

CHUYỂN ĐỘNG KHÔNG ỔN ĐỊNH TRONG LÒNG DẪN HỎ

§XVIII-1. KHÁI NIỆM CHUNG

Chuyển động không ổn định thường gặp trong sông thiên nhiên và nhân tạo : mùa lũ, lấy nước vào cống, âu thuyền, đập, đập bị vỡ, kênh dẫn vào nhà máy thủy điện, sông chịu ảnh hưởng của thủy triều.

Các yếu tố thủy lực ở một điểm là v , Q , h , p , v.v... thay đổi theo thời gian.

Ta phân biệt :

+ Thay đổi chậm, gặp trong các trường hợp : truyền đỉnh lũ, kênh dẫn của trạm thủy điện điều tiết ngày, sông có ảnh hưởng của thủy triều. Lúc đó đường mặt nước có dạng sóng - $\lambda \gg a$.

+ Thay đổi gấp : tại một khoảng cách ngắn độ sâu thay đổi rõ rệt - Q , J thay đổi nhiều tại một vị trí thẳng góc với mặt cắt.

+ Chuyển động không ổn định cũng có thể gọi là chuyển động sóng ; phân biệt : sóng liên tục (chậm), sóng gián đoạn (gấp). Khác với sóng biển là không tải lưu lượng mà sóng biển dao động tại chỗ.

Có thể phân loại như sau :

+ Sóng một chiều - tạo nên sự dao động thuần túy mực nước ;

+ Sóng thuận - sóng di chuyển theo chiều dòng chảy ;

+ Sóng nghịch - sóng truyền ngược chiều dòng chảy ;

+ Sóng dương - mực nước dâng cao ;

+ Sóng âm - mực nước hạ thấp ;

+ Sóng phức tạp - sóng tổ hợp các chế độ chảy, sóng được thay đổi liên tục về hướng chuyển động và các thông số cơ bản.

§XVIII-2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CƠ BẢN CỦA CHUYỂN ĐỘNG KHÔNG ỔN ĐỊNH THAY ĐỔI CHẬM

1. Phương trình liên tục :

Ta viết phương trình liên tục cho chuyển động không ổn định của chất lỏng không nén được :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0$$

Phương trình này được chứng minh bằng cách tại 2 mặt cắt đoạn chất lỏng : xét thể tích.

Qua thời đoạn dt thể tích giữa 2 mặt cắt sẽ thay đổi, nếu $Q > Q'$ thì thể tích sẽ tăng lên :

$$\Delta W = (Q - Q')dt$$

Vì đáy lòng dẫn cứng nên mặt nước thay đổi từ ∇ ứng với t đến $t + dt$. Ta sẽ xác định ΔW :

Trong thời đoạn dt một thể tích đi qua mặt cắt đầu là :

$$\Delta W' = Qdt$$

qua mặt cắt cuối là :

$$\Delta W'' = \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial s} \right) dt$$

Vậy :

$$\Delta W = \Delta W' - \Delta W'' = - \frac{\partial Q}{\partial s} ds dt$$

Mặt khác ΔW cũng là thể tích giữa 2 đường mặt nước ứng với t và $t + dt$, tức là :

$$\Delta V = \Delta W.$$

Ta xác định ΔV :

Trong thời đoạn dt diện tích mặt cắt ngang của dòng chảy tăng lên một lượng :

$$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial t} dt$$

Vậy :

$$\Delta V = d\omega \cdot ds = \frac{\partial \omega}{\partial t} dt \cdot ds$$

Do đó :

$$- \frac{\partial Q}{\partial s} ds \cdot dt = \frac{\partial \omega}{\partial t} dt \cdot ds$$

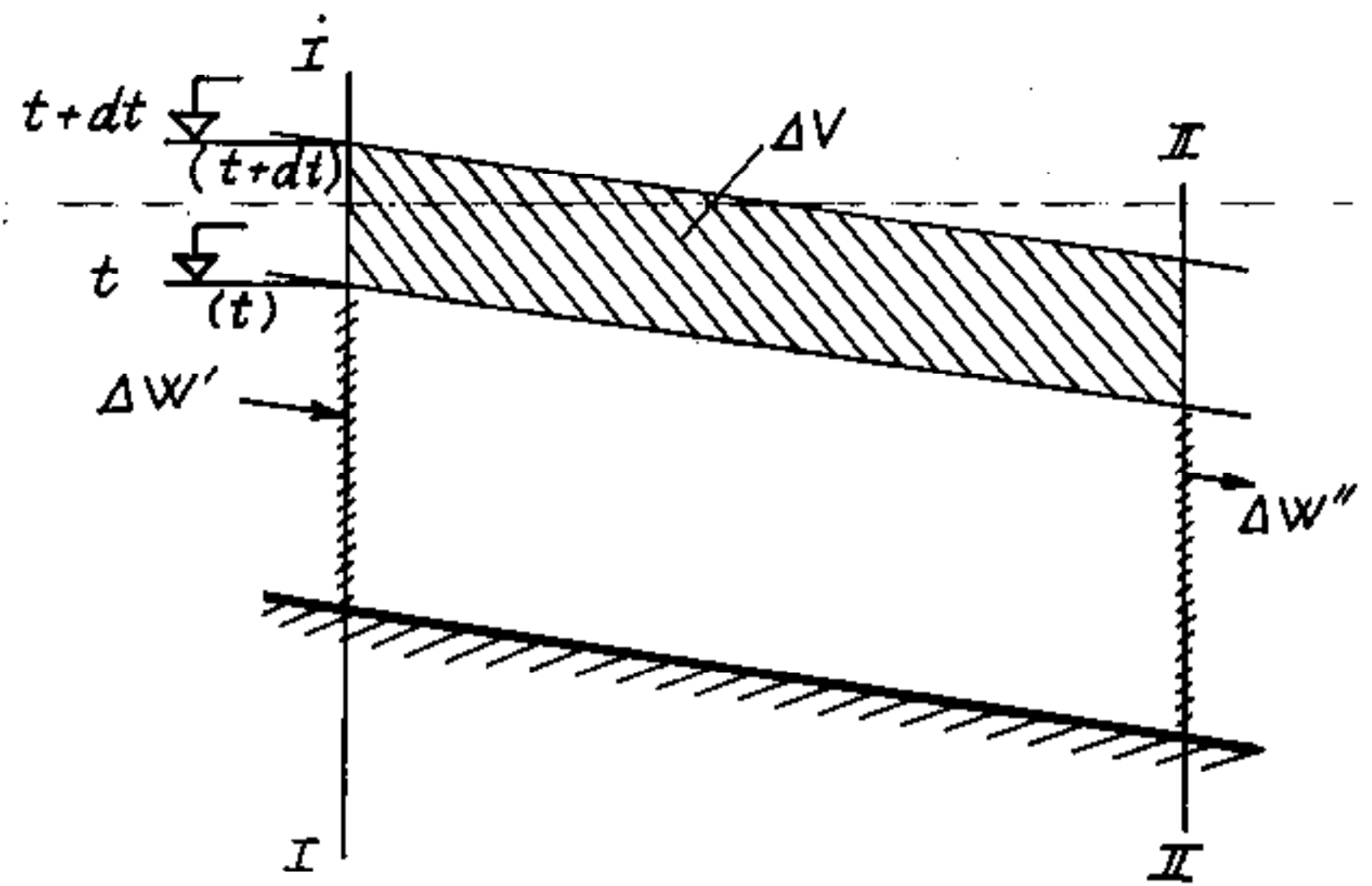
hoặc :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \quad (1)$$

vì $Q = \omega \cdot v$ nên :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(\omega \cdot v)}{\partial s} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = B \frac{\partial z}{\partial t} \quad (3)$$



$$B \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial(\omega \cdot v)}{\partial s} = 0 \quad (4)$$

Đối với lòng dẫn lăng trụ chữ nhật : $\omega = b.h$, ta được :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hv)}{\partial s} = 0 \quad (6)$$

2. Phương trình động lực

a) Cho dòng nguyên tố

Ta xét một dòng nguyên tố trong thời điểm đã định.

Tách trong đoạn đó một đoạn ngắn có chiều dài là ds từ mặt cắt 1-1 đến 2-2. Khối lượng của đoạn đó sẽ là :

$$dm = \rho d\omega \cdot ds \quad (7)$$

Viết cho dm phương trình cân bằng động lực dọc vectơ vận tốc u .

Xét các lực tác dụng :

1 - Áp lực xung quanh thẳng góc với trục $s-s$ sẽ bằng không ;

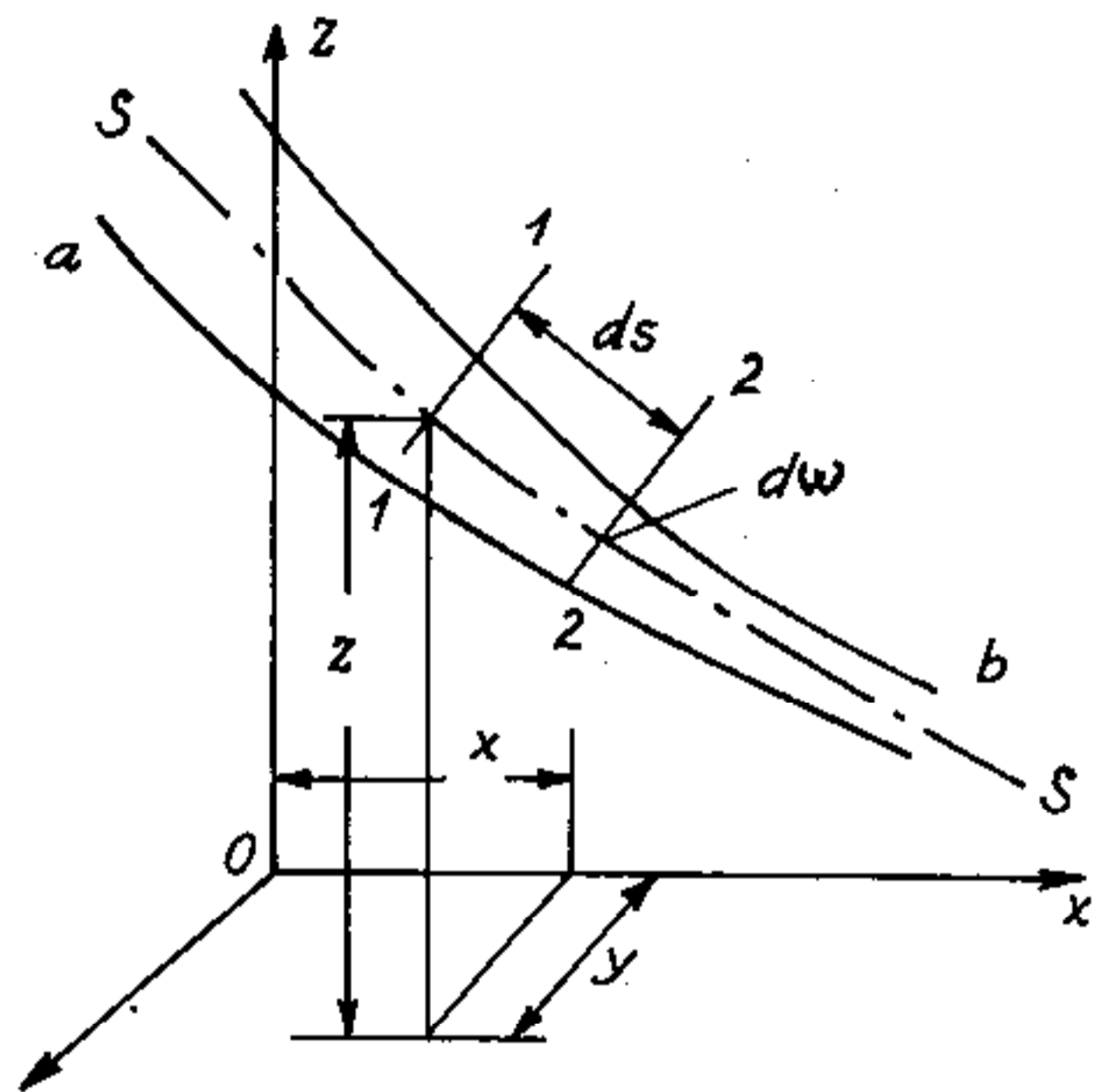
2 - Áp lực lên 2 đầu đoạn ds là dP và dP' , chiếu lên trục $s-s$ sẽ giữ nguyên giá trị, nhưng ngược dấu nhau.

$$dP = p d\omega ; dP' = -p' d\omega$$

- Tổng hợp : $p = f(t, s)$

- Tại 1 thời điểm : $p = f(s)$

$$p' = p + \frac{\partial p}{\partial s} ds$$



Vậy tổng áp lực chiếu lên $s-s$ bằng :

$$\begin{aligned} dP - dP' &= p d\omega - p' d\omega = \\ &= p d\omega - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) d\omega \\ &= -\frac{\partial p}{\partial s} ds \cdot d\omega \end{aligned} \quad (8)$$

3. Trọng lực của dm

$$dG = \gamma d\omega \cdot ds \quad (9)$$

$$\text{Chiếu lên } s-s : dG \cdot \sin \alpha = -\gamma d\omega \cdot dz \quad (10)$$

4 - Lực ma sát :

$$F_s = -\tau d\chi ds \quad (11)$$

Trong đó τ - ứng suất tiếp.

5 - Lực quán tính

$$F_{QT} = m \frac{du}{dt} = \rho d\omega \cdot ds \frac{du}{dt} \quad (12)$$

Ta có $u = f(s, t)$ nên :

$$du = \frac{\partial u}{\partial s} ds + \frac{\partial u}{\partial t} dt \quad (13)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{dt} = \frac{\partial u}{\partial s} u + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (14)$$

$$F_{QT} = \rho d\omega \cdot ds \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right] \quad (15)$$

Viết phương trình cân bằng động lực dạng vi phân dọc theo quỹ đạo chất điểm :

$$-\frac{\partial p}{\partial s} ds d\omega - \gamma d\omega dz - \tau d\chi ds - \rho d\omega ds \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right] = 0 \quad (16)$$

Tính cho một đơn vị khối lượng và đổi dấu :

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{dz}{ds} + \frac{\tau}{\gamma} \frac{d\chi}{d\omega} + \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^2}{2g} \right) = 0 \quad (17)$$

hoặc :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial h_w}{\partial s} = 0 \quad (18)$$

$$\text{vì} \quad \frac{\tau}{\gamma} \frac{d\chi}{d\omega} = dh_w \quad (19)$$

b) Cho dòng chảy

Ở đây các yếu tố mặt cắt là những trị số trung bình nên thay u bằng v , ta được :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial h_w}{\partial s} = 0 \quad (20)$$

vì chuyển động là thay đổi chậm nên :

+ Tổn thất cục bộ bỏ qua và

$$h_w = h_d \quad (21)$$

+ h_d cho chuyển động không ổn định còn ít được nghiên cứu nên vẫn tính theo chuyển động ổn định đều :

$$J = \frac{\partial h_d}{\partial s} = \frac{v^2}{C^2 R} = \frac{Q^2}{K^2} \quad (22)$$

Nếu dòng chảy 2 chiều (sóng - thủy triều) thì J :

$$J = \frac{Q |Q|}{K^2} = \frac{v |v|}{C^2 R} \quad (23)$$

v và Q lấy trị số + nếu chảy theo s-s.

v và Q lấy trị số âm nếu chảy ngược chiều s-s.

Viết lại (18) :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v \cdot |v|}{C^2 R} = 0 \quad (24)$$

Ta có :

$$J = - \frac{\partial z}{\partial s} = i - \frac{\partial h}{\partial s} \quad (25)$$

trong đó z - $\sqrt{\quad}$ của điểm trên mặt thoáng.

Viết lại (24)

$$- \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{v \cdot |v|}{C^2 R} \quad (26)$$

hoặc

$$i - \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{v \cdot |v|}{C^2 R} \quad (27)$$

§XVIII-3. TÍCH PHÂN PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG KHÔNG ỔN ĐỊNH THAY ĐỔI CHẠM TRONG LÒNG DẪN HỎ

Ta có hệ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} &= 0 \\ - \frac{\partial z}{\partial s} = i - \frac{\partial h}{\partial s} &= \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{v \cdot |v|}{C^2 R} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Do $Q = \omega \cdot v$ nên :

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = v \cdot \frac{\partial \omega}{\partial s} + \omega \cdot \frac{\partial v}{\partial s} \quad (29)$$

còn

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial h}{\partial s} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial s} = \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial s} \quad (30)$$

nên (28) được viết dưới dạng khác ;

Thay (29) và (30) vào (28) :

$$\left. \begin{aligned} v \cdot \frac{\partial \omega}{\partial s} + \omega \cdot \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial \omega}{\partial t} &= 0 \\ \frac{1}{B} \frac{\partial \omega}{\partial s} + \frac{v \partial v}{g \partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} &= i - \frac{v \cdot |v|}{C^2 R} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Tích phân (28) hoặc (31) ta được các nghiệm :

$$\begin{aligned} Q &= Q(s, t) & v &= v(s, t) \\ z &= z(s, t) & \text{hoặc } \omega &= \omega(s, t) \end{aligned} \quad (32)$$

(31) vi phân phi tuyến. Có thể biến đổi thành đạo hàm riêng loại hyperbôn. Tuy nhiên việc làm đó vẫn còn gặp khó khăn.

Vì vậy người ta tìm biện pháp giải gần đúng.

Cách giải chia làm 4 loại :

1. Tích phân chặ chẽ - đây là cách giải của Xanh Vơ năng cho kênh chữ nhật có $i = 0$, bỏ qua lực cản. Phương pháp này được gọi là phương pháp đường đặc trưng.

2. Sóng biên độ nhỏ - dựa trên quan điểm đường mặt nước có dạng sóng. Trong khi giải đã bỏ qua các đại lượng bậc cao, biến phương trình phi tuyến thành tuyến tính. Phương pháp này thường dùng cho kênh dẫn trạm thủy điện điều tiết ngày.

3. Sai phân hóa - thay (28) bằng phương trình sai phân và dùng cách giải kết hợp số và đồ giải, trong đó bỏ qua số hạng quán tính. Cũng có tên gọi là phương pháp tức thời.

4. Dùng máy tính - dựa trên các phương pháp tính bằng số để lập trình và giải bằng máy.

§XVIII-4. CÁC ĐIỀU KIỆN BAN ĐẦU VÀ ĐIỀU KIỆN BIÊN

Các yếu tố thủy lực biến đổi theo t và s thỏa mãn (28) và (31).

Có rất nhiều nghiệm, cần tìm 1 nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện cụ thể cho bài toán, đó là các điều kiện ban đầu và điều kiện biên.

1. Điều kiện ban đầu :

- Tính với t_0 - các điều kiện cần biết trước là :

$$Q_{t=t_0} = Q(s) \quad \text{và} \quad z_{t=t_0} = z(s) \quad (33)$$

2. Điều kiện biên : là quy luật biến đổi theo t của cùng 1 hoặc 2 trong (32) tại 2 mặt cắt ở 2 đầu. Quy luật này phải biết được, cụ thể là :

$$\left. \begin{aligned} Q_{s=s_1} &= Q_1(t) \quad \text{và} \quad z_{s=s_2} = z_2(t) \\ \text{hoặc} \quad z_{s=s_1} &= z_1(t) \quad \text{và} \quad Q_{s=s_2} = Q_2(t) \\ \text{hoặc} \quad v_{s=s_1} &= v_1(t) \quad \text{và} \quad \omega_{s=s_2} = \omega_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Điều kiện ban đầu và điều kiện biên của các bài toán cụ thể thì muôn hình muôn vẻ, nhưng cần xác định cho chính xác vì việc đó sẽ quyết định kết quả tính toán.

Khi xác định phải chú ý là điều kiện ban đầu và điều kiện biên cũng phải nghiệm đúng hệ phương trình vi phân.

— Thí dụ : Đối với dòng không ổn định trong kênh điều tiết ngày của trạm thủy điện, nếu kênh dẫn nước từ hồ chứa thì điều kiện biên gồm : đầu trên là mực nước hồ, đầu dưới là đường quá trình lưu lượng ở hạ lưu. Còn điều kiện ban đầu là : trị số lưu lượng và mực nước trên toàn bộ kênh lúc bắt đầu tính toán.

§XVIII-5. KHÁI NIỆM VỀ PHƯƠNG PHÁP SỐ

Phần lớn các bài toán về dòng không ổn định được giải bằng phương pháp số trên máy tính.

1. Nội dung cơ bản của phương pháp số

Sai phân hóa (28)

+ Phương trình liên tục :

$$\frac{\Delta Q}{\Delta s} + \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = 0 \quad (35)$$

$$\frac{Q_d^* - Q_t^*}{\Delta s} + \frac{\bar{\omega}'' - \bar{\omega}'}{\Delta t} = 0 \quad (36)$$

Gọi $W = \bar{\omega} \cdot \Delta s$ là dung tích của đoạn sông, phương trình liên tục sẽ thành :

$$(Q_t^* - Q_d^*) \Delta t = W'' - W' \quad (37)$$

hoặc :

$$\frac{Q_t' + Q_t''}{2} - \frac{Q_d' + Q_d''}{2} = \frac{W''}{\Delta t} - \frac{W'}{\Delta t} \quad (38)$$

Trong đó :

- (t) - mặt cắt trên ;
- (d) - mặt cắt dưới ;
- (-) - trung bình của đoạn sông ;
- (') - thời đoạn đầu ;
- ('') - thời đoạn cuối ;
- (*) - trung bình thời đoạn.

+ Phương trình động lực viết cho thời đoạn cuối

$$-\frac{\Delta z''}{\Delta s} = \frac{\bar{Q}'' \cdot |\bar{Q}''|}{K''^2} \quad (39)$$

hoặc :

$$z_t'' - z_d'' = \frac{\bar{Q}'' \cdot |\bar{Q}''|}{K''^2} \Delta s \quad (40)$$

hoặc :

$$\bar{Q}'' = \pm \bar{K}'' \sqrt{\frac{|z''_t - z''_d|}{\Delta s}} \quad (41)$$

Dấu (+) khi $z_t > z_d$; (-) khi $z_t < z_d$.

Tức là thay các đạo hàm riêng trong các phương trình bằng tỉ số các sai phân.

Tùy theo cách thay thế mà ta có các sơ đồ sai phân khác nhau - tam giác (thuận, nghịch), thoi, chữ nhật.

Sau khi sai phân hóa hệ (28) được một hệ phương trình đại số của các ẩn số ω, Q ở các điểm trong miền xác định D ($t \geq t_0$; $s_d \leq s \leq s_c$) của bài toán.

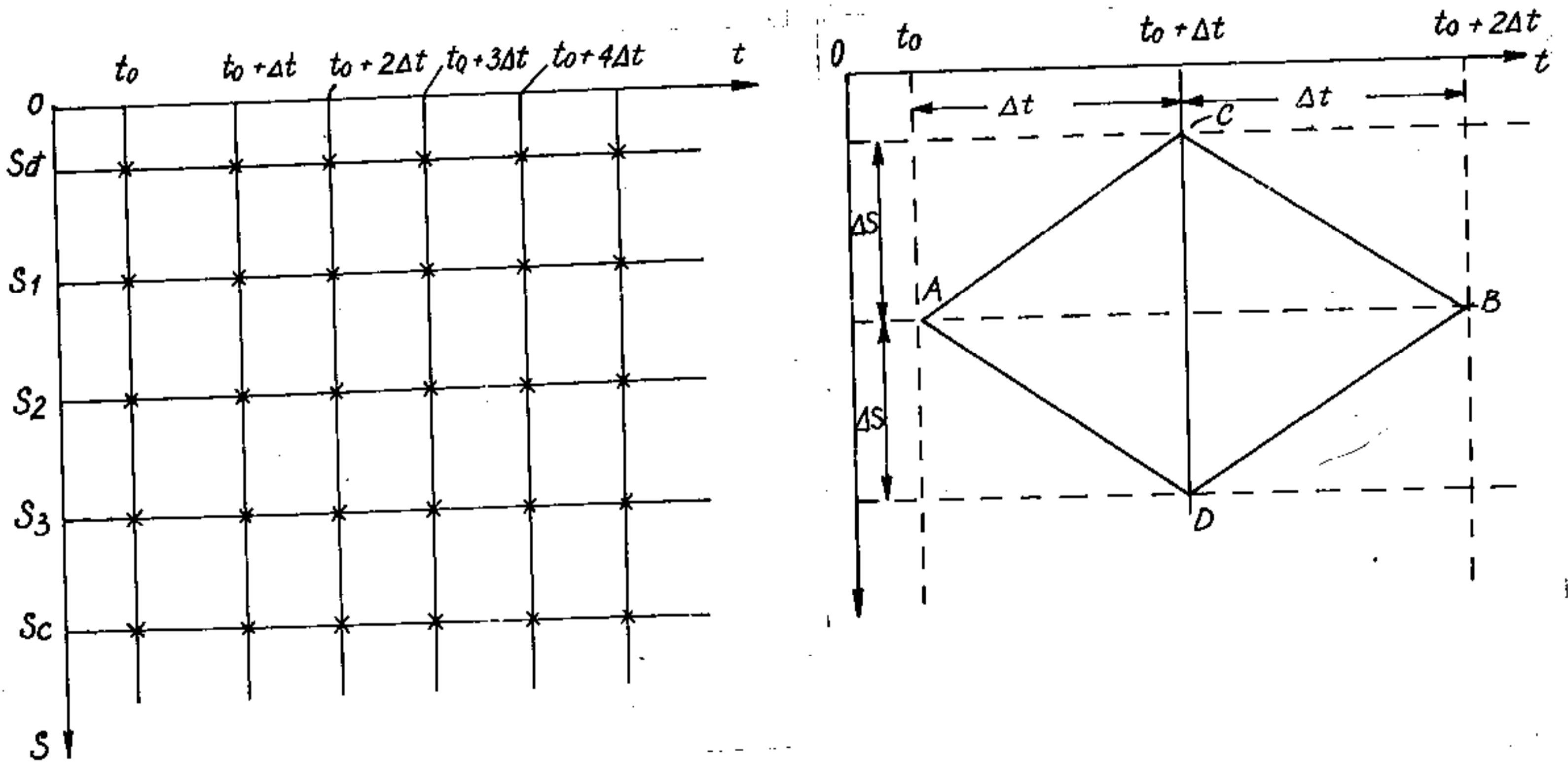
Tiếp theo là giải hệ phương trình đại số để tìm các hàm ẩn.

2. Lưới sai phân

Các điểm tính toán trong miền D được phân bố để hợp thành một hệ điểm nút của lưới sai phân. Ở đây ta phải vừa tìm hàm ẩn, vừa dùng lưới sai phân (tức là tìm tọa độ các nút).

Thông thường khi giải hệ phương trình Xanh Vơ năng bằng phương pháp số, người ta dùng lưới sai phân chữ nhật mà các cạnh là các đường thẳng song song với trục t ($s = \text{const}$) cho ta đặc trưng thủy lực tại mặt cắt chọn trước ở các thời điểm khác nhau.

Các nút nằm trên các đường song song với trục s ($t = \text{const}$) cho các đặc trưng thủy lực dọc theo lòng dẫn ở thời điểm cố định.



3. Sơ đồ hiện và sơ đồ ẩn

Các sơ đồ sai phân có thể chia ra hai loại là sơ đồ hiện và sơ đồ ẩn.

a. Sơ đồ hiện

Sơ đồ hiện là sơ đồ mà sau khi sai phân hóa hệ (28) ta được hệ 2 phương trình đại số với 2 ẩn số Q, ω ở một nút chưa biết, do đó có thể giải ngay ra các ẩn.

Ví dụ : sơ đồ hình thoi - đòi hỏi khoảng cách giữa các mặt cắt Δs phải bằng nhau và thời đoạn tính toán Δt phải cố định.

Thay các đạo hàm riêng bằng các biểu thức sai phân :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \frac{\omega_B - \omega_A}{2\Delta t} \\ \frac{\partial \omega}{\partial s} &= \frac{\omega_D - \omega_C}{2\Delta s} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} &= \frac{Q_B - Q_A}{2\Delta t} \\ \frac{\partial Q}{\partial s} &= \frac{Q_D - Q_C}{2\Delta s} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Nếu đặc trưng tại 2 lớp thời gian trước (nút A, C, D) đã biết thì sau khi sai phân hóa hệ (28) ta được 2 phương trình đại số bậc nhất với 2 ẩn là Q_B và ω_B ở lớp thời gian sau.

Giải hệ này ta được ngay các đặc trưng Q_B, ω_B .

Với cách này ta tìm được các đặc trưng chưa biết lần lượt hết lớp này đến lớp khác.

Ở các nút biên không thể chọn làm đỉnh hình thoi, phải thay đổi sơ đồ chút ít (dùng sơ đồ 1/2 hình thoi hoặc bỏ qua không tính đến một đặc trưng còn thiếu ở nút biên).

Ưu điểm : thuật toán đơn giản, dễ lập chương trình cho máy tính, tiện dùng cho cả hệ thống kênh phức tạp.

Nhược điểm : bước thời gian tính toán (Δt) bị hạn chế bởi điều kiện :

$$\Delta t \leq \inf \frac{\Delta l}{|W|} \quad (43)$$

tức là bước thời gian phải nhỏ hơn giới hạn dưới của khoảng thời gian truyền ảnh hưởng từ mặt cắt này sang mặt cắt kia.

Phương pháp này cũng có hạn chế vì trong tính toán luôn có sai số - sai số do độ chính xác của các tài liệu đưa vào, do thay thế vi phân bằng sai phân, do độ chính xác của máy tính có hạn....

Nếu sơ đồ tính để cho sai số bị tích lũy và khuếch đại trong quá trình tính thì sơ đồ là không bền vững. Ngược lại, nếu trong quá trình tính sai

số bị giảm dần, các sai số phạm phải không bị tích lũy lại thì sơ đồ tính là bền vững.

Trong thực tế tính toán, người ta cũng đã chứng minh được rằng sơ đồ hiện chỉ bền vững khi bước thời gian tính Δt đáp ứng điều kiện (43).

b. Sơ đồ ẩn

Sơ đồ ẩn là sơ đồ sai phân mà ở lớp thời gian sau có từ hai nút trở lên và các đặc trưng Q, ω ở đây là các đại lượng cần tìm.

Sau khi sai phân hóa hệ phương trình (31) ta chỉ có được 2 phương trình đại số, trong lúc số ẩn số lớn hơn hay bằng 4.

Từng hệ phương trình riêng rẽ như vậy không kín và ta không thể giải ngay để tìm các hàm ẩn được.

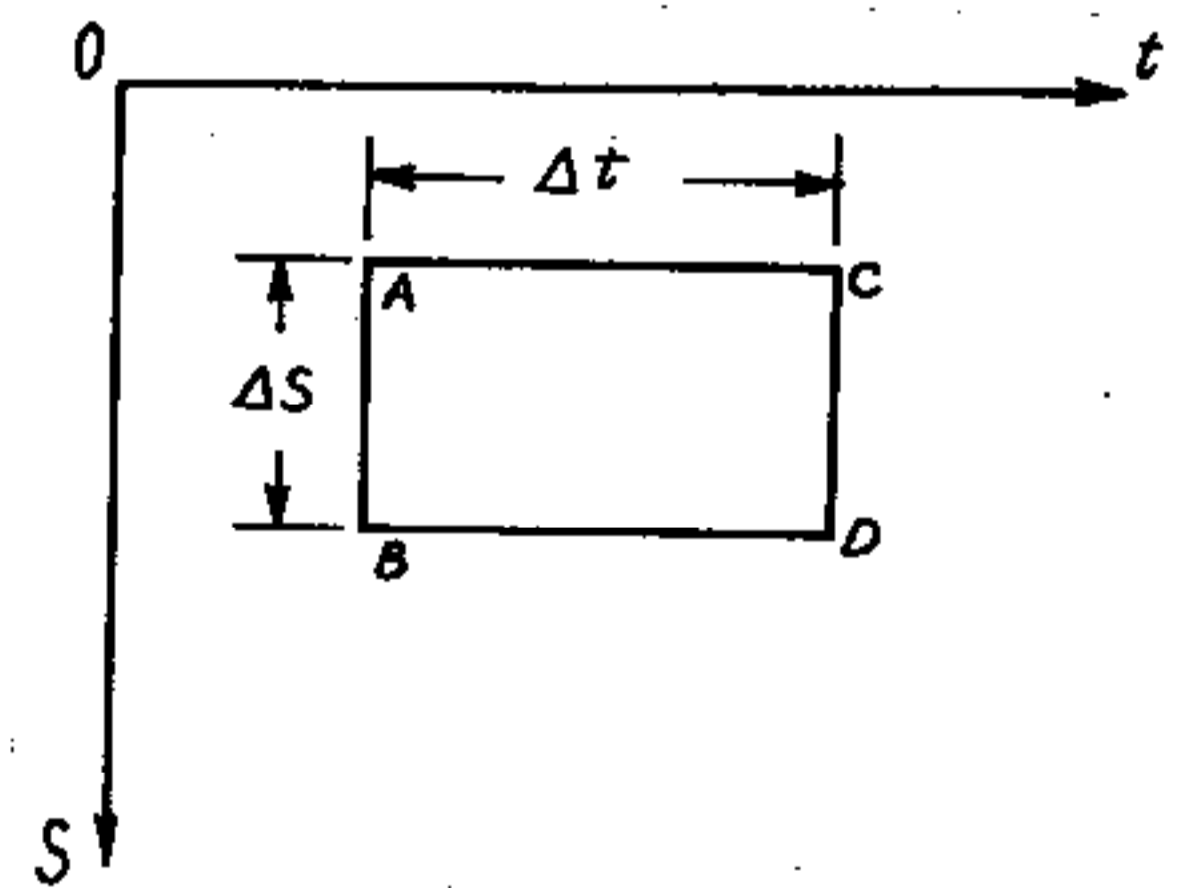
Chỉ sau khi sai phân hóa theo sơ đồ đã chọn cho mỗi nút ở lớp thời gian sau, kết hợp với điều kiện biên ta mới có một hệ kín và giải đồng thời ra nghiệm Q, ω cho tất cả các nút ở lớp thời gian sau.

Sơ đồ sai phân hóa chữ nhật có thể tổng quát như sau :

+ Các nút A, B nằm ở lớp thời gian trước, các đặc trưng ở đây đã biết. Các nút C, D ở lớp thời gian sau là các đại lượng cần tìm.

+ Ta thay đạo hàm riêng bằng các biểu thức sai phân sau :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \gamma \frac{\omega_C - \omega_A}{\Delta t} + (1 - \gamma) \frac{\omega_D - \omega_B}{\Delta t} \\ \frac{\partial \omega}{\partial s} &= \frac{\omega_D - \omega_C}{\Delta s} + (1 - \theta) \frac{\omega_B - \omega_A}{\Delta s} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} &= \gamma \frac{Q_C - Q_A}{\Delta t} + (1 - \gamma) \frac{Q_D - Q_B}{\Delta s} \\ \frac{\partial Q}{\partial s} &= \theta \frac{Q_D - Q_C}{\Delta s} + (1 - \theta) \frac{Q_B - Q_A}{\Delta s} \end{aligned} \right\} (44)$$



Trong đó : $0 \leq \gamma, \theta \leq 1$ được gọi là các hệ số thiên lệch (tức là khi sai phân hóa ta lấy thiên về phía cạnh nào của hình chữ nhật ABCD).

Thường chọn $\gamma = 1/2$ và để cho sơ đồ luôn luôn bền vững lấy $\theta > 1/2$ (đạo hàm theo s lấy thiên về lớp thời gian sau).

Sai phân hóa (28) theo (44) ta được 2 phương trình đại số với 4 ẩn $\omega_C, Q_C, \omega_D, Q_D$.

Nếu đoạn sông tính toán chia làm n đoạn nhỏ, có n + 1 mặt cắt - ta được 2n phương trình đại số.

Cộng với 2 điều kiện biên ta có 2n + 2 phương trình.

Số nút ở thời gian sau là $n + 1$.

Số ẩn là $2(n + 1) =$ số phương trình.

Giải hệ $2n + 2$ phương trình ta nhận được đồng thời tất cả các đặc trưng cần tìm ở lớp thời gian sau.

Lợi dụng tính chất riêng của hệ phương trình này là trong mỗi phương trình chỉ có mặt 4 ẩn số, người ta dùng phương pháp khử dưới để giải cho nhanh và đơn giản.

Cần lưu ý là hệ phương trình Xanh Vơ năng (31) là phi tuyến nên hệ phương trình đại số nhận được cũng là phi tuyến. Do đó phải kết hợp cách giải hệ phương trình đại số tuyến tính với phương pháp tính đúng dần (tính lặp).

Ưu điểm của sơ đồ này: với $\theta > 1/2$, bước thời gian tính Δt không bị hạn chế, sơ đồ luôn luôn bền vững.

Nhược điểm: thuật toán phức tạp, khó lập trình cho máy tính hơn và khi áp dụng cho mạng lưới kênh, sông thì phiền phức.