac{t_2 - t_1}{h} \cdot \overline{M}_k dz$$

Trong đó: $\overline{N}_k$ và $\overline{M}_k$ - Giá trị lực dọc và mô men nội lực do lực $\overline{P}_k = 1$ tại nơi và phương tính chuyển vị ; t_c - Nhiệt độ trung bình trong thanh chịu kéo (nén); t_2- Nhiệt độ ở mặt trên của dầm ;t_1 - Nhiệt độ ở mặt dưới của dầm; α- Hệ số giãn nhiệt của vật liệu; h - Chiều cao của dầm.

Nếu hệ gồm nhiều thanh thẳng có mặt cắt ngang không đổi trong từng thanh và nhiệt độ thay đổi như nhau theo suốt chiều dài của nó thì theo cách tính chuyển vị ta có:

$$\Delta_{kt} = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\ell i} \alpha \cdot t_c \cdot \overline{N}_K dz + \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\ell i} \alpha \cdot \frac{t_2 - t_1}{h} \cdot \overline{M}_K dz$$

Ví dụ 5: Giải hệ siêu tĩnh được cho như hình 14.11a và vẽ biểu đồ nội lực của nó

Bài giải: Hệ siêu tĩnh này có bậc siêu tĩnh là 1. Hệ cơ bản được chọn bằng cách gỡ bỏ gối tựa A và thay vào đó một phản lực X_1, ta sẽ có hệ tương đương như trên hình vẽ 14.11b. Phương trình chính tắc của hệ siêu tĩnh này là:

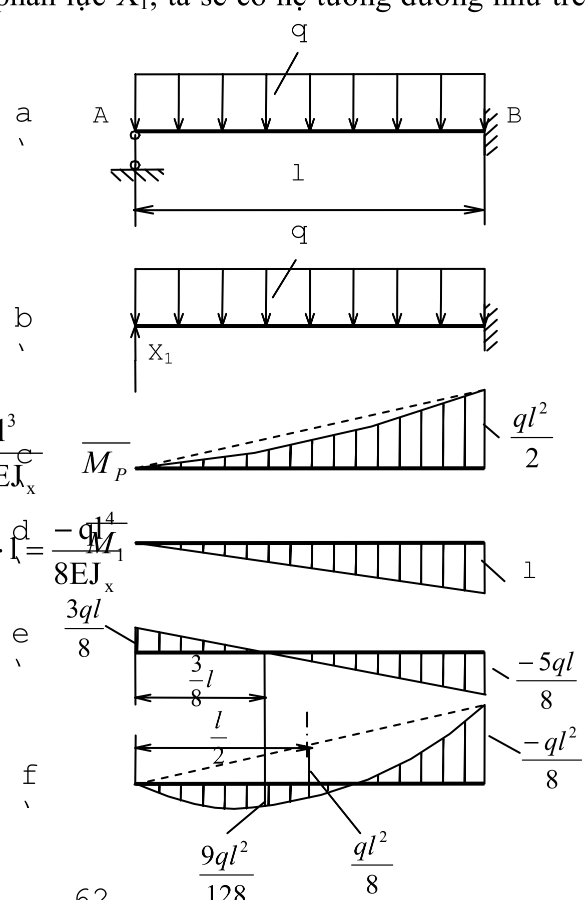
$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

Bây giờ ta vẽ biểu đồ mô men nội lực do tải trọng bên ngoài gây ra (do q sinh ra) gọi là M_P như trên hình 14.11c và biểu đồ $\overline{X}_1 = 1$ đặt tại A sinh ra là biểu đồ $\overline{M}_1$ (hình 14.11d). Ta tính:

$$\delta_{11} = \overline{M}_1 \times \overline{M}_1 = \frac{1}{EJ_x} \cdot \frac{1}{2} 1 \times 1 \times \frac{2}{3} 1 = \frac{1^3}{3EJ_x}$$

$$\Delta_{1P} = \overline{M}_1 \times M_P = -\frac{1}{EJ_x} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{-ql^4}{8EJ_x}$$

Ta đưa các số liệu này vào phương trình 14-12, ta được:



Hình 14.11: Vẽ biểu đồ hệ siêu tĩnh

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{3}{8}ql$$

Khi có X_1 rồi, ta xem dầm chịu tác dụng lực phân bố q và lực tập trung tại A là X_1. Với hệ lực này, ta vẽ được biểu đồ lực cắt Q và biểu đồ mô men nội lực M của dầm siêu tĩnh này (xem hình 14.11e và 14.11f).

Để có biểu đồ mô men nội lực như hình 14.11f, ta có thể thực hiện cộng hai biểu đồ M_P (hình 14.11c) và biểu đồ $\overline{M_1}$ (hình 14.11d) với điều kiện các gía trị mô men tại biểu đồ này được nhân lên X_1 lần (ví dụ ở ngàm trên hình 14.11d là giá trị mô men không phải là l mà là:

$$l \times X_1 = \frac{3}{8}ql^2$$

Ví dụ 6: Tìm chuyển vị thẳng đứng tại điểm giữa D của thanh BC như hình vẽ 14.12. Cho biết EJ_x= const.

Bài giải*:* Đây là bài toán tính chuyển vị ở hệ siêu tĩnh.

Trước tiên phải giải hệ siêu tĩnh và khi đã giải được hệ siêu tĩnh thì các lực tác dụng lên hệ gồm có tải trọng và các phản lực liên kết điều đã biết, có nghĩa là trên hệ cơ bản tĩnh định mọi lực tác dụng đều đã rõ và bài toán tính chuyển vị của hệ siêu tĩnh cũng là bài toán tính chuyển vị trong hệ cơ bản tĩnh định đó.

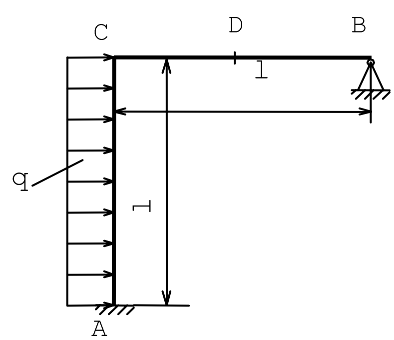
Với cách làm đó chúng ta giải bài toán siêu tĩnh trước.

- Chọn hệ cơ bản: Hệ có hai bậc siêu tĩnh, có thể đưa ra nhiều hệ cơ bản, nhưng ở đây ta chọn hệ cơ bản như hình 14.13a (bỏ khớp ở B).

- Hệ tương đương: Trên hệ cơ bản ta đặt tải trọng q và các phản lực chưa biết tại B là X_1 và X_2 (như hình 14.13b).

Với hệ tương đương như vậy, ta sẽ có hệ phương trình chính tắc là:

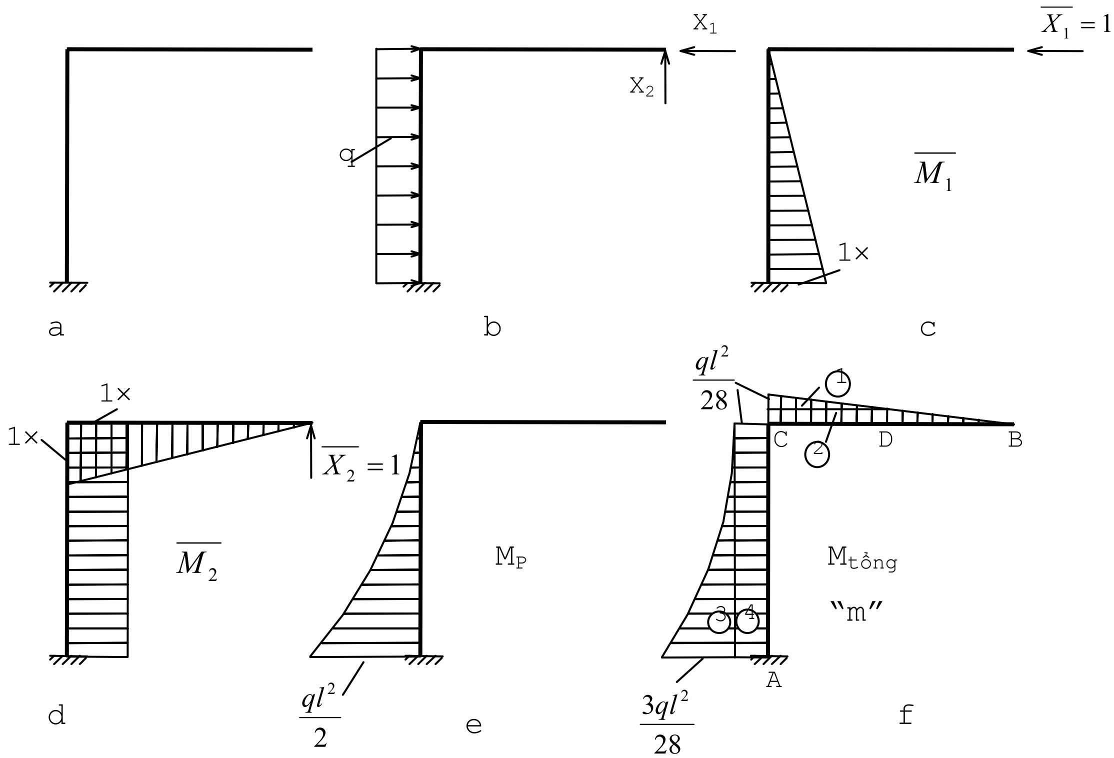
$$\left.\begin{aligned} \delta_{11}\cdot X_1 + \delta_{12}\cdot X_2 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21}\cdot X_1 + \delta_{22}\cdot X_2 + \Delta_{2P} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (14\text{-}13)$$



Hình 14.12: Tính chuyển vị của hệ siêu tĩnh tại D

Để giải hệ (14-13), ta phải xác định δ_{11}, $\delta_{12} = \delta_{21}$, δ_{22}, Δ_{1P} và Δ_{2P}. Muốn vậy ta phải xây dựng các biểu đồ mô men do $\overline{X}_1 = 1$, do $\overline{X}_2 = 1$, do tải trọng q sinh ra. Các biểu đồ ấy được lần lượt giới thiệu ở các hình 14.13c;14.13d;14.13e.

Với các biểu đồ này ta dễ dàng tính được các hệ số trên:



Hình 14.13: a- Hệ cơ bản; b-Hệ tương đương; c , d, e- các biểu đồ mô men để tính các hệ số δ_{ni}

$$\delta_{22} = \overline{M}_2 \times \overline{M}_2 = \frac{1}{EJ_x}\left(\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\frac{2}{3}1 + 1\cdot 1\cdot 1\right) = \frac{4}{3}\frac{1^3}{EJ_x}$$

$$\delta_{11} = \overline{M}_1 \times \overline{M}_1 = \frac{1}{EJ_x} = = \frac{1^3}{EJ_x}\times\frac{1}{2}\cdot 1\times 1\cdot\frac{2}{3}1 = \frac{1^3}{3EJ_x}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \overline{M}_1 \times \overline{M}_2 = \frac{1^3}{EJ_x}\times\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = \frac{1^3}{2EJ_x}$$

$$\Delta_{1P} = \overline{M}_1 M_P = \frac{-1}{EJ_x} = \frac{1^3}{EJ_x}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{ql^2}{2}\cdot 1\cdot\frac{3}{4}\cdot 1 = \frac{-ql^4}{8EJ_x}$$

$$\Delta_{2P} = \overline{M}_2 M_P = \frac{-1}{EJ_x} = \frac{1^3}{EJ_x}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{ql^2}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{-ql^4}{6EJ_x}$$

Đưa các hệ số này vào hệ phương trình (14-13), ta được:

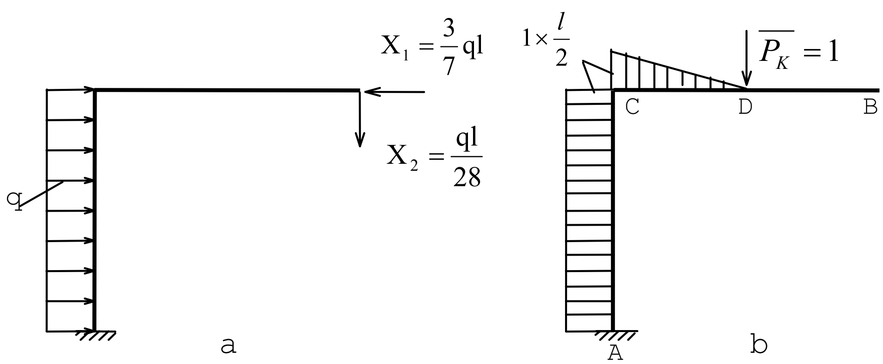
$$\left.\begin{aligned}&\frac{X_1}{3}+\frac{X_2}{2}-\frac{ql}{8}=0\\&\frac{X_1}{2}+\frac{4}{3}X_2-\frac{ql}{6}=0\end{aligned}\right\}\qquad(14\text{-}14)$$

Giải hệ phương trình này ta có :

$$X_1=\frac{3ql}{7};X_2=-\frac{ql}{28}$$

Vì X_2 mang dấu -, nên thực tế hệ tương đương sẽ được biểu diễn lại trên hình14.14a (thay X_2 với chiều ngược lại) và biểu đồ mô men trong hệ siêu tĩnh cũng được vẽ với tải trọng q, X_1 và X_2 (xem hình 14.13 f).

- Tính chuyển vị tại D của hệ siêu tĩnh cũng là tính chuyển vị tại D ở hệ tĩnh



Hình 14.14: a- Hệ tương đương thực tế
b- Biểu đồ trạng thái "k" để tính chuyển vị tại D

định khi đã giải được X_1 và X_2. Như vậy chúng ta xem $M_{tổng}$ là biểu đồ nội lực của trạng thái "m". Bây giờ chúng ta thiết lập trạng thái "K" bằng cách trên hệ cơ bản tại D ta tác dụng một lực $\overline{P_k}=1$ theo phương tính chuyển vị là phương thẳng đứng và xây dựng biểu đồ cho trạng thái "K" là $\overline{M}_K$ như trên hình 14.14b. Ta thực hiện việc nhân hai biểu đồ $M_{tổng}$ và $\overline{M}_K$ thì ta có chuyển vị y_D tai D.

Vậy: $y_D = M_{tổng}\ \overline{M}_K$

Tức là ta thực hiện nhân biểu đồ trên (hình 14.13f và 14.14b). Ta chú ý đến biểu đồ $\overline{M}_K$ (hình 14.14 b) giá trị mô men chỉ có từ ACD, còn đoạn DB mô men bằng không và trong đoạn CD trên hình 14.13f biểu đồ là hình thang. Để dễ làm phép nhân Vêrêsaghin, ta chia hình thang này làm thành hai hình: hình (1) là hình tam giác, hình (2) là hình chữ nhật (xem hình 14.13f). Cũng tương tự ở đoạn AC của $M_{tổng}$ (xem hình 14.13f) là một đường cong bậc 2, để tính diện tích của nó ta chia ra làm hai hình (3) và (4). Như vậy để có y_D ta nhân diện tích 4 hình đó với tung độ ở biểu đồ $\overline{M}_K$ (hình 14.14b) ứng với trọng tâm 4 hình đã chia.

Vậy :

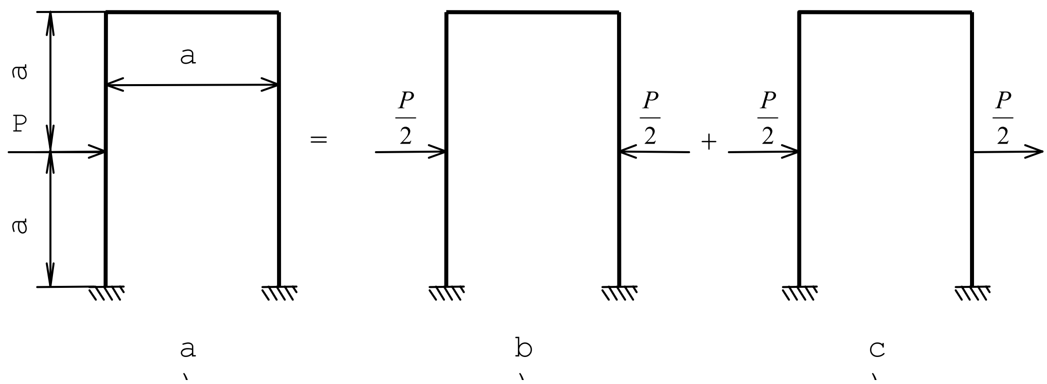
$$y_D=\frac{1}{EJ_x}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{ql^2}{28}-\frac{1}{2}\frac{ql^2}{28}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\frac{1}{2}+\frac{ql^2}{56}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{28}ql^2\cdot1\cdot\frac{1}{2}+\frac{ql^2}{28}\cdot1\cdot\frac{1}{2}\right]$$

$$y_D=\frac{15l^4}{448EJ}$$

Tóm lại khi thực hiện nhân biểu đồ Vêrêsaghin giữa hai biểu đồ nào đó thì để dễ xác định diện tích và tung độ tương ứng ta nên chia các biểu đồ ra thành những hình đơn giản như tam giác, hình vuông , hình chữ nhật, hình tròn, những đường cong đã biết được diện tích và vị trí trọng tâm của nó.

Ví dụ 7: Vẽ biểu đồ mô men nội lực đối với khung chịu lực như hình vẽ 14.15a. Cho P=12kN, a=60cm, E J=2.10^{7}kNcm^{2}.

Bài giải : Hệ siêu tĩnh đã cho là một hệ siêu tĩnh bất kì, ta có thể xem tương đương với hai hệ chịu tải trọng đối xứng (hình14.15b) cộng với hệ phản đối xứng (hình 14.15c).Vậy việc giải hệ phương trình 14.15a tức là giải hai hệ 14.15b và 14.15c.Vệc giải này đơn giản hơn nhiều vì ta sử dụng được các tính chất ở phần trên đã nói.



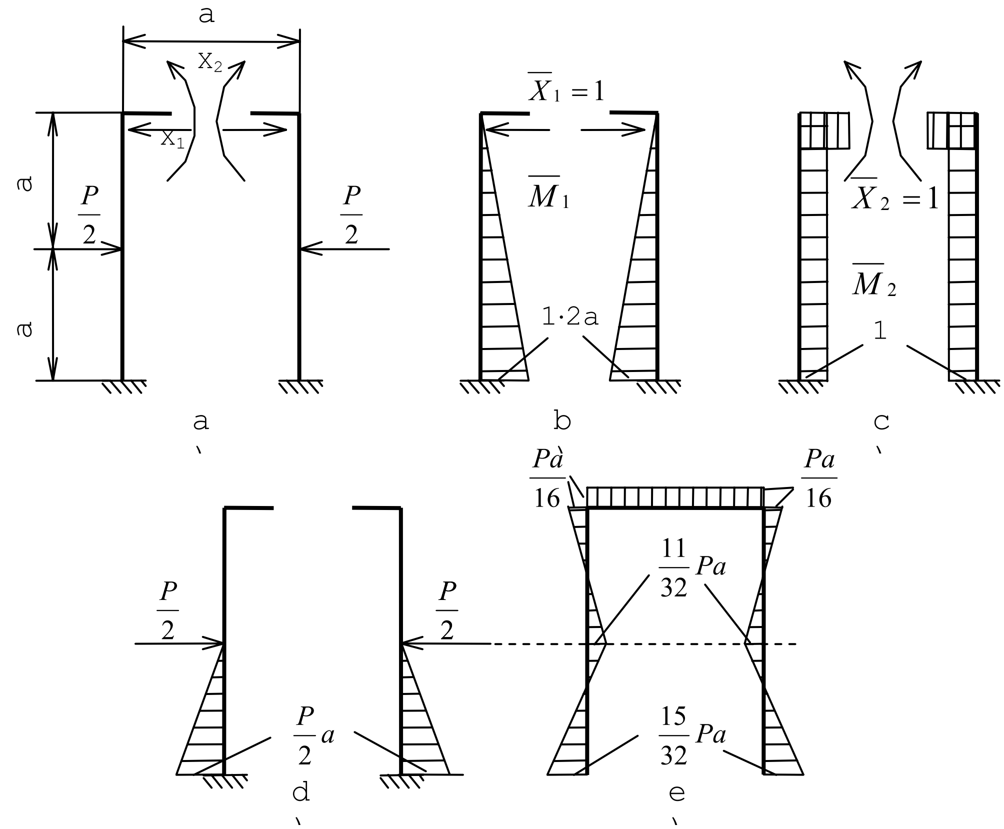
Hình 14.15: Vẽ biểu đồ nội lực đối với hệ siêu tĩnh a), b), c hệ tương đương với hệ a)

1.Ta giải hệ siêu tĩnh đối xứng và chịu tải trọng đối xứng P/2. Khi chọn hệ cơ bản và xây dựng hệ tương đương như trên hình 14.16a, thì thành phần lực cắt tại mặt đối xứng không còn (theo tính chất đã biết).Vậy trên hệ tương đương chỉ còn X_1, X_2 đối xứng.

Từ đó ta có thể viết hệ phương trình chính tắc như sau:

$$\left.\begin{aligned}\delta_{11}\cdot X_1+\delta_{12}\cdot X_2+\Delta_{1P}&=0\\ \delta_{21}\cdot X_1+\delta_{22}\cdot X_2+\Delta_{2P}&=0\end{aligned}\right\}\qquad(14\text{-}15)$$

Để giải hệ phương trình này, ta tính các hệ số nhờ các biểu đồ $\overline{X}_1 = 1$; $\overline{X}_2 = 2$ trên hình 14.16b, c, d.



Hình 14.16: Sơ đồ để tính các hệ số δ_{in} và Δ_{iP} cho hệ đối xứng chịu tải trọng đối xứng của hình 12.15b

$$\delta_{11} = \overline{M}_1\overline{M}_1 = \frac{1}{EJ_x}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a\cdot\frac{2}{3}\cdot 2a = \frac{16}{3}\frac{a^3}{EJ_x}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \overline{M}_1\overline{M}_2 = \frac{1}{EJ_x}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a\cdot 1 = \frac{4a^2}{EJ_x}$$

$$\delta_{22} = \overline{M}_2\overline{M}_2 = \frac{1}{EJ_x}\cdot 2\left(1\cdot\frac{a}{2}\cdot 1 + 1\cdot 2a\cdot 1\right) = \frac{5a}{EJ_x}$$

$$\Delta_{1P} = \frac{-1}{EJ_x}2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{P}{2}a\cdot a\frac{5}{6}\cdot 2a = -\frac{5}{6EJ_x}Pa^3$$

$$\Delta_{2P} = \frac{-1}{EJ_x}2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{P}{2}a\cdot a\cdot 1 = -\frac{Pa^2}{2EJ_x}$$

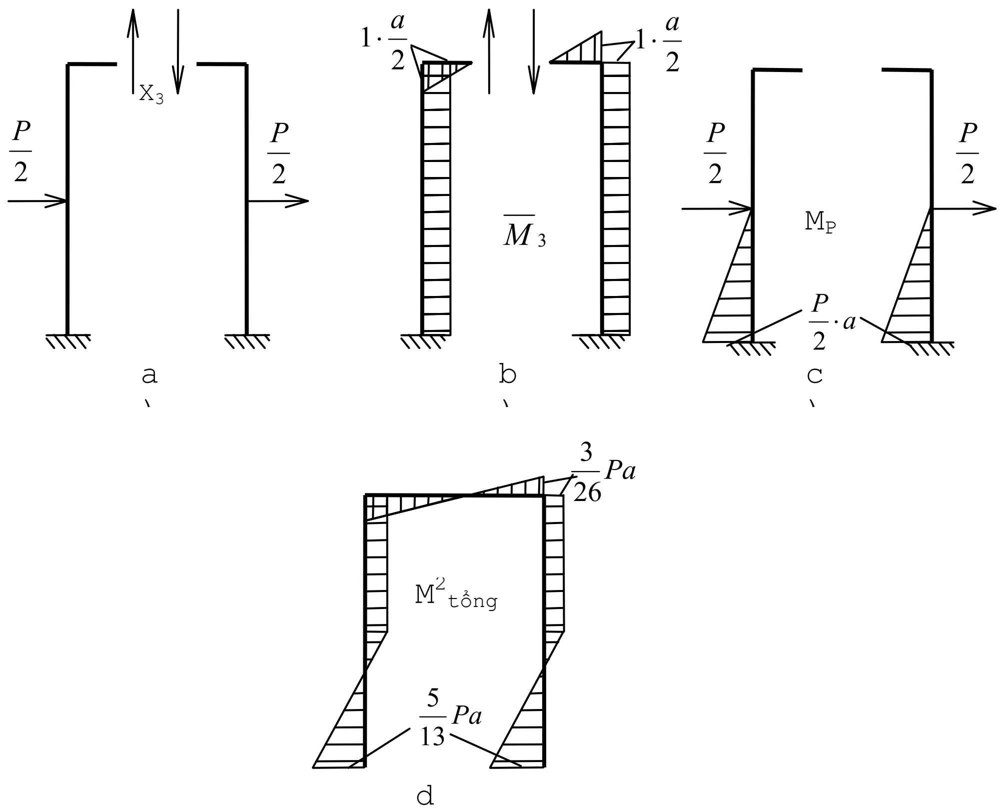
Thay các hệ sô này vào hệ (14-15) và giải nó, ta được:

$$X_1 = +\frac{13P}{64}\ ,\quad X_2 = -\frac{Pa}{16}$$

Khi có được X_1 và X_2 chúng ta dựng được biểu đồ mô men tổng như trên hình 14.16e

2. Bây giờ ta tiếp tục giải hệ siêu tĩnh đối xứng, chịu tải trọng phản đối xứng biểu diễn ở hình 14.15c.

Cũng tương tự như trên, trước hết ta chọn hệ cơ bản là cắt ở một mặt đối xứng thì các thành phần đối xứng của nó bằng 0, chỉ có lực cắt X_3 phản đối xứng khác không và ta có được hệ tương đương như trên hình 14.17a



Hình 14.17: Sơ đồ để tính các hệ số δ_{in} và Δ_{iP} cho hệ đối xứng chịu tải trọng phản đối xứng của hình 14.15c

Trên cơ sở hệ này chỉ có một phương trình chính tắc là:

$$\delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0 \qquad (14\text{-}16)$$

Để giải phương trình này, ta tính δ_{33} thông qua biểu đồ mô men do $\overline{X}_3 = 1$ gây ra (trên hình 14.17b) và Δ_{3P} là sự nhân biểu đồ $\overline{M}_3$ và M_P (trên hình 14.17c).

Vậy:

$$\delta_{33} = (\overline{M}_3)(\overline{M}_3) = \frac{2}{EJ_x}\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}\times\frac{2}{3}\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\times 2a\times\frac{a}{2}\right) = \frac{13a^3}{12EJ_x}$$

$$\Delta_{3P} = \overline{M}_2 M_P = -\frac{2}{EJ_x}\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{P}{2}a\times\frac{a}{2} = -\frac{Pa^3}{4EJ_x}$$

Thay các hệ số đó vào (14-16) và giải, ta có:

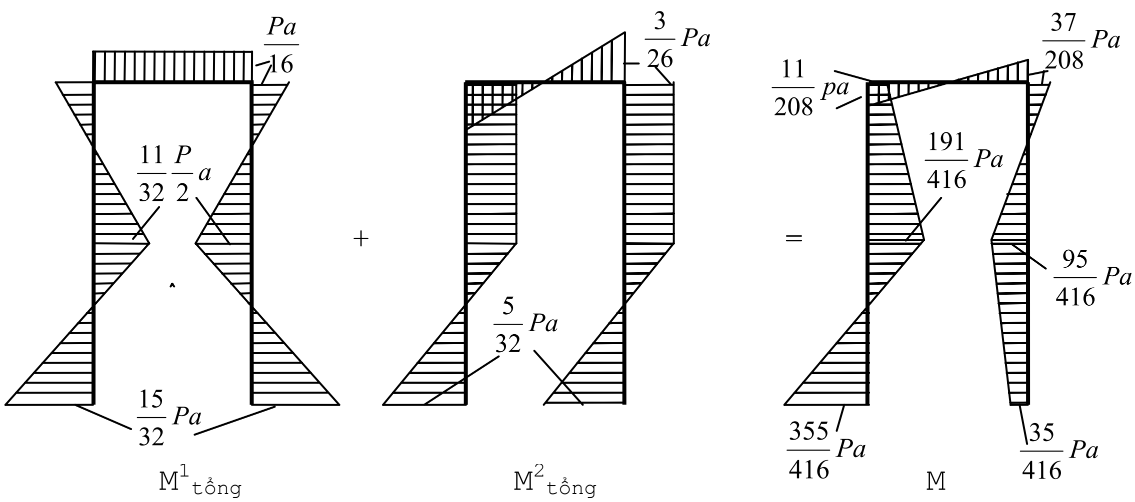
$$\frac{13}{12}\frac{a^3}{EJ_x}\cdot X_3 - \frac{Pa^3}{4EJ_x} = 0$$

Vậy :
$$X_3 = \frac{3P}{13}$$

Cũng làm như trên, nhân biểu đồ $\overline{M}_3$ với giá trị X_3 rồi cộng với M_P ta sẽ được $M_{tổng}$ của hệ siêu tĩnh này như trên hình 14.17d.

3.Cuối cùng để có biểu đồ mô men trong hệ siêu tĩnh đã cho (hình 14.15a), ta lại phải thực hiện phép cộng của hai biểu đồ mô men tổng của hệ đối xứng, tải trọng đối xứng $M^1_{tổng}$ (trên hình 14.16c) và $M^2_{tổng}$ ở hệ đối xứng, tải trọng phản đối xứng (hình 14.17d).

Trên hình 14.18, ta vẽ lại hai biểu đồ $M^1_{tổng}$ và $M^2_{tổng}$ (xem hình 14.18a,b), sau đó ta cộng các giá trị lại, ta được biểu đồ mô men M (xem hình 14.18c) trong hệ siêu tĩnh đã cho ban đầu .



a b c

Hình 14.18: Biểu đồ mô men

a-Biểu đồ mô men tổng của hệ tải trọng đối xứng (xem hình 14.16c).

b-Biểu đồ mô men tổng của hệ tải trọng phản đối xứng (xem hình14.17d).

Chú ý:

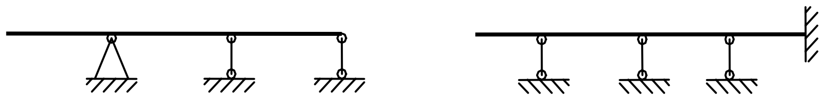
- Trong những ví dụ trên, khi giải các khung siêu tĩnh ta mới chỉ để ý đến thành phần mô men uốn, còn các thành phần lực dọc, mô men xoắn, lực cắt ta chưa tính đến. Nếu có tính đến các đại lượng này thì bài toán dài hơn, nhưng nguyên tắc giải không có gì mới. Mặt khác cũng lưu ý rằng chúng ta mới trình bày bài toán phẳng, nếu mở rộng cho các bài toán không gian thì cách giải cũng tương tự như vậy.

- Khi sử dụng tính chất đối xứng của hệ thì ta sẽ có các hệ phương trình chính tắc có số phương trình ít hơn và dĩ nhiên dễ giải hơn khi không lợi dụng tính chất này.

14.5.TÍNH DẦM LIÊN TỤC.

Tính toán dầm liên tục thực chất là giải bài toán siêu tĩnh với đặc tính là dầm thẳng, đặt trên nhiều gối tựa (hình 14.19). Các đầu mút của dầm có thể là tự do, có thể đặt trên gối tựa (hình 14.19a), cũng có thể là ngàm (hình 14.19b).

Để tiện tính toán, các gối tựa của dầm được đánh số từ trái sang phải theo thứ tự 0,1, 2,...i...n. Gọi l_1, l_2,...l_n là các chiều dài các nhịp và cũng được tính từ trái sang phải. Như vậy chỉ số của chiều dài tại mỗi nhịp trùng với chỉ số của gối tựa bên phải của nhịp.

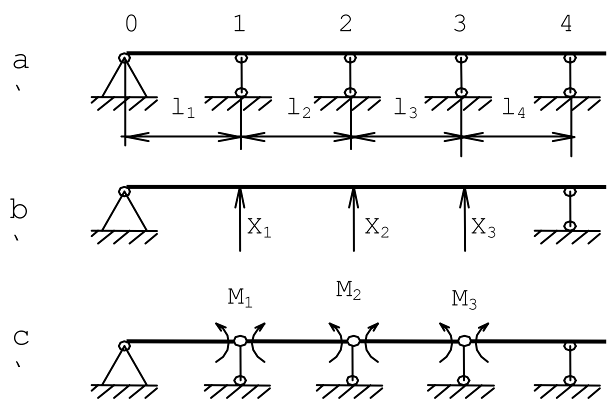


a b

Hình 14.19: Dầm liên tục.
a-Dầm có đầu mút tự do; b-Dầm có đầu mút bị ngàm

Để tổng quát hoá bài toán, ta giả thiết mô men quán tính trong từng nhịp không đổi còn giữa các nhịp sẽ khác nhau.

Chúng ta hãy xét một dầm liên tục như trên hình vẽ 14.20a. Hệ cơ bản của dầm có thể chọn bằng cách bỏ các gối tựa trung gian và thay vào đó những phản lực X_1, X_2, X_i (hình 14.20b).



Hình 14.20
a-Dầm liên tục; b và c- Hệ cơ bản của dầm

Cách chọn hệ cơ bản này không có lợi lắm, vì khi xác định các hệ số chính và phụ trong hệ phương trình chính tắc ta phải vẽ các biểu đồ mô men sinh ra do các lực $\overline{X}_1 = 1, \overline{X}_2 = 1, ... \overline{X}_i = 1$ và chắc chắn các biểu đồ này có suốt chiều dài của dầm. Cho nên việc thực hiện cách nhân biểu đồ Vêrêsaghin có khó khăn.

Vì lý do đó chúng ta hãy chọn lại hệ cơ bản khác bằng cách thay những gối tựa trung gian bằng những khớp (xem hình 14.20c). Dĩ nhiên ở đây phải thay vào những mô men M_1, M_2, M_i ... chống lại sự quay do các khớp sinh ra để hệ có thể làm việc tương đương.

Đối với hệ cơ bản này ta thấy việc tính toán các hệ số đơn giản hơn. Và rõ ràng mỗi mô men nội lực M_1, M_2, M_i chỉ ảnh hưởng đến hai nhịp lân cận nó mà thôi. Nên các biểu đồ sinh ra do $\overline{M}_1 = 1, \overline{M}_2 = 1, ...\overline{M}_n = 1$ cũng chỉ có ở hai nhịp lân cận chúng.

Đây cũng chính là điểm khác cách giải chung cho một hệ siêu tĩnh thông thường.

Để giải dầm liên tục chúng ta hãy xét điều kiện cụ thể tương đương tại gối tựa thứ i (hình 14.21a). Rõ ràng điều kiện tương đương là góc xoay tương đối của hai mặt cắt tại i (bên trái và bên phải) phải bằng không. Phương trình chính tắc thứ i có dạng:

$$\delta_{i(i-1)} M_{i-1} + \delta_{ii} M_i + \delta_{i(i+1)} M_{i+1} + \Delta_{ip} + \Delta_{it} + \Delta_{i\Delta} = 0$$

(14-17)

Trong đó:

- Δ_{ip}, Δ_{it}, $\Delta_{i\Delta}$: là góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt ngang ở hai gối tựa thứ i, do tải trọng, nhiệt độ thay đổi và độ lún không đều gây ra trong hệ cơ bản. Thường ta ít gặp các đại lượng Δ_{it} và $\Delta_{i\Delta}$.

- $\delta_{i(i-1)}$,δ_{ii} , $\delta_{i(i+1)}$: là góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt thứ i do các mô men đơn vị:

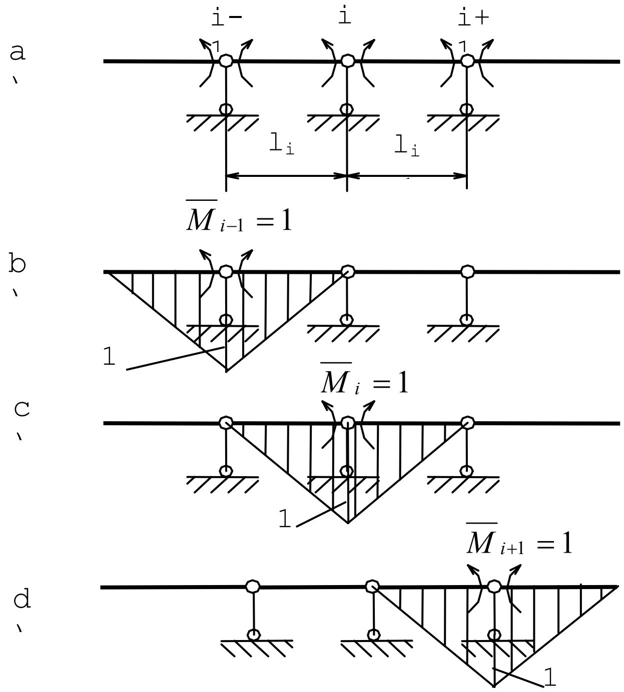
$$\overline{M}_{i(i-1)}=1, \overline{M}_{ii}=1,$$

$$..., \overline{M}_{i(i+1)}=1$$

gây ra .

Trên hình 14.21 b, c, d biểu diễn các biểu đồ mô men đơn vị $\overline{M}_{i-1}=1$ $\overline{M}_{i}=1$ và $\overline{M}_{i+1}=1$ (quanh gối tựa i) .

Căn cứ vào biểu đồ này ta tính được các hệ số $\delta_{i(i-1)}$, δ_{ii} , $\delta_{i(i+1)}$ theo phương pháp nhân biểu đồ Vêrêsaghin :



Hình 14.21: Phương pháp giải dầm liên tục
a- Xét gối tựa tương đương thứ i
b, c, d- Mô men đơn vị thứ

$$\delta_{i(i-1)}=\overline{M}_i\overline{M}_{i-1}=\frac{1}{EJ_i}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot l_i\cdot\frac{1}{3}\cdot1=\frac{l_i}{6EJ_i}$$

$$\delta_{ii}=\overline{M}_i\overline{M}_i=\frac{1}{EJ_i}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot l_i\cdot\frac{2}{3}\cdot1+\frac{1}{EJ_{i+1}}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot l_{(i+1)}\cdot\frac{2}{3}\cdot1=\frac{l_i}{3EJ_i}+\frac{l_{(i+1)}}{3EJ_{(i+1)}}$$

$$\delta_{i(i+1)}=\overline{M_i}\overline{M_{i+1}}=\frac{1}{EJ_{i+1}}\cdot\frac{1}{2}\cdot l_{(i+1)}\cdot1\cdot\frac{1}{3}\cdot1=\frac{l_{(i+1)}}{6EJ_{i+1}}$$

Đưa các hệ số vừa tính vào (14-17), ta được:

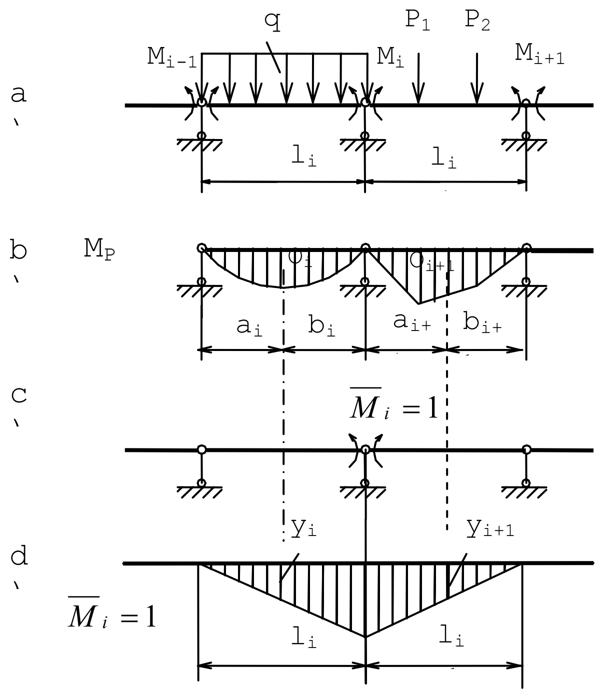
$$\frac{l_i}{6EJ_i}M_{(i-1)}+\left(\frac{l_i}{3EJ_i}+\frac{l_{(i+1)}}{3EJ_{(i+1)}}\right)M_i+\frac{l_{(i+1)}}{6EJ_{(i+1)}}M_{(i+1)}=-(\Delta_{iP}+\Delta_{it}+\Delta_{i\Delta}) \qquad (14\text{-}18)$$

Phương trình chính tắc (14-18) gọi là phương trình ba mô men vì nó biểu thị sự liên hệ giữa các mô men chưa biết tại 3 gối tựa liền nhau i-1, i và i+1. Rõ ràng có bao nhiêu gối tựa trung gian thì sẽ có bấy nhiêu phương trình 3 mô men. Các phương trình này lập nên một hệ gọi là hệ phương trình ba mô men. Giải hệ phương trình đó ta sẽ tìm được tất cả các mô men uốn nội lực tại gối tựa (mô men này gọi là mô men tựa).

Bây giờ trong phương trình (14.18) cần phải xác định Δ_{ip}, Δ_{it}, $\Delta_{i\Delta}$ thì mới giải được.

Dưới đây chúng ta hãy tính Δ_{ip} trong từng nhịp i và i+1 chịu tác dụng của tải trọng như trên hình vẽ 14.22a.

Chúng ta giả sử tại các nhịp l_i và l_{i+1} chịu tải trọng bên ngoài như trên hình 14.22a và nhiệt độ không gây ra sự khác biệt về góc xoay tại gốc i, cũng như độ lún không gây ra góc xoay tương đối ở hai mặt cắt trái, phải ở gối tựa thư i.Và như vậy ta chỉ cần tính Δ_{iP} Căn cứ vào sơ đồ tải trọng ở hình 14.22a, với hệ này ta tiến hành vẽ biểu đồ mô men do tải trọng gây ra ở nhịp thứ i và thứ i+1. Việc vẽ biểu đồ mô men do tải trọng gây ra ở hai nhịp này là rất đơn giản, vì với cách chọn hệ cơ bản đã nói, thì xem ở nhịp i là một đoạn dầm đơn giản đặt trên hai gối tựa chịu tác dụng của các lực phân bố. Tương tự như vậy ở nhịp i+1 cũng là một đoạn dầm đặt trên hai gối tựa chịu tác dụng của P_1 và P_2 và ta có được các biểu đồ đó (như trên hình vẽ14.22b). Để dễ tính toán, chúng ta vẽ lại biểu đồ mô men uốn do $\overline{M}_i = 1$ tại gối thứ i (xem hình 14.22c, d).



Hình 14.22: Sơ đồ tính góc xoay tương đối Δ_{iP} do tải trọng gây ra.

Để có Δ_{iP} ta thực hiện phép nhân biểu đồ M_P (hình 14.22b) và $\overline{M}_i = 1$ (hình14.22d). Giả sử trọng tâm của biểu đồ M_P ở nhịp l_i là tại O_i và trọng tâm của biểu đồ M_P ở nhịp l_{i+1} là O_{i+1}.

Ứng với các trọng tâm này ở biểu đồ $\overline{M}_i = 1$ (hình 14.22d) có các tung độ là y_i và y_{i+1}, thì kết quả sẽ là:

$$\Delta_{ip} = \frac{1}{EJ_i}\Omega_i \cdot y_i + \frac{1}{EJ_{i+1}}\Omega_{i+1} \cdot y$$

Trong đó:

- Ω_i và Ω_{i+1}: là diện tích biểu đồ mô men uốn do tải trọng sinh ra trong hệ cơ bản tại nhịp thứ i và i+1.

- y_i , y_{i+1}: là tung độ của biểu đồ mô men gây ra do $\overline{M}_i = 1$ tại nhịp i và i+1 tương ứng với trọng tâm O_i và O_{i+1} trên biểu đồ mô men do tải trọng sinh ra.

Dễ dàng thấy rằng :

$$y_i = \frac{a_i}{l_i}; \quad y_{i+1} = \frac{b_{i+1}}{l_{i+1}}$$

Do đó:

$$\Delta_{iP} = \frac{1}{EJ_i}\Omega_i \cdot \frac{a_i}{l_i} + \frac{1}{EJ_{i+1}}\Omega_{i+1} \cdot \frac{b_{i+1}}{l_{i+1}}$$

Thay Δ_{iP} vào trong phương trình (14-18) và cho $\Delta_{it} = \Delta_{i\Delta} = 0$ (không xét như đã nói ở trên), ta có:

$$\frac{1}{6EJ_i}M_{i-1} + \left(\frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}}\right)M_i + \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}}M_{i+1} = \left(\frac{1}{EJ_i}\Omega_i \frac{a_i}{l_i} + \frac{1}{EJ_{i+1}}\Omega_{i+1} \cdot \frac{b_{i+1}}{l_{i+1}}\right) \qquad (14\text{-}19)$$

Nếu dầm có độ cứng không đổi thì phương tình này có dạng đơn giản hơn:

$$l_i \cdot \overline{M}_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1})\overline{M}_i + l_{i+1} \cdot \overline{M}_{i+1} = -6\left(\frac{\Omega_i \cdot a_i}{l_i} + \frac{\Omega_{i+1} \cdot b_{i+1}}{l_{i+1}}\right)$$

(12 (14-20)

Giải hệ phương trình (14-20) của các gối trung gian dầm liên tục, ta xác định được các M_1, M_2 ..... M_i...... M_{n-1} và có thể xem mỗi đoạn dầm là một dầm riêng biệt và vẽ các biểu đồ nội lực của chúng. Sau đó sử dụng các nguyên lý cộng tác dụng để tìm các biểu đồ nội lực của toàn dầm.

Thật vậy, theo nguyên lý cộng tác dụng ta sẽ có biểu thức mô men tại mặt cắt ngang bất kỳ có hoành độ z sẽ là tổng giá trị mô men do tải trọng M_P, M_{i-1}và M_i.

Như vậy:

$$M(z) = M_P(z) + M_{i-1}\cdot\frac{(l_i - z)}{l_i} + M_i\cdot\frac{z}{l_i}$$

$$= M_P(z) + M_{i-1} - \frac{M_{i-1}\cdot z}{l_i} + \frac{M_i\cdot z}{l_i} \qquad (14\text{-}21)$$

Trong đó: $M_P(z)$- là mô men uốn tại mặt cắt z do riêng tải trọng gây ra trong đoạn dầm đơn giản thứ l_i, (z lấy gốc từ gối i-1).

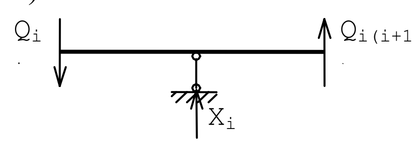
Muốn có biểu thức lực cắt ta lấy đạo hàm lần thứ 1

$$Q(z) = \frac{dM(z)}{dz} = Q_P(z) + \frac{M_i - M_{i+1}}{li} \qquad (14\text{-}22)$$

Muốn tìm phản lực tại gối tựa thứ i, ta xét sự cân bằng của đoạn dầm quanh gối thứ i. Tương tự cắt quanh gối i một đoạn, (xem hình 14.23):

$$X_i = Q_{i(i+1)} - Q_{ii}$$

Trong đó Q_{ii} là lực cắt nằm bên trái gối i và $Q_{i(i+1)}$ là lực cắt nằm bên phải gối i.



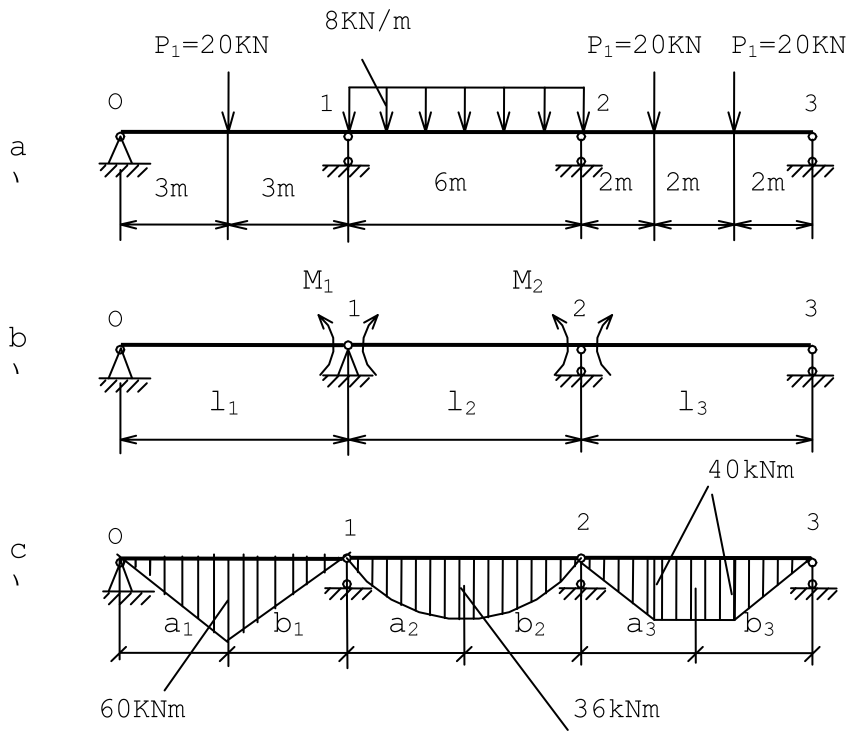
Hình 14.23: Tính phản lực X_i ở gối tựa thứ i

Ví du 8: Cho một dầm liên tục như trên hình vẽ 14.24. Hãy vẽ biểu đồ nội lực và xác định các phản lực tại gối tựa.

Bài giải: Dầm có hai bậc siêu tĩnh, ẩn số là các mô men tựa số 1 và số 2 là M_1 và M_2 (xem hình 14.24b) và hệ phương trình 3 mô men cũng sẽ được viết đối với 2 gối tựa đó là :

$$\left.\begin{aligned} l_1M_O + 2(l_1 + l_2)M_1 + l_2M_2 &= -6\left(\frac{\Omega_1\cdot a_1}{l_1} + \frac{\Omega_2\cdot b_2}{l_2}\right) \\ l_2M_1 + 2(l_2 + l_3)M_2 + l_3M_3 &= -6\left(\frac{\Omega_2\cdot a_2}{l_2} + \frac{\Omega_3\cdot b_3}{l_3}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (14\text{-}23)$$

Từ hệ phương trình ba mô men (hình 14.23) ta tiến hành vẽ các biểu đồ mô men do tải trọng sinh ra. Chú ý, do hệ cơ bản đã chọn (hình 14.24b) thì mỗi nhịp l_1, l_2, l_3 là những dầm riêng lẽ, cho nên việc vẽ các biểu đồ mô men do tải trọng sinh ra rất đơn giản (hình 14.24c). Ta lần lượt tính các đại lượng của hai phương trình ba mô men trong (14-23):



Hình 14.24:Vẽ biểu đồ nội lực và xác định các phản lực ở gối tựa của một dầm liên tục chịu tải trọng tác dung như hình a

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \times 60 \times 6 = 180\text{kNm}^2$$

$$a_1 = \frac{l_1}{2} = \frac{6}{2} = 3\text{m}$$

Nên :
$$\frac{\Omega_1 a_1}{l_1} = 90\text{kNm}^2$$

$$\Omega_2 = \frac{2}{3} \times 36 \times 6 = 144\text{kNm}^2$$

$$b_2 = \frac{l_2}{2} - = 3\text{m}$$

$$\frac{\Omega_2 a_2}{l_2} = 72\text{kNm}^2$$

Vì :
$$a_2 = b_2 \rightarrow \frac{\Omega_2 a_2}{l_2} = \frac{\Omega_2 b_2}{l_2} = 72\text{kNm}^2$$

$$\Omega_3 = \frac{2+6}{2} \cdot 40 = 160\text{kNm}^2 \quad \text{(Diện tích hình thang)}$$

$$b_3 = \frac{l_3}{2} = \frac{6}{2} = 3\text{m}$$

$$\frac{\Omega_3 b_3}{l_3} = 80\text{kNm}^2$$

Ở hai đầu dầm không có mô men tập trung nên M_O=M_3=0 và chú ý trong hệ này, theo đề bài cho thì l_1=6m, l_2=6m, l_3=6m .

Thay tất cả giá trị vào ta có:

$$\left.\begin{aligned} 6M_1 + M_2 &= -162 \\ M_1 + M_2 &= -152 \end{aligned}\right\} \qquad (14\text{-}24)$$

Giải hệ phương trình ta có:

M_1 = - 33,1 kNm ; M_2 = - 29,3 kNm ; P_2=20kN P_3=20kN

Để vẽ biểu đồ mô men ta dùng biểu thức tính M (z) ở trên tính cho một số mặt cắt đặc biệt :

Nhịp 1: Ở mặt cắt giữa nhịp một z =l/2

$$M(l/2) = M_P\left(\frac{l_1}{2}\right) + M_0 + \frac{M_1 - M_0}{l_1} \times \frac{l_1}{2}$$

$$= 60 + 0 - \frac{33,1}{2} = 43,5\text{kNm}$$

Nhịp 2. [illegible]

$$M\left(\frac{l_2}{2}\right) = M_P\frac{l_2}{2} + M_1 + \frac{M_2 - M_1}{l_2} \cdot \frac{l_2}{2} = 36 - 33,1 + \frac{-29,3 + 33,1}{2} = 4,5\text{kNm}$$

Nhịp 3: Mặt cắt ở l/3 nhịp 3:

$$M\left(\frac{l_3}{3}\right) = M_P\frac{l_3}{3} + M_2 + \frac{M_3 - M_2}{l_3} \cdot \frac{l_3}{3} = 40 - 29,3 + \frac{29,3}{3} = 20,4\text{kNm}$$

$$M\left(\frac{2}{3}l_3\right) = M_P\left(\frac{2}{3}l_3\right) + M_2 + \frac{M_3 - M_2}{l_3} \cdot \frac{2}{3}l_3 = 40 - 29,3 - \frac{29,3}{3} \cdot \frac{2}{3} = 30,2\text{kNm}$$

Đ[illegible] trong các [illegible] dùng biểu thức xác định lực cắt (14.22) ở mục trên để xác định các giá trị lực cắt ở những nơi cần thiết và sử dụng các nhận xét về liên hệ vi phân của ngoại lực và nội lực đã biết để vẽ biểu đồ lực cắt Q (hình 14.25c).

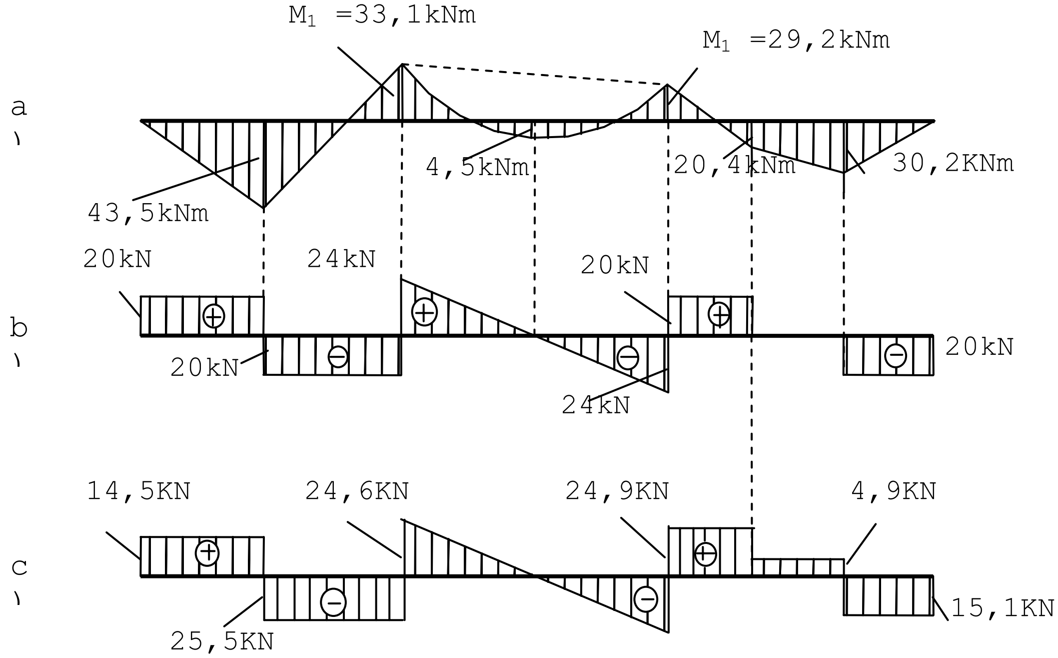
Ở nhịp 1*:* Với z thay đổi từ $0 \div l/2$

$$Q = Q_P + \frac{M_1 - M_0}{l} = 20 - \frac{33,1}{6} = 14,5\text{kN}$$

Với z thay đổi từ $l_1/2 \div l_1$

$$Q = -20 - \frac{33,1}{6} = -25,5\text{kN}$$

Ở nhịp 2: Với z thay đổi từ $0 \div l_2$



Hình 14.25

a-Biểu đồ mô men tĩnh tổng cộng của dầm siêu tĩnh (xem hình 14.24a).

b-Biểu đồ lực cắt khi dâm đơn giản.

c- Biểu đồ lực cắt của dầm khi tính lực cắt theo (14.22)

$$Q = Q_P + \frac{M_2 - M_1}{2}$$

Khi z=0

$$Q = 24 + \frac{-29{,}3 + 33{,}1}{6} = 24{,}6kN$$

Khi z=l_2

$$Q = 24 + \frac{-29{,}3 + 30{,}2}{6} = 23{,}4kN$$

Ở nhịp 3:

$$Q = Q_P + \frac{M_3 - M_2}{6}$$

Với $z = 0 \rightarrow \frac{l_3}{3}$

$$Q = 20 + \frac{29{,}3}{6} = 24{,}9kN$$

Với $\frac{l_3}{3} \rightarrow \frac{2}{3} l_3$

$$Q = 0 + \frac{29{,}3}{6} = 4{,}9kN$$

Với $\frac{2}{3}l_3 \rightarrow l_3$

$$Q = -20 + \frac{29,3}{6} = -15,1kN$$

Nguyên tắc giải các dầm liên tục khi có sự thay đổi của nhiệt độ hoặc có độ lún cũng tương tự chỉ cộng thêm biến dạng do nhiệt độ và do độ lún sinh ra ở các phương trình ba mômen.

CÂU HỎI TỰ HỌC:

14.1. Thế nào là hệ siêu tĩnh, bậc siêu tĩnh ?
14.2. Hệ cơ bản là gì ? Có phải mỗi hệ siêu tĩnh chỉ có một hệ cơ bản không ?
14.3. Hệ tương đương ?
14.4. Thiết lập hệ phương trình chính tắc? Tại sao gọi là phương pháp lực ?
14.5 .Cách xác định các hệ số trong phương trình chính tắc và cách giải nó ?
14.6. Khi đã giải được các lực liên kết thì làm sao vẽ được biểu đồ mô men nội lực ?
14.7. Lợi dụng tính chất đối xứng của hệ và tải trọng đối xứng hoặc phản đối xứng có lợi gì khi giải hệ siêu tĩnh ?
14.8. Dầm liên tục là gì ? Cách giải nó có khác hệ siêu tĩnh không ?
14.9. Phương trình ba mô men có lợi gi ?
14.10. Giải một dầm liên tục có 2 gối tựa thừa.

--- 🗐 ---