

MÔ HÌNH HÓA CÁC HIỆN TƯỢNG THỦY ĐỘNG LỰC

§XIX-1. CÁC KHÁI NIỆM CHUNG

Các phương pháp giải tích chính xác được dùng để nghiên cứu thủy khí động lực thường bị hạn chế về quy mô phạm vi bài toán.

Trong nhiều trường hợp lời giải giải tích thường kèm theo các khó khăn lớn về toán học, và thường xuyên cách đặt bài toán theo quan điểm toán học chặt chẽ không thể thực hiện được vì tính phức tạp của hiện tượng nghiên cứu.

Ta không thể lúc nào cũng có được kết quả đạt yêu cầu bằng cách dùng các phương pháp số.

Trong những trường hợp như vậy để hỗ trợ người ta dùng cách nghiên cứu thực nghiệm trên các mô hình của các công trình thực tế.

Để có được cách đặt bài toán nghiên cứu thực nghiệm đúng đắn và tiếp theo đó là việc chỉnh lí các thông tin nhận được do thực nghiệm cần phải hình dung một cách rõ ràng *bức tranh bản chất* của hiện tượng nghiên cứu, cần phải tìm được cách *phân tích định tính* tổng quát.

Trong khi thực hiện các nghiên cứu thực nghiệm trên mô hình, điều quan trọng là phải xác định đúng các thông số không thứ nguyên, là các đặc trưng đầy đủ của hiện tượng nghiên cứu.

Số lượng các thông số đó phải là ít nhất.

Sự phân tích định tính sơ bộ và việc chọn hệ các thông số không thứ nguyên có thể thực hiện một cách có hiệu quả bằng cách dựa trên lí thuyết thứ nguyên và sự đồng dạng trong cơ học.

Việc sử dụng lí thuyết đó cho phép có thể có được các tài liệu sơ bộ cần thiết, nhất là đối với các hiện tượng phụ thuộc vào nhiều thông số.

Trong đó có thể xác định được vai trò của từng thông số và trên cơ sở đó loại trừ được một số trong chúng như là những thông số không đáng kể trong quá trình nghiên cứu sau này.

Việc phối hợp phương pháp dựa trên lí thuyết thứ nguyên và đồng dạng cơ học với phương pháp giải tích luôn luôn cho ta các kết quả khả quan nhất.

Thông thường trong thực tế không có mô hình nào có thể mô phỏng một cách hoàn hảo hiện tượng nghiên cứu trong các điều kiện tự nhiên.

Trong trường hợp này cần phải dùng đến phương pháp tương tự, khi hiện tượng mà các nhà nghiên cứu quan tâm được thay bằng mô hình có bản chất vật lí khác dưới điều kiện là hai hiện tượng cùng được mô tả bằng các phương trình như nhau.

§XIX-2. LÍ THUYẾT THỨ NGUYÊN

Ta cần nhắc lại một số khái niệm trong chương trình vật lí, đó là cần phân biệt các đại lượng có thứ nguyên và không thứ nguyên.

Các đại lượng này có liên quan với nhau bằng các quan hệ nhất định, trong đó đối với một số trong chúng có thể cho các đơn vị đo tùy ý.

Các đại lượng độc lập như vậy được gọi là cơ bản, còn số còn lại là dẫn xuất.

Biểu thức của đại lượng vật lí dẫn xuất qua các đại lượng vật lí cơ bản được gọi là thứ nguyên.

Trong cơ học với tính chất là các đại lượng vật lí cơ bản ta chọn chiều dài l , khối lượng m , thời gian t ; chúng không phụ thuộc lẫn nhau.

Để kí hiệu thứ nguyên ta thường dùng cách viết $[a]$ (trong đó a - đại lượng vật lí dẫn xuất).

Cần lưu ý rằng, bất kì phương trình vật lí nào theo thứ nguyên cũng đều đồng nhất, tức là cả hai vế đều luôn luôn có thứ nguyên như nhau, không phụ thuộc vào cách chọn hệ đại lượng vật lí.

Nguyên tắc đó là bắt buộc ngay cả với các phương trình chưa biết.

Tính chất đồng nhất là cơ sở lí thuyết của thứ nguyên.

Sử dụng chúng có thể thành lập được cả quan hệ giữa các đại lượng dùng để xác định các hiện tượng vật lí khác nhau.

Công thức thứ nguyên trong các hệ thống khác nhau của các đại lượng vật lí dùng cho cùng một đại lượng có thể chứa số lượng biến số khác nhau và có thể có các dạng khác nhau.

Vì vậy nói về thứ nguyên chỉ có thể là cho một hệ xác định của các đại lượng vật lí.

Trong một số tài liệu đã chứng minh rằng các công thức thứ nguyên của tất cả các đại lượng phải có dạng số mũ một số hạng :

$$[D] = A^x B^y C^z \quad (1)$$

Trong đó :

D - đại lượng dẫn xuất ;

A, B, C - các đại lượng cơ bản ;

x, y, z - chỉ số mũ.

Nếu trên cơ sở phân tích hiện tượng này hoặc hiện tượng khác ta tách được các đại lượng vật lí, là các đại lượng hoàn toàn xác định được hiện tượng vật lí đó, thì việc xác lập tính chất của quan hệ giữa các đại lượng đã được tách ra đó có thể xuất phát từ nguyên lí đồng nhất của thứ nguyên bằng cái gọi là lí thuyết π .

Giả thiết là một hiện tượng nào đó hoàn toàn được xác định bằng một số lượng hữu hạn các đại lượng vật lí có thứ nguyên.

Quan hệ hàm số giữa chúng có thể viết dưới dạng :

$$f(A_1, A_2, \dots, A_n) = 0 \quad (2)$$

Trong đó :

A_1, A_2, \dots, A_n - các đại lượng vật lí, xác định hiện tượng đang xét ;

n - số lượng của chúng.

Vậy tương ứng với lí thuyết π , phương trình (2) sẽ có dạng :

$$\varphi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}) = 0 \quad (3)$$

Trong đó :

$\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}$ - các tổ hợp không thứ nguyên độc lập của đại lượng A ;

m - số lượng các đại lượng vật lí cơ bản.

Số lượng lớn nhất của các tổ hợp π lúc này sẽ được viết dưới dạng sau :

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= A_1^{x_1} A_2^{y_1} A_3^{z_1} A_4 \\ \pi_2 &= A_1^{x_2} A_2^{y_2} A_3^{z_2} A_5 \\ &\dots \\ \pi_{n-m} &= A_1^{x_{n-m}} A_2^{y_{n-m}} A_3^{z_{n-m}} A_n \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

hoặc đối với số bất kì

$$\pi = A_1^x A_2^y A_3^z A_i \quad (5)$$

Trong đó : A_i - đại lượng vật lí sau A_3 từ A_4 đến A_n ; $i = 4, 5, \dots$

Do đó chuyển từ (2) đến (3) ta giảm số lượng các số hạng chưa biết từ n đến $n-m$.

Trong cơ học, như đã nói trên, $m = 3$.

Đối với hệ phương trình (4) điều cần lưu ý là cũng như bất cứ phương trình vật lí nào, thứ nguyên vế trái và vế phải của phương trình này phải như nhau.

Vì vậy, thay số π dưới dạng tích số các đại lượng vật lí cơ bản với số mũ bằng 0, còn đối với vế phải phương trình (5) theo (1) thay bằng các số hạng một số mũ, ta có :

$$\pi = l_o^0 m_o^0 t_o^0 = (l_o^{\alpha_1} m_o^{\beta_1} t_o^{\gamma_1})^x (l_o^{\alpha_2} m_o^{\beta_2} t_o^{\gamma_2})^y (l_o^{\alpha_3} m_o^{\beta_3} t_o^{\gamma_3})^z \times l_o^{\alpha_i} m_o^{\beta_i} t_o^{\gamma_i} \quad (6)$$

do đó :

$$\pi = l_0^{\alpha} m_0^{\beta} t_0^{\gamma} = l_0^{(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_i)} m_0^{(\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \beta_i)} \times t_0^{(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + \gamma_i)} \quad (7)$$

hoặc

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_i &= 0 \\ \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \beta_i &= 0 \\ \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + \gamma_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Trong đó : α, β, γ - số, được xác định trên cơ sở đồng nhất về thứ nguyên. Hệ (8) được giải đơn trị đối với các chỉ số mũ chưa biết, x, y, z .

Tiến hành tuần tự các tính toán tương tự đối với từng số hạng trong hệ phương trình (4), ta xác định tất cả các số không thứ nguyên $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}$.

Dạng cuối cùng của phương trình (3) không thể xác định được (trừ các trường hợp đặc biệt đơn giản) trực tiếp từ lý thuyết π , nó được xác định trên cơ sở nghiên cứu thực nghiệm hoặc các số liệu thực địa.

Để làm ví dụ cho việc sử dụng các nguyên lý cơ bản của lý thuyết π ta nghiên cứu bài toán về sức cản trong chuyển động đều đẳng nhiệt của một vật hình cầu trong chất lỏng nhớt, tĩnh.

Chuyển động của hình cầu trong trường hợp này được xác định bằng các tính chất vật lý của chất lỏng, bằng các kích thước của hình cầu, bằng vận tốc chuyển động của nó, cũng như bằng lực cản chính diện.

Do đó phương trình (2) có thể viết dưới dạng :

$$f(\rho, \mu, u_0, d, F) = 0.$$

Trong đó :

- ρ và μ - mật độ và độ nhớt của chất lỏng ;
- u_0 - vận tốc chuyển động đều của hình cầu ;
- d - đường kính hình cầu ;
- F - lực cản chính diện.

Ta tách các đại lượng vật lý độc lập và viết lại các phương trình xuất phát như sau :

$$f(d, u_0, \rho, \mu, F) = 0$$

Do đó số lượng các tổ hợp không thứ nguyên π bằng 2.

Mỗi một đại lượng dưới dạng hàm số có thể biểu thị bằng tích số các đại lượng vật lý cơ bản với các chỉ số mũ tùy ý, cụ thể :

$$\begin{aligned} d &\sim l_0^{1,0} ; \\ u_0 &\sim l_0^{1,0} t_0^{-1,0} ; \\ \rho &\sim m_0^{1,0} l_0^{-3,0} ; \\ \mu &\sim m_0^{1,0} l_0^{-1,0} t_0^{-1,0} ; \\ F &\sim m_0^{1,0} l_0^{1,0} t_0^{-2,0} . \end{aligned}$$

Bây giờ tương ứng với các công thức (4) ta viết :

$$\pi_1 = d^{x_1} u_0^{y_1} \rho^{z_1} \mu ;$$

$$\pi_2 = d^{x_2} u_0^{y_2} \rho^{z_2} F.$$

Tiếp theo, theo quan hệ (6) ta có :

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (l_0^{1,0})^{x_1} (t_0^{-1,0})^{y_1} (m_0^{1,0} l_0^{-3,0})^{z_1} m_0^{1,0} l_0^{-1,0} t_0^{-1,0} = \\ &= l_0^{x_1 + y_1 - 3z_1 - 1,0} t_0^{-y_1 - 1,0} m_0^{z_1 + 1,0} \end{aligned}$$

hoặc là

$$x_1 + y_1 - 3z_1 - 1,0 = 0 ;$$

$$-y_1 - 1,0 = 0 ;$$

$$z_1 + 1,0 = 0.$$

Giải hệ phương trình đã nhận được, ta có :

$$x_1 = -1,0 ; y_1 = -1,0 ; z_1 = -1,0$$

do đó

$$\pi_1 = \frac{\mu}{du_0 \rho} = \frac{\nu}{du_0} = \frac{1}{Re}$$

Tương tự đối với π_2 ta được :

$$\pi_2 = l_0^{x_2 + y_2 - 3z_2 + 1} t_0^{-y_2 - 2} m_0^{z_2 + 1}$$

$$x_2 + y_2 - 3z_2 + 1 = 0 ;$$

$$-y_2 - 2 = 0 ;$$

$$z_2 + 1 = 0 ;$$

$$x_2 = -2,0 ; y_2 = -2,0 ; z_2 = -1,0 ;$$

$$\pi_2 = \frac{F}{d^2 u_0^2 \rho}$$

Thay các giá trị số tổ hợp không thứ nguyên vào phương trình (3), ta được :

$$\varphi = \left(\frac{1}{Re} ; \frac{F}{d^2 u_0^2 \rho} \right)$$

hoặc $F = \varphi' \left(\frac{1}{Re} \right) \rho d^2 u_0^2$ (9)

Biểu thức (9) chỉ ra rằng với kết cấu có thể của phương trình này thì lực cản chính diện tăng khi tổ hợp có thứ nguyên $\rho d^2 u_0^2$ tăng và khi số Raynôn giảm.

Ta xác định dạng biểu thức $\varphi'(1/Re)$ cho trường hợp chảy bao hình cầu bằng dòng chất lỏng nhớt khi số Raynôn nhỏ.

Theo lời giải Stoks :

$$F = 3\pi\mu du_0 \quad (10)$$

Cân bằng về phải của (9) và (10), ta được :

$$3\pi\mu du_0 = \varphi' \left(\frac{1}{\text{Re}} \right) \rho d^2 u_0^2,$$

do đó

$$\varphi' \left(\frac{1}{\text{Re}} \right) = \frac{3\mu\pi}{du_0} = \frac{3\pi}{\text{Re}}$$

Viết lại (9), thay $\varphi'(1/\text{Re})$ vào, ta được :

$$F = \frac{3\pi}{\text{Re}} \rho d^2 u_0^2 = \frac{24}{\text{Re}} \frac{\pi d^2}{4} \rho \frac{u_0^2}{2} \quad (11)$$

hoặc $F = c_x \omega \rho u_0^2/2$, chính là kết quả mà Niuton nhận được cho lực cản chính diện.

So sánh (9) và (10) ta chú ý là hệ số sức cản chính diện c_x giảm khi số Raynôn tăng.

Nghiên cứu thực nghiệm, như đã được biết, hoàn toàn phù hợp với kết quả đã nêu.

Bằng lí thuyết π và lí thuyết thứ nguyên có thể tìm được phương trình Đácxi-Vâyxbác để tính toán sức cản thủy lực theo chiều dài.

Ta xét chuyển động đều đẳng nhiệt của chất lỏng không nén trong ống hình trụ.

Tương ứng với công thức (2) có thể viết $f(d ; v ; \rho ; \mu ; \Delta p ; l ; k_{td}) = 0$ (trong đó d - đường kính ống ; v - vận tốc trung bình của dòng chất lỏng ; ρ và μ - lần lượt là mật độ và độ nhớt động lực của chất lỏng ; Δp - độ hạ thấp áp suất trong ống trên khoảng cách l ; k_{td} - độ nhám tương đương hạt đều của mặt trong ống).

Tính độ hạ thấp áp suất Δp cho một đơn vị chiều dài ống, khi đó $f(d ; v ; \rho ; \mu ; \Delta p/l ; k_{td}) = 0$.

Từ phương trình (3) ta có : $\varphi(\pi_1 ; \pi_2 ; \pi_3) = 0$.

Số không thứ nguyên π có thể tính như trên :

$$\pi_1 = \frac{\mu}{\rho dv} = \frac{1}{\text{Re}}$$

$$\pi_2 = \frac{d \Delta p / l}{\rho v^2}$$

$$\pi_3 = k_{td}/d$$

Do đó :

$$\varphi \left(\frac{1}{\text{Re}} ; \frac{d \Delta p / l}{\rho v^2} ; \frac{k_{td}}{d} \right) = 0.$$

Giải quan hệ này đối với tổ hợp không thứ nguyên thứ hai, ta có :

$$\frac{d \Delta p / l}{\rho v^2} = \varphi' \left(\frac{1}{\text{Re}} ; \frac{k_{td}}{d} \right)$$

Vì độ hạ thấp áp suất $\Delta p = \rho g h_{ms}$, có thể viết :

$$h_{ms} = 2\varphi' \left(\frac{1}{\text{Re}} ; \frac{k_{td}}{d} \right) \frac{l v^2}{d 2g}$$

Ta kí hiệu $\lambda = 2\varphi'(1/\text{Re} ; k_{td}/d)$, cuối cùng ta có :

$$h_{ms} = \lambda \frac{l v^2}{d 2g}$$

đây chính là công thức Đácxi-Vâyxbắc.

§XIX-3. ĐỒNG DẠNG CƠ HỌC

Hiện tượng mà tỉ số của các đại lượng vật lí cùng tên của cùng một biểu hiện vật lí tự nhiên là không đổi, được gọi là đồng dạng cơ học.

Điều đó có nghĩa là đối với đôi một bất kì của các điểm giống nhau của hai dòng đồng dạng, tất cả các đại lượng vectơ đều đồng dạng hình học, còn các đại lượng vô hướng thì tỉ lệ với nhau.

Hai hiện tượng thủy lực là đồng dạng cơ học nếu chúng đồng dạng hình học, động học và động lực học.

* **Đồng dạng hình học** là có sự tỉ lệ giữa các kích thước chiều dài đặc trưng của các dòng chảy đang xét.

Tiếp theo đây ta kí hiệu thuật ngữ dòng chảy tự nhiên và dòng chảy trên mô hình bằng chữ "TN" và "MH", không hạn chế cho bất cứ một hệ số tỉ lệ nào.

Đối với kích thước chiều dài, ta có tỉ lệ giữa dòng tự nhiên và mô hình là :

$$\frac{l_{TN}}{l_{MH}} = \alpha_1 = \text{const} \quad (12)$$

trong đó α_1 - hệ số tỉ lệ hoặc tỉ lệ chiều dài.

Từ đó để có được đồng dạng hình học của hai dòng chảy phải có đủ tỉ lệ về diện tích và thể tích, tức là :

$$\omega_{TN}/\omega_{MH} = \alpha_w = \alpha_1^{2,0} \quad (13)$$

$$W_{TN}/W_{MH} = \alpha_w = \alpha_1^{3,0} \quad (14)$$

* **Muốn có đồng dạng động học** bắt buộc phải có đồng dạng hình học.

Ngoài ra, đối với hai dòng chảy đồng dạng động học, hoặc là các đoạn quỹ đạo của các phần tử tương ứng của dòng tự nhiên và mô hình cũng như các thời đoạn mà trong đó xảy ra các quá trình tự nhiên trên mô hình, phải tỉ lệ.

Nói cách khác trong các dòng đồng dạng động học, các phân tử giống nhau vẽ nên các quỹ đạo đồng dạng hình học trong thời đoạn mà các tỉ số được gọi là tỉ lệ thời gian, là đại lượng không đổi :

$$t_{TN}/t_{MH} = \alpha_t = \text{const} \quad (15)$$

Do đó, đối với đôi một bất kì của các điểm giống nhau của hai dòng đồng dạng động học ta có các tỉ số sau đây :

$$u_{TN}/u_{MH} = \alpha_u = \text{const} \quad (16)$$

$$a_{TN}/a_{MH} = \alpha_a = \text{const} \quad (17)$$

Trong đó :

u_{TN} và u_{MH} - vận tốc trong các điểm giống nhau của dòng tự nhiên và dòng trên mô hình ;

a_{TN} và a_{MH} - gia tốc của các điểm giống nhau của dòng tự nhiên và trên mô hình ;

α_u và α_a - lần lượt là các tỉ lệ của vận tốc và gia tốc.

* **Hệ hoặc hiện tượng thủy lực đồng dạng động lực học** với nhau, nếu bản chất vật lí của các lực tác động lên chất lỏng là giống nhau và các vectơ của các lực đó tạo nên các đa giác lực đồng dạng hình học.

Điều đó có nghĩa là trong hệ đồng dạng động lực học, các tỉ số của lực cùng tên trong các điểm giống nhau trong tự nhiên và trên mô hình là không đổi, tức là :

$$\frac{F_{TN}}{F_{MH}} = \alpha_F = \text{const} \quad (18)$$

Trong đó :

F - lực bất kì, trong số đó cả lực tổng hợp ;

α_F - hệ số tỉ lệ hoặc là tỉ lệ lực.

Đối với đồng dạng động lực học các dòng chảy, tỉ số của mật độ chất lỏng trong tự nhiên và trên mô hình cũng phải bằng nhau :

$$\rho_{TN}/\rho_{MH} = \alpha_\rho = \text{const} \quad (19)$$

Trong đó : α_ρ - tỉ lệ mật độ.

Muốn có đồng dạng động lực học nhất thiết phải có đồng dạng động học và hình học.

Trong các dòng đồng dạng tỉ số của lực tổng hợp trên lực thành phần là đại lượng không đổi, đối với dòng tự nhiên cũng như dòng trên mô hình :

$$R_{TN}/(F_i)_{TN} = R_{MH}/(F_i)_{MH} = \text{const} \quad (20)$$

Trong đó :

R - lực tổng hợp của tất cả các ngoại lực tác dụng lên chất lỏng ;

F_i - một trong số các ngoại lực thành phần.

Ta xét tỉ số của lực tổng hợp của tất cả các ngoại lực đối với các lực quán tính tương ứng của hai dòng chảy đồng dạng động lực học

$$R_{TN}/(F_{QT})_{TN} = R_{MH}/(F_{QT})_{MH} \quad (21)$$

Ta viết lại tỉ số đó dưới dạng sau đây :

$$R_{TN}/R_{MH} = (F_{QT})_{TN}/(F_{QT})_{MH} \quad (22)$$

Theo định luật Niuton tỉ số lực quán tính có thể viết dưới dạng :

$$(F_{QT})_{TN}/(F_{QT})_{MH} = (\rho Wa)_{TN}/(\rho Wa)_{MH} = \alpha_\rho \alpha_1^{3,0} \alpha_t^{-2,0} \quad (23)$$

hoặc đối với lực tổng hợp của tất cả các ngoại lực trong dòng tự nhiên và mô hình :

$$R_{TN}/R_{MH} = \alpha_\rho \alpha_1^{4,0} \alpha_t^{2,0} = \alpha_\rho \alpha_1^{2,0} \alpha_u^{2,0} \quad (24)$$

Thay vế phải của biểu thức (24) bằng tỉ số của các đại lượng vật lí cùng tên, ta có :

$$R_{TN}/R_{MH} = (\rho l^2 u^2)_{TN}/(\rho l^2 u^2)_{MH} \quad (25)$$

hoặc

$$R_{TN}/(\rho l^2 u^2)_{TN} = R_{MH}/(\rho l^2 u^2)_{MH} \quad (26)$$

Vì tỉ lệ hình học của mô hình đối với từng trường hợp cụ thể có thể là khác nhau nên có thể viết :

$$\frac{R_1}{(\rho l^2 u^2)_1} = \frac{R_2}{(\rho l^2 u^2)_2} = \dots = \frac{R}{\rho l^2 u^2} = \text{idem} \quad (27)$$

Tỉ số :

$$\frac{R}{\rho l^2 u^2} = \text{Ne} \quad (28)$$

được gọi là tiêu chuẩn Niuton.

Đối với các hiện tượng đồng dạng động lực học trong các điểm giống nhau tiêu chuẩn Niuton phải bằng nhau.

Tiêu chuẩn Niuton xác định sự đồng dạng động lực của hệ thống cơ học.

Tuy nhiên tiêu chuẩn đó không phải luôn luôn có thể được sử dụng dưới dạng tổng quát trong nghiên cứu thủy khí động lực, vì trong nhiều trường hợp không thể tìm được sự đánh giá định lượng các ngoại lực và do đó cả tổng hợp lực.

Vì vậy trong nghiên cứu các hiện tượng thủy lực thường chỉ lấy một lực là lực có tính quyết định hơn so với các lực khác.

Do đó với tính chất là tiêu chuẩn đồng dạng động lực học có thể chọn các tiêu chuẩn riêng, ví dụ tiêu chuẩn Râynon, tiêu chuẩn Froude và các tiêu chuẩn khác.

Các tiêu chuẩn đồng dạng động lực học có thể tìm bằng lí thuyết thứ nguyên, là lí thuyết được dựa trên tính đồng nhất của các phương trình vật lí hoặc là trên cơ sở phân tích các phương trình vi phân mô tả quá trình nghiên cứu.

Bây giờ ta phát biểu các điều kiện đồng dạng động lực học của các hiện tượng thủy khí động lực học.

Hai hiện tượng đồng dạng phải là cùng của một bản chất vật lí.

Trong trường hợp ngược lại ta chỉ có sự tương tự cơ học.

Các quy luật tương tự thường được sử dụng trong kĩ thuật như là tương tự điện - thủy động lực, tương tự khí - thủy lực v.v...

Các hiện tượng đồng dạng được mô tả bằng các phương trình vi phân không thứ nguyên giống nhau.

Hình thức không thứ nguyên của phương trình luôn luôn có thể lập được vì thứ nguyên của từng phương trình vật lí thành phần là giống nhau.

Trong chuyển động của chất lỏng và chất khí các phương trình đó là phương trình Navie-Stok, mà trong dòng chảy rối trở thành phương trình Râynon và phương trình liên tục.

Hệ phương trình này dùng cho các nhóm hiện tượng thủy động lực học rất khác nhau, ví dụ cho chuyển động của chất lỏng trong ống, cho chảy bao vật rắn bằng chất lỏng và chất khí.

Các hiện tượng đồng dạng phải thỏa mãn các điều kiện đơn trị, các điều kiện đó được viết dưới dạng không thứ nguyên.

Trong các điều kiện một dấu thường gồm :

+ Các tính chất hình học của hệ thống (hình dạng biên của dòng chảy và độ nhám của biên cứng) ;

+ Các điều kiện biên và ban đầu tại các mặt cắt đầu và cuối của dòng đang xét (sự phân bố vận tốc và áp suất trong chúng) ;

+ Các điều kiện ban đầu được cho trước, về nguyên tắc, bằng trường vận tốc và sự phân bố áp suất ở thời điểm đầu ;

+ Các hằng số vật lí của hiện tượng nghiên cứu (mật độ và độ nhớt của môi trường) và sự tồn tại của chất lỏng phi Niuton (khí thực, pha chuyển tiếp v.v...).

Đối với các hiện tượng đồng dạng, các tiêu chuẩn không thứ nguyên bao gồm các đại lượng cùng dấu, phải bằng nhau.

Ở đây khi lập các tiêu chuẩn không thứ nguyên (bằng các phương pháp khác nhau), có thể lấy các giá trị trung bình làm các đại lượng vật lí đặc trưng.

Điều đó có thể chứng minh bằng cách so sánh các hệ số tỉ lệ, ví dụ tỉ lệ của vận tốc cục bộ α_u và vận tốc trung bình α_v .

Ta đã biết là vận tốc trung bình được xác định bằng biểu thức :

$$v = \frac{\int u d\omega}{\omega}$$

Đối với dòng đồng dạng tỉ số đó cần phải lập được cùng một tỉ lệ của vận tốc và diện tích. Vì hai dòng đồng dạng động lực học thì cũng đồng dạng về hình học và động học nên tỉ lệ diện tích và về vận tốc điểm trên mặt cắt của dòng chảy đang xét phải cố định ($\alpha_u = \text{const}$; $\alpha_\omega = \text{const}$).

- Vậy có thể viết :

$$\alpha_v \cdot v = \frac{\int \alpha_u \cdot u \cdot \alpha_\omega \cdot d\omega}{\alpha_\omega \cdot \omega}$$

hoặc sau khi ước lược :

$$\alpha_v \cdot v = \alpha_u \frac{\int u d\omega}{\omega}$$

do đó

$$\alpha_v = \alpha_u$$

Do đó điều kiện đồng dạng của hai dòng chảy có thể phát biểu như sau : đối với các dòng chảy (hiện tượng) đồng dạng, tiêu chuẩn không thứ nguyên được xác định từ các giá trị trung bình của các đại lượng cùng dấu, phải bằng nhau.

Các điều kiện đồng dạng động lực học kể trên là cần và đủ để thực hiện sự đồng dạng về thủy động lực học.

§XIX-4. CÁC TIÊU CHUẨN ĐỒNG DẠNG THỦY ĐỘNG LỰC HỌC

Để tìm các tiêu chuẩn đồng dạng thủy động lực học ta sử dụng các phương trình vi phân của dòng chảy chất lỏng nhớt và phương trình liên tục được viết dưới dạng sau đây :

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

$$Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z}$$

$$Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} ;$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Ta sẽ đưa các phương trình về dạng không thứ nguyên. Muốn thế ta dùng một vài đại lượng vật lý không đổi mà về bản chất có mối liên hệ với các đại lượng có trong các phương trình xuất phát. Đó là các tỉ số :

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= x/l_0 ; \bar{y} = y/l_0 ; \bar{z} = z/l_0 ; \\ \bar{u}_x &= u_x/u_0 ; \bar{u}_y = u_y/u_0 ; \bar{u}_z = u_z/u_0 ; \\ \bar{p} &= p/p_0 ; \bar{t} = t/t_0 ; \\ \bar{X} &= X/X_0 ; \bar{Y} = Y/Y_0 ; \bar{Z} = Z/Z_0 . \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Trong các tỉ số này dấu ngang bên trên là được dùng để chỉ các lượng không thứ nguyên của hình chiếu do dịch chuyển của phần tử chất lỏng, vận tốc của chất điểm đó, các đại lượng áp suất thủy động và hình chiếu của các lực khối đơn vị ;

Các đại lượng mang kí hiệu "o" - chỉ việc đưa đại lượng chuẩn về chiều dài và vận tốc v.v... vào phương trình.

Mật độ và độ nhớt - các đại lượng có giá trị không đổi đối với chất lỏng không nén dưới nhiệt độ cố định, về bản chất vật lý chính là các đại lượng đặc trưng.

Vậy các phương trình chuyển động và liên tục (chỉ viết cho 1 trục tọa độ, các trục khác cũng viết tương tự) sẽ có dạng :

$$\left. \begin{aligned} X_0 \bar{X} - \frac{p_0}{\rho l_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\nu u_0}{l_0^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial \bar{z}^2} \right) &= \\ = \frac{u_0}{t_0} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{t}} + \frac{u_0^2}{l_0} \left(\bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{x}} + u_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{y}} + u_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{z}} \right) ; & \\ \frac{u_0}{l_0} \left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{z}} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Các tỉ lệ vận tốc và chiều dài luôn luôn khác không và vô cùng, vì vậy phương trình liên tục trong hệ (30) đối với dòng chảy của chất lỏng không nén là thỏa mãn tính đồng nhất. Do đó trong hệ phương trình đang xét có thể loại trừ phương trình này.

Ta viết các phương trình còn lại dưới dạng không thứ nguyên, muốn thế ta chia từng số hạng cho u_0^2/l_0 và được :

$$\begin{aligned} & \frac{X_o l_o}{u_o^2} \bar{X} - \frac{P_o}{\rho u_o^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\nu}{u_o l_o} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial \bar{z}^2} \right) = \dots \\ & = \frac{l_o}{u_o t_o} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{y}} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{z}} \end{aligned} \quad (31)$$

Trong phương trình (31) tất cả các số hạng không thứ nguyên, là các tổ hợp không thứ nguyên bao gồm các đại lượng vật lí đặc trưng.

Đối với các dòng chảy đồng dạng các phương trình không thứ nguyên sẽ giống nhau chỉ trong trường hợp khi các hệ số, ở đây là các tổ hợp không thứ nguyên, cũng giống nhau :

$$\frac{X_o l_o}{u_o^2} = \text{idem}; \quad \frac{P_o}{\rho u_o^2} = \text{idem}; \quad \frac{\nu}{u_o l_o} = \text{idem}; \quad \frac{l_o}{u_o t_o} = \text{idem} \quad (32)$$

Các tổ hợp không thứ nguyên đã viết là các tiêu chuẩn đồng dạng động lực học

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_o^2}{X_o l_o} &= Fr - \text{tiêu chuẩn Foud} ; \text{lực cơ bản} - \text{lực trọng trường} ; \\ \frac{P_o}{\rho u_o^2} &= Eu - \text{tiêu chuẩn Ôle} ; \text{lực cơ bản} - \text{áp lực} ; \\ \frac{u_o l_o}{\nu} &= Re - \text{tiêu chuẩn Râyôn} ; \text{lực cơ bản} - \text{lực nhớt} ; \\ \frac{l_o}{u_o t_o} &= Sh - \text{tiêu chuẩn Strukhal} ; \text{lực cơ bản} - \text{lực quán tính.} \end{aligned} \right\} (33)$$

Đối với chuyển động của chất lỏng không nén, qua kết quả phân tích thứ nguyên các phương trình vi phân ta sẽ có 4 tiêu chuẩn không thứ nguyên mà từ đó ta được phương trình tiêu chuẩn :

$$\varphi(Fr ; Eu ; Re ; Sh) = 0 \quad (34)$$

Ta sẽ giải thích ý nghĩa vật lí của các tiêu chuẩn đồng dạng động lực học.

Trong khi viết phương trình vi phân chuyển động dưới dạng không thứ nguyên ta đã chia các số hạng của phương trình đó cho hệ số tính với lực quán tính (đối lưu) đơn vị. Do đó các hệ số không thứ nguyên là các tỉ số của các lực tự nhiên khác nhau đối với lực quán tính.

Ví dụ, hệ số của số hạng đầu về trái của phương trình (31) là tỉ số giữa lực khối và lực quán tính, số Froude là độ lớn của tỉ số giữa lực quán tính

và lực khối. Trong trường trọng lực lực khối chính là lực trọng trường. Trong trường hợp này tiêu chuẩn Froude đặc trưng cho tỉ số giữa lực quán tính và trọng lực.

Hệ số của số hạng thứ hai - tiêu chuẩn Ole, là tỉ số giữa áp lực thủy động và lực quán tính.

Tỉ số giữa lực quán tính và lực nhớt được đặc trưng bằng tiêu chuẩn Râyôn.

Hệ số của số hạng thứ nhất vế phải của phương trình (31) là tỉ số giữa lực quán tính cục bộ và đối lưu - chính là tiêu chuẩn Strukhal.

Đạt được sự cân bằng của các tiêu chuẩn không thứ nguyên chủ yếu của dòng chảy tự nhiên và dòng chảy mô hình là đã đi đến sự đồng dạng động lực hoàn thiện cho các hiện tượng đang xét.

Tuy nhiên điều đó rất hiếm xảy ra do tính phức tạp của hiện tượng vì thế trên thực tế thường là khi phân tích các hiện tượng đồng dạng người ta đã chọn lực có tác động quyết định đối với hiện tượng (các lực khác có thể bỏ qua) để làm lực đặc trưng. Vậy trong trường hợp này sự đồng dạng chỉ còn là đồng dạng động lực bộ phận.

Ta xét trường hợp, khi lực cơ bản đặc trưng cho hiện tượng thủy động lực là lực trọng trường $F = mg$; các lực còn lại có thể bỏ qua. Do đó từ quan hệ (28) ta được :

$$Ne_{(g)} = \frac{mg}{\rho u^2 l^2} = \text{idem}$$

Sau khi ước lược ta được :

$$Ne_{(g)} = \frac{lg}{u^2} = \text{idem}$$

hoặc
$$\frac{1}{Ne_{(g)}} = Fr = \frac{u^2}{gl} = \text{idem} \quad (35)$$

Do đó tiêu chuẩn của đồng dạng động lực bộ phận trong trường hợp đang xét là tiêu chuẩn Froude.

Giả thiết bây giờ vai trò quyết định lại là lực ma sát (nhớt); $F_{ms} = \mu S du/dn$. Sau khi thay thế biểu thức lực đó vào tiêu chuẩn đồng dạng Niuton, ta được :

$$Ne_{(\mu)} = \frac{\tau S}{\rho l^2 u^2} = \frac{\mu S du/dn}{\rho l^2 u^2}$$

Vì $S \propto l^2$, còn $du/dn \propto l/t$, ta viết :

$$Ne_{(\mu)} = \text{const} \frac{\nu}{lu} = \text{idem}$$

hoặc
$$\frac{1}{Ne_{(\mu)}} = Re = \frac{ul}{\nu} = \text{idem} \quad (36)$$

Do đó khi lực cơ bản là lực nhớt thì tiêu chuẩn đồng dạng động lực bộ phận là tiêu chuẩn Râyôn.

Nếu các lực cơ bản là áp lực thủy động lực thì tiêu chuẩn đồng dạng bộ phận là tiêu chuẩn Ole :

$$\bar{F}_{(p)} = pS ;$$

$$Ne_{(p)} = \frac{F_{(p)}}{\rho l^2 u^2} = \frac{pl^2}{\rho l^2 u^2} = \frac{p}{\rho u^2} = \text{idem} \quad (37)$$

hoặc
$$Ne_{(p)} = Eu = \frac{p}{\rho u^2}$$

Khi lực tác động quyết định là sức căng mặt ngoài thì tiêu chuẩn đồng dạng bộ phận là tiêu chuẩn Vâybe :

$$We = \rho u^2 l / \sigma \quad (38)$$

Trong đó : σ - hệ số sức căng mặt ngoài.

Tiêu chuẩn không thứ nguyên của đồng dạng động lực có thể là quyết định và không quyết định.

Quyết định là các tiêu chuẩn, được bao gồm bởi các đại lượng vật lí (hoặc các giá trị trung bình của chúng) nằm trong điều kiện đơn trị ; nói cách khác, tất cả các đại lượng, nằm trong tiêu chuẩn quyết định được cho bằng cách này hay cách khác trong các điều kiện của bài toán, ví dụ, trên mặt biên của khu vực được xem xét của dòng chảy hoặc là trong các điểm đặc trưng của chúng.

Các tiêu chuẩn không đạt các yêu cầu trên, được gọi là không quyết định. Các tiêu chuẩn này cũng có thể rút ra từ các phương trình vi phân.

Trong từng trường hợp cụ thể trên cơ sở phân tích bản chất vật lí của hiện tượng và các phương trình mô tả chúng, ta có thể xác định được rằng tiêu chuẩn nào là dấu hiệu của đồng dạng động lực (đó cũng chính là các tiêu chuẩn quyết định), còn các tiêu chuẩn còn lại là do hệ quả của tiêu chuẩn đồng dạng đã xác định nói trên.

Ví dụ trong chuyển động ổn định của chất lỏng nhớt trong ống có áp tiêu chuẩn quyết định là tiêu chuẩn Râynon, vì tiêu chuẩn đó được lập nên bởi các đại lượng cho trước của bài toán (kích thước của mặt cắt vào, phân bố vận tốc trong đó).

Tiêu chuẩn Ole không thể là quyết định vì áp suất trong tiêu chuẩn đó là đại lượng tính ra chứ không phải cho trước.

Tiêu chuẩn Froude cũng bị loại khỏi số tiêu chuẩn quyết định vì trong dòng có áp trọng lực có thể bỏ qua.

Cũng vậy tiêu chuẩn Strukhal đối với dòng chảy ổn định không có ý nghĩa vật lí.

Do đó phương trình tiêu chuẩn (34) trong trường hợp đang xét có dạng :

$$Eu = f(Re) \quad (39)$$

Trong các bài toán khác nhau tùy thuộc vào cách đặt vấn đề mà các tiêu chuẩn quyết định có thể trở thành không quyết định và ngược lại.

Đôi khi các tiêu chuẩn đồng dạng được rút ra từ các phương trình vi phân tỏ ra là chưa đủ, vì không phải luôn luôn có thể biểu thị đơn trị các điều kiện ban đầu và điều kiện biên.

Trong các trường hợp này các đại lượng không thứ nguyên còn thiếu có thể xác định trên cơ sở lí thuyết thứ nguyên và các kết quả nghiên cứu thực nghiệm trên mô hình.

Ví dụ, đối với ống nhám đó là đại lượng độ nhám tương đối, với chảy bao vật rắn bằng dòng chất lỏng hoặc chất khí - hình dạng của vật, quan hệ giữa các kích thước v.v...

Mức độ ảnh hưởng của từng tiêu chuẩn có trong phương trình (3) là không giống nhau và phụ thuộc vào quan hệ lực có tác động đến hiện tượng đang xét. Đối với chuyển động đẳng nhiệt của chất lỏng nhớt phương trình (3) trở thành phương trình (34).

Đối với chuyển động ổn định có áp của chất lỏng, phương trình đó trên cơ sở các lập luận trên và có xét đến độ nhám bên trong ống, có thể được viết dưới dạng :

$$Eu = f(Re ; k/d) \quad (40)$$

Tiêu chuẩn Oie là :

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho u^2} = \frac{\rho g h_d}{\rho u^2} = \frac{g h_d}{u^2} \quad (41)$$

Trong đó h_d - tổn thất năng lượng theo chiều dài.

Thay tổn thất năng lượng bằng công thức Vâyxbác-Đácxi vào (41) ta được :

$$Eu = \lambda \frac{l}{2d}$$

hoặc :

$$\lambda = Eu \cdot 2d/l \quad (42)$$

Vì đại lượng $2d/l$ được chọn tự do, phương trình (42) có thể viết dưới dạng :

$$\lambda = f(Re ; k/d) \quad (43)$$

Công thức tổng quát của Altsul :

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{68}{Re} + \frac{k_{td}}{d} \right)^{0,25}$$

là một sự thành công nhất trong việc viết công thức (43) dưới dạng mở. Từ quan điểm lí thuyết đồng dạng có 2 khu vực sức cản quan trọng : khu vực chảy tầng và khu vực bình phương sức cản. Khu vực thứ nhất theo kết quả

thí nghiệm đường cong quan hệ $\lambda = f(Re)$ là tập hợp của tất cả các số liệu thí nghiệm không phụ thuộc vào độ nhám của ống ; trong khu vực thứ hai, hệ số λ đối với độ nhám tương đối đã định có trị số cố định.

Ta đã biết sự không phụ thuộc của các điều kiện chuyển động đối với một tiêu chuẩn bất kì nào được gọi là tính tự động mô hình đối với tiêu chuẩn đó.

Do đó trong chuyển động đẳng nhiệt của chất lỏng trong ống có 2 khu vực tự động mô hình. Khu vực thứ nhất trong số đó là tự động mô hình đối với độ nhám tương đối (khu vực chảy tầng) ; khu vực thứ hai (khu vực bình phương sức cản) - tự động mô hình đối với số Rây-nôn.

Đối với chuyển động tầng tiêu chuẩn Ole và Rây-nôn có mối quan hệ sau :

$$Eu = idem/Re \quad (44)$$

còn hệ số λ , như đã biết, được xác định theo công thức

$$\lambda = 64/Re$$

Trong khu vực bình phương sức cản có thể bỏ qua lực nhớt, vì vậy đối với chuyển động ổn định tiêu chuẩn độc nhất của đồng dạng động lực là tiêu chuẩn Ole. Trong trường hợp này cả hệ số λ cũng cố định đối với tất cả các giá trị của số Rây-nôn $Re \geq Re_{Bpsc}$.

Đặc tính của khu vực tự động mô hình thứ hai là hệ số ma sát thủy lực của dòng chảy tự nhiên và của dòng chảy trong mô hình phải bằng nhau ($\lambda_{TN} = \lambda_{MH}$).

Cần nhấn mạnh rằng nhận xét trên đây đúng cả với hệ số sức cản thủy lực cục bộ.

Đồng dạng thủy động lực hoàn thiện chỉ có thể thực hiện được khi có sự cân bằng của tất cả các tiêu chuẩn được xác định bằng điều kiện của (33).

Đối với chuyển động ổn định các tiêu chuẩn quyết định là tiêu chuẩn Rây-nôn và Froude, không quyết định là tiêu chuẩn Ole.

Tuy nhiên, chặt chẽ mà nói thì điều kiện của đồng dạng động lực hoàn thiện là không thể thực hiện, vì ngay cả các tiêu chuẩn quyết định là Re và Fr trên thực tế cũng không thể thực hiện đồng thời. Do đó để có được sự đồng thời của các tiêu chuẩn : các tỉ lệ của các đại lượng vật lí nằm trong các tiêu chuẩn đồng dạng phải giống nhau.

Ta giả thiết là 2 dòng chảy hoàn toàn đồng dạng cơ học, tức là $Re_{TN} = Re_{MH}$ và $Fr_{TN} = Fr_{MH}$. Ta xác định tỉ lệ vận tốc để làm ví dụ cho các dòng chảy đó hoặc là từ tiêu chuẩn Re , hoặc là từ Fr .

Từ đẳng thức $Re_{TN} = Re_{MH}$ ta được với tỉ lệ đã cho về chiều dài α_1 tỉ lệ vận tốc được xác định cho cùng một chất lỏng $\nu_{TN} = \nu_{MH} = \nu$ từ hệ thức :

$$u_{TN} l_{TN} / \nu = u_{MH} l_{MH} / \nu \quad (45)$$

hoặc $\alpha_u = \alpha_l^{-1,0}$, tức là khi giảm kích thước chiều dài của mô hình so với tự nhiên α_l lần thì vận tốc trên mô hình cũng tăng ấy lần tăng lên.

Mặt khác từ đẳng thức $Fr_{TH} = Fr_{MH}$ ta được $\alpha_u = \alpha_l^{0,5}$, tức là cùng với việc giảm tỉ lệ chiều dài (giảm kích thước mô hình), vận tốc trên mô hình lại phải giảm đi.

Mâu thuẫn xuất hiện khi ta cố gắng cùng một lúc thỏa mãn cả hai yêu cầu đồng dạng của tiêu chuẩn Re và Fr , chỉ có thể khắc phục bằng cách trên mô hình dùng loại chất lỏng khác với ngoài tự nhiên về độ nhớt mà chất chệ là sẽ phá hoại điều kiện đồng dạng động lực hoàn thiện.

Nếu ta thực hiện việc so sánh đối với các tỉ lệ còn lại thì càng chứng tỏ việc đồng thời thực hiện các tiêu chuẩn đồng dạng là điều không thể thực hiện.

Trong thực tế người ta rất dễ dàng xác định lực có ảnh hưởng quyết định đối với hiện tượng so với các lực khác. Trong trường hợp đó ta chỉ cần mô hình hóa theo một tiêu chuẩn, và lúc này ta có sự đồng dạng bộ phận hay là đồng dạng gần đúng.

§XIX-5. MÔ HÌNH HÓA CÁC HIỆN TƯỢNG THỦY ĐỘNG LỰC

Mô hình hóa bao gồm việc xây dựng mô hình, có cùng một bản chất vật lí như của hiện tượng trong tự nhiên, và nghiên cứu hiện tượng đó trên mô hình và cuối cùng là việc tính đối các kết quả thí nghiệm ra tự nhiên.

Phương pháp mô hình hóa được dựa trên các định luật của lí thuyết đồng dạng cơ học và lí thuyết thứ nguyên.

Mô hình vật lí hoàn thiện rất khó gặp cũng như sự đồng dạng cơ học hoàn thiện. Trong thực tế thường sử dụng mô hình hóa bộ phận hay gần đúng khi mô hình nghiên cứu chỉ về các biểu hiện cơ bản là đồng dạng với hiện tượng tự nhiên.

Về mặt đó trong mô hình hóa bộ phận, người ta sử dụng tính chất đồng dạng gần đúng theo một trong số các tiêu chuẩn quyết định không thứ nguyên. Ở đây nhiệm vụ cơ bản là tìm mối quan hệ giữa các tiêu chuẩn quyết định và không quyết định cũng như tìm các tỉ lệ cho các đại lượng vật lí cơ bản.

Mô hình hóa bộ phận theo tiêu chuẩn Râyôn

Mô hình hóa theo tiêu chuẩn Re được thực hiện trong trường hợp khi lực tác động chủ yếu đối với dòng chất lỏng hoặc chất khí là lực ma sát (nhớt) và quán tính. Như đã nói trên (45) trong trường hợp này ta có đẳng thức về các tiêu chuẩn Râyôn đối với tự nhiên và mô hình.

Vì $\nu_{TN} = \nu_{MH} = \nu$ và công thức (45) có dạng :

$$u_{TN}/\nu_{TN} = u_{MH}/\nu_{MH}$$

do đó ta xác định được tỉ lệ vận tốc : $\alpha_u = \alpha_l^{-1,0}$

Các tỉ lệ của các đại lượng vật lí khác tìm qua các hệ thức đơn giản giữa chúng. Ví dụ để xác định tỉ lệ về lưu lượng ta sử dụng biểu thức

$$Q = \int_{\omega} u d\omega, \text{ mà có thể, đối với đồng dạng động lực, viết dưới dạng tổ hợp}$$

$$\text{các hệ số tỉ lệ : } \alpha_Q = \alpha_u \cdot \alpha_{\omega} = \alpha_l^{-1,0} \cdot \alpha_l^{2,0} = \alpha_l^{1,0}$$

Trong đó α_Q - tỉ lệ lưu lượng.

Tương tự ta có các tỉ lệ cho các đại lượng vật lí khác :

**Các tỉ lệ của các đại lượng vật lí khi mô hình hóa
theo tiêu chuẩn Râyôn và Froude**

Các đại lượng vật lí	Các tỉ lệ khi mô hình hóa	
	Theo Re	Theo Fr
Vận tốc u	$\alpha_l^{-1,0}$	$\alpha_l^{0,5}$
Lưu lượng Q	$\alpha_l^{1,0}$	$\alpha_l^{2,5}$
Thời gian t	$\alpha_l^{2,0}$	$\alpha_l^{0,5}$
Lực F	$\alpha_l^0 = 1,0$	$\alpha_l^{3,0}$
Áp suất p	$\alpha_l^{-2,0}$	$\alpha_l^{1,0}$
Công A	$\alpha_l^{1,0}$	$\alpha_l^{4,0}$
Công suất N	$\alpha_l^{-1,0}$	$\alpha_l^{3,5}$

Sử dụng nguyên lí mô hình hóa bộ phận theo tiêu chuẩn Râyôn, có thể chứng minh được rằng bằng một trong số các dấu hiệu cơ bản của đồng dạng động lực với lực quyết định là lực ma sát, ta có được đẳng thức về hệ số ma sát thủy lực của dòng chảy tự nhiên và trên mô hình :

$$\lambda_{TN} = \lambda_{MH}$$

Thực vậy từ đẳng thức

$$\left(\frac{F_{ms}}{\rho l^2 u^2} \right)_{TN} = \left(\frac{F_{ms}}{\rho l^2 u^2} \right)_{MH}$$

do đó :

$$\left(\frac{\tau_o}{\rho u^2} \right)_{TN} = \left(\frac{\tau_o}{\rho u^2} \right)_{MH} \quad (46)$$

và khi thay :

$$u_*^2 = \tau_o / \rho$$

$$\text{ta được : } (u_*/v)_{TN} = (u_*/v)_{MH} \quad (47)$$

Trong đó : v và u_* - lần lượt là vận tốc trung bình và động lực.

Mô hình hóa bộ phận theo tiêu chuẩn Froude

Mô hình hóa theo tiêu chuẩn Froude được dùng để nghiên cứu các dòng chảy mà lực có tác động quyết định là lực quán tính và lực trọng trường, ví dụ dòng chảy với mặt tự do, dòng tia và các chất lỏng khác.

Biểu thức được dùng làm cơ sở trong trường hợp này là đẳng thức về tiêu chuẩn Froude của dòng chảy tự nhiên và trên mô hình, vì $g_{TN} = g_{MH} = g$ nên :

$$(u^2/l)_{TN} = (u^2/l)_{MH} \quad (48)$$

Từ (48) ta được tỉ lệ vận tốc :

$$\alpha_u = \alpha_l^{0,5}$$

Các tỉ lệ của các đại lượng vật lí khác được xác định dễ dàng và ghi trong bảng trên. Từ bảng này ta thấy rằng các tỉ lệ của cùng một đại lượng vật lí theo các tiêu chuẩn đồng dạng khác nhau có giá trị khác nhau. Điều đó chứng tỏ rằng các tiêu chuẩn đồng dạng không thể thực hiện đồng thời, tức là không thể thực hiện sự đồng dạng hoàn thiện động lực cho các dòng chảy của cùng một chất lỏng.

Mô hình hóa theo tiêu chuẩn Râyôn và Froude

Ta xét khả năng mô hình hóa gần đúng của các hiện tượng thủy khí khi cùng một lúc có sự tác động của lực quán tính, ma sát và trọng lực, tức là khi $Re_{TN} = Re_{MH}$ và $Fr_{TN} = Fr_{MH}$. Từ đẳng thức của các tiêu chuẩn nói trên, ta thấy rằng trong trường hợp này các tỉ lệ chiều dài và độ nhớt có mối quan hệ thông qua biểu thức $\alpha_v = \alpha_l^{1,5}$. Biểu thức đó có thể dễ dàng rút ra từ (45) và (46).

Mặt khác, khi mô hình hóa theo các tiêu chuẩn Re và Fr cần phải : trong dòng chảy trên mô hình phải sử dụng chất lỏng mà độ nhớt của nó khác với độ nhớt của chất lỏng tự nhiên $\alpha_l^{1,5}$ lần. Điều kiện này trong các phòng thí nghiệm thông thường không thực hiện nổi.

Trong một số trường hợp để thực hiện mô hình hóa gần đúng người ta sử dụng phương pháp mô hình khí có áp; mô hình hóa với sự biến dạng cục bộ về hình học.

§XIX-6. CÁC PHƯƠNG PHÁP TƯƠNG TỰ

Nếu một vài hiện tượng khác nhau về bản chất vật lí, có thể biểu thị bằng cùng một số các phương trình vi phân dưới cùng một điều kiện đơn trị, thì các hiện tượng như vậy được gọi là tương tự với nhau, còn phương pháp nghiên cứu hiện tượng đó - phương pháp tương tự.

Trong cơ học chất lỏng kĩ thuật thường sử dụng tương tự diện thủy động lực (EGDA), tương tự khí thủy lực và tương tự từ thủy động và các tương tự khác.

Các tương tự nói trên thuộc về chuyển động không xoáy (thế) của chất lỏng không nhớt, không nén, được mô tả bằng phương trình Laplac cho vận tốc thế và hàm số dòng :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 ;$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (49)$$

có xét đến các điều kiện biên :

trên mặt cứng không thấm

$$u_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial s} = 0 \quad (50)$$

tại điểm cách xa vô cùng của dòng phẳng song song dọc theo trục Ox

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_\infty \quad (51)$$

$$u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

Sự tương tự điện thủy động lực dựa trên cơ sở phương trình Laplac (49) và các điều kiện biên (50), (51), và thỏa mãn điện thế φ_d và hàm số cường độ dòng điện ψ_d .

Tương tự khí - thủy lực là tương tự giữa dòng chảy của khí lí tưởng dưới tốc độ lớn và chuyển động của chất lỏng (nước) trong kênh hở dưới chiều sâu tương đối nhỏ.

Về cơ bản tương tự khí thủy lực có 2 hệ phương trình tương đương của dòng chảy 2 chiều của khí lí tưởng và chất lỏng lí tưởng.

Phương trình liên tục của chuyển động ổn định của khí có dạng :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y) = 0 \quad (52)$$

Phương trình tương tự đối với dòng chảy phẳng hở được viết như sau :

$$\frac{\partial}{\partial x} (h u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (h u_y) = 0 \quad (53)$$

Trong đó :

u_x và u_y - các thành phần vận tốc trung bình theo chiều sâu ;

h - chiều sâu dòng chảy.

Phương pháp tương tự khí - thủy lực hiện nay được sử dụng rộng rãi cho dòng trước âm cũng như cho dòng vượt âm chảy bao vật rắn.

PHỤ LỤC 1

Hàm số $f(h)$ để tính dòng không đều trong kênh dốc thuận $i > 0$

η	x	2,00	2,50	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,50	5,00	5,50
0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,05		0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050
0,10		0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
0,15		0,151	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150
0,20		0,202	0,201	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200
0,25		0,255	0,252	0,251	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250
0,30		0,309	0,304	0,302	0,301	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300
0,35		0,365	0,357	0,354	0,352	0,351	0,351	0,351	0,350	0,350	0,350
0,40		0,423	0,411	0,407	0,404	0,403	0,403	0,402	0,401	0,400	0,400
0,45		0,484	0,468	0,461	0,458	0,456	0,455	0,454	0,452	0,451	0,450
0,50		0,549	0,527	0,517	0,513	0,510	0,508	0,507	0,504	0,502	0,501
0,55		0,619	0,590	0,575	0,570	0,566	0,564	0,561	0,556	0,554	0,552
0,60		0,693	0,657	0,637	0,630	0,624	0,621	0,617	0,610	0,607	0,605
0,61		0,709	0,671	0,650	0,642	0,636	0,632	0,628	0,621	0,618	0,615
0,62		0,725	0,685	0,663	0,654	0,648	0,644	0,640	0,632	0,629	0,626
0,63		0,741	0,699	0,676	0,667	0,660	0,656	0,652	0,644	0,640	0,637
0,64		0,758	0,714	0,689	0,680	0,673	0,668	0,664	0,656	0,651	0,648
0,65		0,775	0,729	0,703	0,693	0,686	0,681	0,676	0,668	0,662	0,659
0,66		0,792	0,744	0,717	0,706	0,699	0,694	0,688	0,680	0,674	0,670
0,67		0,810	0,760	0,731	0,720	0,712	0,707	0,700	0,692	0,686	0,681
0,68		0,829	0,776	0,746	0,734	0,725	0,720	0,713	0,704	0,698	0,692
0,69		0,848	0,792	0,761	0,748	0,739	0,733	0,726	0,716	0,710	0,704
0,70		0,867	0,809	0,776	0,763	0,753	0,746	0,739	0,728	0,722	0,716
0,71		0,887	0,826	0,791	0,778	0,767	0,760	0,752	0,741	0,734	0,728
0,72		0,907	0,843	0,807	0,793	0,781	0,774	0,766	0,754	0,747	0,740
0,73		0,928	0,861	0,823	0,808	0,796	0,788	0,780	0,767	0,760	0,752
0,74		0,950	0,880	0,840	0,823	0,811	0,802	0,794	0,780	0,773	0,764
0,75		0,972	0,899	0,857	0,839	0,827	0,816	0,808	0,794	0,786	0,776
0,76		0,996	0,919	0,874	0,855	0,843	0,832	0,823	0,808	0,799	0,788
0,77		1,020	0,939	0,892	0,872	0,860	0,848	0,838	0,822	0,812	0,801
0,78		1,045	0,960	0,911	0,890	0,877	0,865	0,854	0,837	0,826	0,814
0,79		1,071	0,982	0,930	0,908	0,895	0,882	0,870	0,852	0,840	0,828

Phụ lục I (tiếp theo)

η \ x	2,00	2,50	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,50	5,00	5,50
1,005	2,997	2,139	1,647	1,477	1,329	1,218	1,107	0,954	0,826	0,730
1,010	2,652	1,863	1,419	1,265	1,138	1,031	0,936	0,790	0,680	0,598
1,015	2,450	1,704	1,291	1,140	1,022	0,922	0,836	0,702	0,603	0,525
1,020	2,307	1,591	1,193	1,053	0,940	0,847	0,766	0,641	0,546	0,474
1,025	2,197	1,504	1,119	0,986	0,879	0,789	0,712	0,594	0,503	0,435
1,030	2,107	1,432	1,061	0,931	0,827	0,742	0,668	0,555	0,468	0,402
1,035	2,031	1,372	1,010	0,885	0,784	0,702	0,632	0,522	0,439	0,375
1,040	1,966	1,320	0,967	0,845	0,747	0,668	0,600	0,494	0,415	0,353
1,045	1,908	1,274	0,929	0,810	0,716	0,638	0,572	0,469	0,394	0,334
1,05	1,857	1,234	0,896	0,779	0,687	0,612	0,548	0,447	0,375	0,317
1,06	1,768	1,164	0,838	0,726	0,640	0,566	0,506	0,411	0,343	0,290
1,07	1,693	1,105	0,790	0,682	0,600	0,529	0,471	0,381	0,316	0,266
1,08	1,629	1,053	0,749	0,645	0,565	0,497	0,441	0,355	0,292	0,245
1,09	1,573	1,009	0,713	0,612	0,534	0,469	0,415	0,332	0,271	0,226
1,10	1,522	0,969	0,680	0,583	0,506	0,444	0,392	0,312	0,253	0,210
1,11	1,477	0,933	0,652	0,557	0,482	0,422	0,372	0,293	0,237	0,196
1,12	1,436	0,901	0,626	0,533	0,461	0,402	0,354	0,277	0,223	0,183
1,13	1,398	0,872	0,602	0,512	0,442	0,384	0,337	0,263	0,211	0,172
1,14	1,363	0,846	0,581	0,493	0,424	0,368	0,322	0,250	0,200	0,162
1,15	1,331	0,821	0,561	0,475	0,407	0,353	0,308	0,238	0,190	0,153
1,16	1,301	0,797	0,542	0,458	0,391	0,339	0,295	0,227	0,181	0,145
1,17	1,273	0,775	0,525	0,442	0,377	0,326	0,283	0,217	0,173	0,137
1,18	1,247	0,755	0,510	0,427	0,364	0,314	0,272	0,208	0,165	0,130
1,19	1,222	0,736	0,495	0,413	0,352	0,302	0,262	0,200	0,158	0,124
1,20	1,199	0,718	0,480	0,400	0,341	0,292	0,252	0,192	0,151	0,118
1,21	1,177	0,701	0,467	0,388	0,330	0,282	0,243	0,184	0,144	0,113
1,22	1,156	0,685	0,454	0,377	0,320	0,272	0,235	0,177	0,138	0,108
1,23	1,136	0,670	0,442	0,366	0,310	0,263	0,227	0,170	0,132	0,103
1,24	1,117	0,656	0,431	0,356	0,301	0,255	0,219	0,164	0,126	0,093
1,25	1,098	0,643	0,420	0,346	0,292	0,247	0,212	0,158	0,121	0,094
1,26	1,081	0,630	0,410	0,337	0,284	0,240	0,205	0,152	0,116	0,090
1,27	1,065	0,618	0,400	0,328	0,276	0,233	0,199	0,147	0,111	0,086
1,28	1,049	0,606	0,391	0,320	0,268	0,226	0,193	0,142	0,107	0,082

Phụ lục I (tiếp theo)

η \ x	2,00	2,50	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,50	5,00	5,50
1,29	1,033	0,594	0,382	0,312	0,261	0,220	0,187	0,137	0,103	0,079
1,30	1,018	0,582	0,373	0,304	0,254	0,214	0,181	0,133	0,099	0,076
1,31	1,004	0,571	0,365	0,297	0,247	0,208	0,176	0,129	0,095	0,073
1,32	0,990	0,561	0,357	0,290	0,241	0,102	0,171	0,125	0,092	0,070
1,33	0,977	0,551	0,349	0,283	0,235	0,197	0,166	0,121	0,089	0,067
1,34	0,964	0,542	0,341	0,277	0,229	0,192	0,161	0,117	0,086	0,064
1,35	0,952	0,533	0,334	0,271	0,224	0,187	0,157	0,113	0,083	0,061
1,36	0,940	0,524	0,328	0,265	0,219	0,182	0,153	0,109	0,080	0,058
1,37	0,928	0,516	0,322	0,259	0,214	0,177	0,149	0,106	0,077	0,056
1,38	0,917	0,508	0,316	0,253	0,209	0,173	0,145	0,103	0,074	0,054
1,39	0,906	0,500	0,310	0,248	0,204	0,169	0,141	0,100	0,072	0,052
1,40	0,896	0,492	0,304	0,243	0,199	0,165	0,137	0,097	0,070	0,050
1,41	0,886	0,484	0,298	0,238	0,195	0,161	0,134	0,094	0,068	0,048
1,42	0,876	0,477	0,293	0,233	0,191	0,157	0,131	0,091	0,066	0,046
1,43	0,866	0,470	0,288	0,229	0,187	0,153	0,128	0,088	0,064	0,045
1,44	0,856	0,463	0,283	0,225	0,183	0,150	0,125	0,085	0,062	0,044
1,45	0,847	0,456	0,278	0,221	0,179	0,147	0,122	0,083	0,060	0,043
1,46	0,838	0,450	0,273	0,217	0,175	0,144	0,119	0,081	0,058	0,042
1,47	0,829	0,444	0,268	0,213	0,171	0,141	0,116	0,079	0,056	0,041
1,48	0,821	0,438	0,263	0,209	0,168	0,138	0,113	0,077	0,054	0,040
1,49	0,813	0,432	0,259	0,205	0,165	0,135	0,110	0,075	0,053	0,039
1,50	0,805	0,426	0,255	0,201	0,162	0,132	0,108	0,073	0,052	0,038
1,55	0,767	0,399	0,235	0,184	0,147	0,119	0,097	0,065	0,045	0,032
1,60	0,733	0,376	0,218	0,170	0,134	0,108	0,087	0,058	0,039	0,027
1,65	0,703	0,355	0,203	0,157	0,123	0,098	0,070	0,052	0,034	0,023
1,70	0,675	0,336	0,189	0,145	0,113	0,090	0,072	0,046	0,030	0,020
1,75	0,650	0,318	0,177	0,134	0,104	0,083	0,065	0,041	0,026	0,017
1,80	0,626	0,303	0,166	0,124	0,096	0,077	0,060	0,037	0,023	0,015
1,85	0,605	0,289	0,156	0,115	0,089	0,071	0,055	0,033	0,020	0,013
1,90	0,585	0,276	0,147	0,108	0,083	0,066	0,050	0,030	0,018	0,011
1,95	0,567	0,264	0,139	0,102	0,078	0,061	0,046	0,027	0,016	0,009

PHỤ LỤC 2

Hàm số $\psi(\xi)$ để tính dòng không đều trong kênh đáy bằng ($i = 0$)

ξ	x	2,00	2,50	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,50	5,00	5,50
0		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,1000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,05		0,9501	0,9500	0,9500	0,9500	0,9500	0,9500	0,9500	0,9500	0,9500	0,9500
0,10		0,9003	0,9001	0,9000	0,9000	0,9000	0,9006	0,9000	0,9000	0,9000	0,9000
0,15		0,8511	0,8504	0,8501	0,8501	0,8500	0,8500	0,8500	0,8500	0,8500	0,8500
0,20		0,8027	0,8010	0,8004	0,8003	0,8002	0,8001	0,8001	0,8000	0,8000	0,8000
0,25		0,7552	0,7522	0,7509	0,7507	0,7504	0,7503	0,7502	0,7501	0,7500	0,7500
0,30		0,7090	0,7042	0,7020	0,7014	0,7010	0,7007	0,7005	0,7002	0,7001	0,7001
0,35		0,6643	0,6573	0,6537	0,6527	0,6520	0,6514	0,6511	0,6506	0,6503	0,6502
0,40		0,6213	0,6116	0,6064	0,6048	0,6036	0,6027	0,6021	0,6012	0,6007	0,6004
0,45		0,5804	0,5675	0,5602	0,5579	0,5561	0,5547	0,5537	0,5523	0,5514	0,5509
0,50		0,5417	0,5252	0,5156	0,5124	0,5098	0,5078	0,5063	0,5040	0,5026	0,5017
0,55		0,5054	0,4852	0,4729	0,4685	0,4651	0,4623	0,4601	0,4568	0,4546	0,4532
0,60		0,4720	0,4478	0,4324	0,4268	0,4223	0,4186	0,4156	0,4109	0,4078	0,4056
0,61		0,4656	0,4406	0,4246	0,4188	0,4140	0,4101	0,4069	0,4020	0,3986	0,3962
0,62		0,4594	0,4336	0,4169	0,4108	0,4059	0,4017	0,3983	0,3931	0,3894	0,3869
0,63		0,4533	0,4267	0,4094	0,4030	0,3978	0,3935	0,3898	0,3843	0,3804	0,3776
0,64		0,4474	0,4199	0,4019	0,3953	0,3898	0,3853	0,3815	0,3756	0,3714	0,3685
0,65		0,4415	0,4132	0,3946	0,3877	0,3820	0,3772	0,3732	0,7670	0,3626	0,3594
0,66		0,4358	0,4067	0,3874	0,3802	0,3743	0,3692	0,3650	0,3585	0,3538	0,3503
0,67		0,4303	0,4003	0,3804	0,3729	0,3667	0,3614	0,3570	0,3501	0,3451	0,3414
0,68		0,4248	0,3940	0,3735	0,3657	0,3592	0,3537	0,3491	0,3418	0,3365	0,3625
0,69		0,4195	0,3879	0,3667	0,3586	0,3518	0,3461	0,3413	0,3336	0,3280	0,3238
0,70		0,4143	0,3820	0,3600	0,3517	0,3446	0,3387	0,3336	0,3256	0,3196	0,3151
0,71		0,4093	0,3762	0,3535	0,3449	0,3376	0,3314	0,3261	0,3176	0,3113	0,3066
0,72		0,4044	0,3705	0,3472	0,3382	0,3307	0,3242	0,3187	0,3098	0,3032	0,2982
0,73		0,3997	0,3650	0,3410	0,3318	0,3239	0,3172	0,3115	0,3022	0,2952	0,2899
0,74		0,3951	0,3596	0,3350	0,3254	0,3173	0,3104	0,3044	0,2947	0,2874	0,2817
0,75		0,3906	0,3544	0,3291	0,3193	0,3109	0,3037	0,2975	0,2874	0,2797	0,2737
0,76		0,3863	0,3493	0,3234	0,3133	0,3046	0,2972	0,2907	0,2802	0,2721	0,2658
0,77		0,3822	0,3444	0,3179	0,3075	0,2985	0,2908	0,2841	0,2732	0,2647	0,2581

ξ	x	2,00	2,50	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	0,45	5,00	5,50
0,78		0,3782	0,3397	0,3125	0,3018	0,2926	0,2847	0,2777	0,2664	0,2575	0,2506
0,79		0,3743	0,3352	0,3074	0,2964	0,2869	0,2787	0,2715	0,2597	0,2505	0,2432
0,80		0,3707	0,3308	0,3024	0,2911	0,2814	0,2729	0,2655	0,2533	0,2437	0,2361
0,81		0,3672	0,3267	0,2975	0,2861	0,2761	0,2674	0,2597	0,2471	0,2371	0,2291
0,82		0,3638	0,3226	0,2930	0,2812	0,2710	0,2620	0,2541	0,2410	0,2307	0,2223
0,83		0,3606	0,3188	0,2886	0,2766	0,2661	0,2569	0,2488	0,2352	0,2245	0,2158
0,84		0,3576	0,3152	0,2845	0,2722	0,2614	0,2520	0,2436	0,2297	0,2185	0,2095
0,85		0,3547	0,3118	0,2805	0,2679	0,2570	0,2473	0,2387	0,2244	0,2129	0,2035
0,86		0,3520	0,3080	0,2768	0,2639	0,2528	0,2428	0,2341	0,2193	0,2074	0,1977
0,87		0,3495	0,3055	0,2732	0,2602	0,2488	0,2387	0,2297	0,2145	0,2023	0,1922
0,88		0,3472	0,3026	0,2699	0,2567	0,2450	0,2347	0,2256	0,2100	0,1974	0,1870
0,89		0,3450	0,3000	0,2669	0,2534	0,2415	0,2310	0,2217	0,2058	0,1928	0,1821
0,90		0,3430	0,2976	0,2640	0,2504	0,2383	0,2276	0,2181	0,2018	0,1886	0,1776
0,905		0,3421	0,2965	0,2626	0,2489	0,2368	0,2260	0,2164	0,2000	0,1866	0,1754
0,910		0,3412	0,2954	0,2614	0,2476	0,2354	0,2245	0,2148	0,1982	0,1846	0,1733
0,915		0,3404	0,2944	0,2602	0,2463	0,2340	0,2231	0,2133	0,1965	0,1828	0,1714
0,920		0,3396	0,2934	0,2591	0,2451	0,2327	0,2217	0,2118	0,1949	0,1811	0,1695
0,925		0,3388	0,2925	0,2580	0,2439	0,2315	0,2204	0,2104	0,1934	0,1794	0,1677
0,930		0,3381	0,2916	0,2570	0,2429	0,2303	0,2191	0,2091	0,1920	0,1778	0,1660
0,935		0,3375	0,2908	0,2561	0,2418	0,2292	0,2180	0,2079	0,1906	0,1764	0,1644
0,940		0,3369	0,2901	0,2552	0,2409	0,2282	0,2169	0,2068	0,1894	0,1750	0,1629
0,945		0,3363	0,2894	0,2544	0,2400	0,2273	0,2159	0,2057	0,1882	0,1737	0,1615
0,950		0,3358	0,2888	0,2536	0,2592	0,2264	0,2150	0,2048	0,1871	0,1725	0,1602
0,955		0,3353	0,2882	0,2529	0,2385	0,2256	0,2142	0,2039	0,1861	0,1714	0,1591
0,960		0,3349	0,2877	0,2523	0,2378	0,2249	0,2134	0,2031	0,1853	0,1705	0,1580
0,965		0,3345	0,2872	0,2518	0,2372	0,2243	0,2128	0,2024	0,1845	0,1696	0,1570
0,970		0,3342	0,2868	0,2513	0,2367	0,2238	0,2122	0,2017	0,1838	0,1688	0,1562
0,975		0,3339	0,2865	0,2509	0,2363	0,2233	0,2117	0,2012	0,1832	0,1682	0,1555
0,980		0,3337	0,2862	0,2506	0,2359	0,2229	0,2113	0,2008	0,1827	0,1677	0,1549
0,985		0,3336	0,2860	0,2503	0,2357	0,2226	0,2110	0,2005	0,1823	0,1672	0,1545
0,990		0,3334	0,2858	0,2502	0,2355	0,2224	0,2107	0,2002	0,1821	0,1669	0,1541
0,995		0,3334	0,2857	0,2500	0,2353	0,2223	0,2106	0,2000	0,1819	0,1667	0,1539

Phụ lục 2 (tiếp theo)

ξ	x											
	2,00	2,50	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,50	5,00	5,50		
1,000	0,3333	0,2857	0,2500	0,2353	0,2222	0,2105	0,2000	0,1818	0,1667	0,1539		
1,005	0,3334	0,2857	0,2500	0,2353	0,2223	0,2106	0,2001	0,1819	0,1667	0,1539		
1,010	0,3334	0,2858	0,2501	0,2355	0,2224	0,2107	0,2002	0,1821	0,1669	0,1541		
1,015	0,3336	0,2860	0,2504	0,2357	0,2226	0,2110	0,2005	0,1823	0,1673	0,1545		
1,020	0,3337	0,2862	0,2506	0,2360	0,2229	0,2113	0,2008	0,1827	0,1677	0,1550		
1,025	0,3340	0,2865	0,2509	0,2363	0,2233	0,2117	0,2013	0,1833	0,1683	0,1556		
1,030	0,3343	0,2869	0,2514	0,2368	0,2238	0,2123	0,2019	0,1839	0,1690	0,1564		
1,035	0,3346	0,2873	0,2519	0,2373	0,2244	0,2129	0,2025	0,1847	0,1699	0,1574		
1,040	0,3349	0,2877	0,2525	0,2380	0,2251	0,2136	0,2033	0,1856	0,1709	0,1585		
1,045	0,3354	0,2883	0,2531	0,2387	0,2259	0,2145	0,2042	0,1866	0,1721	0,1598		
1,05	0,3359	0,2889	0,2539	0,2395	0,2268	0,2154	0,2053	0,1878	0,1734	0,1613		
1,06	0,3370	0,2904	0,2556	0,2414	0,2289	0,2177	0,2077	0,1905	0,1764	0,1647		
1,07	0,3384	0,2921	0,2577	0,2437	0,2313	0,2203	0,2105	0,1938	0,1801	0,1688		
1,08	0,3399	0,2940	0,2601	0,2463	0,2342	0,2234	0,2138	0,1976	0,1845	0,1737		
1,09	0,3417	0,2963	0,2629	0,2494	0,2375	0,2270	0,2177	0,2021	0,1895	0,1794		
1,10	0,3437	0,2988	0,2660	0,2528	0,2412	0,2311	0,2221	0,2071	0,1953	0,1858		
1,11	0,3459	0,3017	0,2695	0,2566	0,2454	0,2356	0,2270	0,2128	0,2017	0,1932		
1,12	0,3483	0,3048	0,2734	0,2609	0,2501	0,2407	0,2325	0,2191	0,2090	0,2014		
1,13	0,3510	0,3082	0,2776	0,2655	0,2552	0,2462	0,2385	0,2261	0,2170	0,2105		
1,14	0,3539	0,3119	0,2822	0,2706	0,2607	0,2523	0,2451	0,2338	0,2258	0,2205		
1,15	0,3570	0,3160	0,2873	0,2762	0,2668	0,2589	0,2523	0,2422	0,2355	0,2316		
1,16	0,3603	0,3203	0,2927	0,2822	0,2734	0,2661	0,2601	0,2513	0,2461	0,2437		
1,17	0,3639	0,3250	0,2985	0,2886	0,2804	0,2738	0,2685	0,2612	0,2575	0,2569		
1,18	0,3677	0,3299	0,3047	0,2954	0,2880	0,2821	0,2775	0,2718	0,2699	0,2711		
1,19	0,3717	0,3352	0,3114	0,3028	0,2961	0,2910	0,2873	0,2833	0,2833	0,2866		
1,20	0,3760	0,3408	0,3184	0,3106	0,3048	0,3005	0,2977	0,2956	0,2977	0,3032		
1,21	0,3805	0,3468	0,3259	0,3190	0,3140	0,3107	0,3088	0,3088	0,3131	0,3212		
1,22	0,3853	0,3531	0,3338	0,3278	0,3238	0,3214	0,3205	0,3228	0,3296	0,3403		
1,23	0,3903	0,3597	0,3422	0,3372	0,3341	0,3328	0,3331	0,3377	0,3472	0,3609		
1,24	0,3955	0,3666	0,3510	0,3470	0,3450	0,3449	0,3463	0,3535	0,3659	0,3828		
1,25	0,4010	0,3739	0,3604	0,3574	0,3566	0,3576	0,3604	0,3704	0,3858	0,4062		
1,26	0,4068	0,3815	0,3701	0,3683	0,3687	0,3711	0,3752	0,3881	0,4069	0,4310		
1,27	0,4128	0,3895	0,3803	0,3798	0,3815	0,3852	0,3908	0,4069	0,4293	0,4574		

Phụ lục 2 (tiếp theo)

ξ	x											
	2,00	2,50	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,50	5,00	5,50		
1,28	0,4191	0,3979	0,3911	0,3918	0,3949	0,4001	0,4072	0,4268	0,4530	0,4855		
1,29	0,4256	0,4066	0,4023	0,4044	0,4089	0,4157	0,4245	0,4477	0,4781	0,5152		
1,30	0,4323	0,4157	0,4140	0,4175	0,4236	0,4320	0,4426	0,4697	0,5044	0,5466		
1,31	0,4394	0,4251	0,4262	0,4313	0,4390	0,4492	0,4616	0,4928	0,5323	0,5799		
1,32	0,4467	0,4350	0,4390	0,4457	0,4551	0,4671	0,4815	0,5171	0,5616	0,6149		
1,33	0,4542	0,4452	0,4522	0,4606	0,4719	0,4858	0,5023	0,5426	0,5925	0,652		
1,34	0,4620	0,4558	0,4660	0,4762	0,4894	0,5053	0,5240	0,5693	0,6248	0,691		
1,35	0,4701	0,4667	0,4803	0,4924	0,5076	0,5257	0,5468	0,5972	0,659	0,732		
1,36	0,4785	0,4781	0,4953	0,5093	0,5266	0,5470	0,5705	0,6265	0,695	0,775		
1,37	0,4871	0,4899	0,5107	0,5267	0,5463	0,5691	0,5952	0,657	0,732	0,821		
1,38	0,4960	0,5021	0,5267	0,5449	0,5668	0,5922	0,621	0,689	0,771	0,868		
1,39	0,5052	0,5146	0,5432	0,5637	0,5880	0,616	0,648	0,722	0,812	0,918		
1,40	0,5147	0,5276	0,5604	0,5832	0,610	0,641	0,676	0,757	0,855	0,971		
1,41	0,5244	0,5410	0,5781	0,603	0,633	0,667	0,705	0,793	0,900	1,026		
1,42	0,5344	0,5548	0,597	0,624	0,657	0,694	0,735	0,831	0,946	1,083		
1,43	0,5447	0,5691	0,615	0,646	0,681	0,721	0,766	0,870	0,995	1,143		
1,44	0,5553	0,584	0,635	0,668	0,707	0,750	0,798	0,911	1,046	1,206		
1,45	0,5660	0,599	0,655	0,691	0,733	0,780	0,832	0,953	1,099	1,272		
1,46	0,577	0,614	0,676	0,715	0,760	0,810	0,867	0,997	1,154	1,341		
1,47	0,589	0,630	0,697	0,740	0,788	0,842	0,903	1,043	1,212	1,412		
1,48	0,601	0,647	0,719	0,765	0,817	0,875	0,940	1,091	1,272	1,487		
1,49	0,613	0,664	0,742	0,791	0,847	0,909	0,979	1,140	1,334	1,565		
1,50	0,625	0,681	0,766	0,818	0,878	0,945	1,019	1,191	1,398	1,646		
1,55	0,691	0,775	0,893	0,965	1,047	1,138	1,239	1,475	1,761	2,106		
1,60	0,765	0,881	1,038	1,134	1,243	1,363	1,497	1,812	2,196	2,665		
1,65	0,847	0,999	1,203	1,327	1,466	1,622	1,796	2,206	2,713	3,338		
1,70	0,938	1,130	1,388	1,544	1,720	1,918	2,140	2,666	3,323	4,142		
1,75	1,037	1,276	1,595	1,788	2,007	2,254	2,533	3,198	4,037	5,096		
1,80	1,144	1,435	1,824	2,061	2,330	2,634	2,979	3,809	4,869	6,220		
1,85	1,260	1,611	2,078	2,364	2,690	3,062	3,484	4,509	5,831	7,539		
1,90	1,386	1,1801	2,358	2,700	3,092	3,540	4,052	5,305	6,941	9,076		
1,95	1,521	2,008	2,665	2,070	3,537	4,073	4,689	6,208	8,213	10,86		
2,0	1,667	2,232	3,000	3,477	4,028	4,665	5,400	7,228	9,670	12,93		

Phụ lục 2 (tiếp theo)

ξ \ X	2,00	2,50	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,50	5,00	5,50
2,1	1,987	2,734	3,762	4,408	5,163	6,043	7,068	9,66	13,19	18,02
2,2	2,349	3,312	2,656	5,512	6,521	7,709	9,11	12,70	17,70	24,67
2,3	2,756	3,972	5,696	6,809	8,131	9,70	11,57	16,45	23,37	33,24
2,4	3,208	4,719	6,894	8,316	10,02	12,07	14,53	21,03	30,45	44,15
2,5	3,708	5,559	8,266	10,06	12,23	14,85	18,03	26,58	39,19	57,89
2,6	4,259	6,497	9,82	12,05	14,77	18,10	22,16	33,23	49,88	75,03
2,7	4,861	7,540	11,58	14,33	17,70	21,87	27,00	41,17	62,87	96,23
2,8	5,517	8,70	13,57	16,91	21,06	26,21	32,62	50,56	78,52	122,3
2,9	6,23	9,97	15,78	19,82	24,87	31,19	38,19	61,61	97,24	153,9
3,0	7,00	11,36	18,25	23,08	29,18	36,87	46,60	74,53	119,5	192,3
3,5	11,79	20,42	35,02	45,80	59,89	78,34	102,6	176,2	303,9	526,6
4,0	18,33	33,57	61,00	82,18	110,8	149,4	197,1	369,4	679,7	1527,0
4,5	26,88	51,73	99,0	137,0	189,8	263,2	365,5	708,2	1380,0	2706,0
5,0	37,67	75,86	152,0	215,9	306,6	436,0	621,0	1267,0	2600,0	5371,0
6,0	67,0	146,2	319,0	472,2	700,4	1041,0	1550,0	3458,0	7771,0	17575,0
7,0	108,3	253,3	594,0	912,9	1406,0	2169,0	3355,0	8079,0	19604,0	47884,0
8,0	163,7	406,7	1017,0	1614,0	2567,0	4095,0	6547,0	16843,0	43683,0	114093,0
9,0	234,0	617,0	1632,0	2666,0	4366,0	7169,0	11802,0	32202,0	83561,0	245291,0
10,0	324,3	894,0	2491,0	4175,0	7018,0	11831,0	19991,0	57491,0	166691,0	486491,0

TABLE 2 (continued)

continued

PHỤ LỤC 3

Hàm số $\Phi(\zeta)$ để tính dòng không đều trong kênh có dốc nghịch ($i < 0$)

$\zeta \backslash x$	2,00	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,50	5,00	5,50
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,05	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050
0,10	0,099	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
0,15	0,148	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150
0,20	0,197	0,198	0,199	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200
0,25	0,244	0,247	0,248	0,249	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250
0,30	0,291	0,295	0,296	0,297	0,298	0,299	0,299	0,300	0,300	0,300	0,300
0,35	0,336	0,342	0,344	0,346	0,347	0,348	0,348	0,349	0,349	0,350	0,350
0,40	0,380	0,389	0,391	0,393	0,395	0,396	0,396	0,397	0,393	0,400	0,400
0,45	0,422	0,434	0,437	0,440	0,442	0,447	0,445	0,446	0,447	0,443	0,450
0,50	0,463	0,477	0,481	0,485	0,488	0,490	0,492	0,493	0,495	0,497	0,498
0,55	0,502	0,518	0,523	0,528	0,532	0,535	0,537	0,539	0,542	0,545	0,547
0,60	0,540	0,558	0,565	0,571	0,576	0,580	0,583	0,585	0,585	0,595	0,595
0,61	0,547	0,566	0,573	0,579	0,584	0,588	0,591	0,594	0,598	0,602	0,604
0,62	0,554	0,574	0,581	0,587	0,592	0,596	0,600	0,603	0,607	0,611	0,613
0,63	0,562	0,581	0,589	0,595	0,600	0,605	0,609	0,612	0,616	0,620	0,622
0,64	0,569	0,589	0,596	0,602	0,608	0,613	0,617	0,620	0,625	0,629	0,631
0,65	0,576	0,596	0,604	0,610	0,616	0,621	0,625	0,629	0,634	0,638	0,640
0,66	0,583	0,604	0,612	0,618	0,623	0,628	0,633	0,637	0,643	0,647	0,650
0,67	0,590	0,611	0,620	0,626	0,631	0,636	0,641	0,646	0,652	0,656	0,659
0,68	0,597	0,619	0,627	0,634	0,639	0,644	0,649	0,654	0,665	0,665	0,668
0,69	0,603	0,626	0,634	0,641	0,647	0,653	0,657	0,662	0,668	0,674	0,677
0,70	0,610	0,633	0,642	0,649	0,655	0,661	0,665	0,670	0,677	0,682	0,686
0,71	0,617	0,640	0,649	0,657	0,662	0,668	0,673	0,678	0,685	0,690	0,694
0,72	0,624	0,648	0,656	0,664	0,670	0,676	0,681	0,686	0,694	0,699	0,703
0,73	0,630	0,655	0,663	0,672	0,678	0,684	0,689	0,694	0,702	0,707	0,712
0,74	0,637	0,662	0,670	0,679	0,685	0,691	0,697	0,702	0,710	0,716	0,720
0,75	0,643	0,668	0,677	0,686	0,692	0,698	0,704	0,709	0,717	0,724	0,728
0,76	0,649	0,675	0,684	0,693	0,700	0,705	0,711	0,717	0,725	0,731	0,736
0,77	0,656	0,681	0,691	0,700	0,707	0,712	0,718	0,724	0,733	0,739	0,744
0,78	0,662	0,688	0,698	0,707	0,714	0,720	0,725	0,731	0,740	0,747	0,752
0,79	0,668	0,694	0,704	0,713	0,720	0,727	0,732	0,738	0,748	0,754	0,760

Phụ lục 3 (tiếp theo)

$\zeta \backslash x$	2,00	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,50	5,00	5,50
0,80	0,674	0,700	0,710	0,720	0,727	0,734	0,740	0,746	0,755	0,762	0,768
0,81	0,680	0,706	0,717	0,727	0,733	0,741	0,748	0,753	0,762	0,770	0,776
0,82	0,686	0,712	0,723	0,733	0,740	0,748	0,754	0,760	0,769	0,777	0,783
0,83	0,692	0,718	0,729	0,740	0,747	0,755	0,761	0,766	0,776	0,784	0,790
0,84	0,698	0,724	0,736	0,746	0,753	0,761	0,767	0,773	0,783	0,791	0,798
0,85	0,704	0,730	0,742	0,752	0,760	0,767	0,774	0,780	0,790	0,798	0,805
0,86	0,710	0,736	0,748	0,758	0,766	0,774	0,781	0,786	0,797	0,804	0,812
0,87	0,715	0,742	0,754	0,764	0,772	0,780	0,787	0,793	0,803	0,811	0,819
0,88	0,721	0,748	0,760	0,770	0,778	0,786	0,793	0,799	0,810	0,818	0,826
0,89	0,727	0,754	0,765	0,776	0,784	0,792	0,799	0,805	0,816	0,825	0,832
0,90	0,732	0,760	0,771	0,781	0,790	0,798	0,805	0,811	0,822	0,831	0,839
0,905	0,735	0,762	0,774	0,784	0,793	0,801	0,808	0,814	0,825	0,834	0,842
0,910	0,738	0,765	0,777	0,787	0,796	0,804	0,811	0,817	0,828	0,837	0,845
0,915	0,741	0,768	0,780	0,790	0,799	0,807	0,814	0,820	0,831	0,840	0,848
0,920	0,743	0,771	0,783	0,793	0,802	0,810	0,817	0,823	0,834	0,844	0,851
0,925	0,746	0,774	0,785	0,796	0,804	0,812	0,820	0,826	0,837	0,847	0,854
0,930	0,749	0,777	0,788	0,799	0,807	0,815	0,823	0,829	0,840	0,850	0,857
0,935	0,751	0,779	0,790	0,801	0,810	0,818	0,826	0,832	0,843	0,853	0,860
0,940	0,754	0,782	0,793	0,804	0,813	0,820	0,828	0,835	0,846	0,856	0,864
0,945	0,757	0,785	0,796	0,807	0,816	0,823	0,831	0,837	0,849	0,859	0,867
0,950	0,759	0,787	0,799	0,809	0,818	0,826	0,834	0,840	0,852	0,861	0,869
0,955	0,762	0,790	0,801	0,812	0,821	0,828	0,836	0,843	0,855	0,864	0,872
0,960	0,764	0,793	0,804	0,815	0,824	0,831	0,839	0,846	0,857	0,867	0,875
0,965	0,767	0,796	0,807	0,818	0,826	0,834	0,842	0,848	0,860	0,870	0,878
0,970	0,770	0,798	0,810	0,820	0,829	0,837	0,845	0,851	0,863	0,872	0,881
0,975	0,772	0,801	0,812	0,822	0,831	0,839	0,847	0,854	0,866	0,875	0,883
0,980	0,775	0,803	0,814	0,825	0,834	0,842	0,850	0,857	0,868	0,878	0,886
0,985	0,777	0,806	0,817	0,827	0,836	0,844	0,852	0,859	0,870	0,880	0,889
0,990	0,780	0,809	0,820	0,830	0,839	0,847	0,855	0,861	0,873	0,883	0,891
0,995	0,782	0,811	0,822	0,832	0,842	0,849	0,858	0,864	0,876	0,885	0,894
1,000	0,785	0,813	0,824	0,834	0,844	0,852	0,860	0,867	0,879	0,887	0,897
1,005	0,788	0,815	0,826	0,837	0,847	0,855	0,862	0,870	0,881	0,890	0,899
1,010	0,790	0,817	0,829	0,840	0,849	0,858	0,865	0,873	0,884	0,893	0,902

Phụ lục 3 (tiếp theo)

ζ \ x	2,00	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,50	5,00	5,50
1,015	0,793	0,820	0,831	0,843	0,852	0,861	0,868	0,875	0,886	0,896	0,904
1,020	0,795	0,823	0,834	0,845	0,855	0,864	0,871	0,877	0,889	0,898	0,907
1,025	0,798	0,825	0,836	0,848	0,857	0,866	0,874	0,880	0,891	0,900	0,909
1,030	0,800	0,827	0,839	0,850	0,859	0,868	0,877	0,882	0,893	0,902	0,911
1,035	0,803	0,829	0,841	0,853	0,862	0,871	0,879	0,885	0,895	0,905	0,914
1,040	0,805	0,831	0,844	0,855	0,864	0,873	0,882	0,888	0,898	0,907	0,916
1,045	0,808	0,834	0,846	0,857	0,867	0,875	0,884	0,890	0,900	0,909	0,918
1,05	0,810	0,836	0,848	0,859	0,869	0,877	0,886	0,892	0,903	0,911	0,920
1,06	0,815	0,841	0,854	0,864	0,873	0,881	0,890	0,896	0,907	0,915	0,924
1,07	0,819	0,846	0,859	0,869	0,878	0,886	0,894	0,901	0,911	0,919	0,928
1,08	0,824	0,851	0,863	0,873	0,882	0,890	0,898	0,905	0,916	0,923	0,932
1,09	0,828	0,856	0,868	0,877	0,887	0,894	0,902	0,909	0,920	0,927	0,936
1,10	0,833	0,860	0,872	0,881	0,891	0,899	0,906	0,913	0,923	0,931	0,940
1,11	0,837	0,864	0,877	0,886	0,895	0,903	0,910	0,917	0,927	0,935	0,944
1,12	0,842	0,868	0,881	0,891	0,899	0,907	0,914	0,921	0,931	0,939	0,948
1,13	0,846	0,872	0,885	0,895	0,903	0,911	0,918	0,925	0,935	0,943	0,951
1,14	0,851	0,876	0,889	0,899	0,907	0,915	0,922	0,928	0,938	0,947	0,954
1,15	0,855	0,880	0,893	0,903	0,911	0,919	0,926	0,932	0,942	0,950	0,957
1,16	0,859	0,884	0,897	0,907	0,914	0,923	0,930	0,936	0,945	0,953	0,960
1,17	0,864	0,888	0,901	0,911	0,918	0,927	0,933	0,939	0,948	0,957	0,963
1,18	0,868	0,892	0,905	0,915	0,922	0,930	0,937	0,943	0,951	0,960	0,965
1,19	0,872	0,896	0,908	0,918	0,926	0,933	0,940	0,947	0,954	0,963	0,968
1,20	0,876	0,900	0,911	0,921	0,929	0,937	0,944	0,950	0,958	0,966	0,970
1,21	0,880	0,904	0,915	0,925	0,933	0,941	0,947	0,953	0,961	0,969	0,973
1,22	0,884	0,908	0,919	0,929	0,937	0,945	0,950	0,956	0,964	0,972	0,976
1,23	0,888	0,912	0,922	0,932	0,941	0,948	0,953	0,959	0,967	0,974	0,978
1,24	0,892	0,916	0,926	0,935	0,944	0,951	0,956	0,962	0,970	0,977	0,981
1,25	0,896	0,919	0,929	0,938	0,947	0,954	0,959	0,965	0,973	0,979	0,984
1,26	0,900	0,923	0,933	0,942	0,950	0,957	0,962	0,968	0,975	0,982	0,986
1,27	0,904	0,927	0,936	0,945	0,953	0,960	0,965	0,971	0,978	0,984	0,988
1,28	0,908	0,930	0,940	0,948	0,956	0,963	0,968	0,974	0,981	0,987	0,990
1,29	0,911	0,934	0,943	0,952	0,959	0,966	0,971	0,976	0,983	0,989	0,992
1,30	0,915	0,937	0,947	0,955	0,962	0,968	0,974	0,979	0,985	0,991	0,994

Phụ lục 3 (tiếp theo)

ζ \ x											
	2,00	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,50	5,00	5,50
1,31	0,919	0,940	0,950	0,958	0,965	0,971	0,977	0,982	0,988	0,993	0,996
1,32	0,922	0,943	0,954	0,961	0,968	0,974	0,979	0,985	0,990	0,995	0,997
1,33	0,926	0,947	0,957	0,964	0,971	0,976	0,982	0,987	0,993	0,997	0,999
1,34	0,930	0,951	0,961	0,967	0,974	0,979	0,984	0,990	0,995	0,999	1,001
1,35	0,933	0,954	0,964	0,970	0,977	0,982	0,987	0,992	0,997	1,001	1,003
1,36	0,937	0,957	0,967	0,973	0,980	0,985	0,989	0,994	0,999	1,002	1,005
1,37	0,940	0,960	0,970	0,976	0,983	0,988	0,992	0,996	1,001	1,004	1,007
1,38	0,944	0,963	0,973	0,979	0,986	0,991	0,994	0,998	1,003	1,006	1,008
1,39	0,947	0,969	0,975	0,981	0,988	0,993	0,997	0,999	1,005	1,008	1,010
1,40	0,951	0,969	0,977	0,984	0,990	0,995	0,999	1,001	1,006	1,009	1,011
1,41	0,954	0,972	0,980	0,986	0,993	0,997	1,001	1,003	1,008	1,011	1,012
1,42	0,957	0,975	0,983	0,989	0,996	1,000	1,003	1,005	1,010	1,012	1,014
1,43	0,960	0,978	0,986	0,992	0,998	1,003	1,006	1,007	1,012	1,014	1,015
1,44	0,964	0,980	0,988	0,995	1,001	1,005	1,008	1,009	1,014	1,016	1,016
1,45	0,967	0,983	0,990	0,997	1,003	1,007	1,010	1,011	1,015	1,017	1,017
1,46	0,970	0,986	0,993	1,000	1,005	1,009	1,012	1,013	1,017	1,019	1,018
1,47	0,973	0,989	0,996	1,003	1,007	1,011	1,014	1,014	1,018	1,020	1,019
1,48	0,977	0,991	0,998	1,005	1,009	1,012	1,016	1,016	1,020	1,020	1,020
1,49	0,980	0,994	1,001	1,007	1,011	1,014	1,017	1,018	1,021	1,021	1,021
1,50	0,983	0,997	1,004	1,009	1,013	1,016	1,018	1,020	1,022	1,022	1,022
1,55	0,997	1,010	1,015	1,020	1,023	1,025	1,027	1,029	1,029	1,028	1,026
1,60	1,012	1,022	1,026	1,030	1,033	1,034	1,035	1,035	1,034	1,032	1,030
1,65	1,026	1,033	1,037	1,039	1,041	1,042	1,042	1,041	1,039	1,036	1,034
1,70	1,039	1,044	1,047	1,048	1,049	1,049	1,048	1,047	1,043	1,039	1,037
1,75	1,052	1,054	1,056	1,057	1,056	1,055	1,054	1,052	1,047	1,042	1,039
1,80	1,064	1,064	1,064	1,065	1,063	1,061	1,059	1,057	1,051	1,045	1,041
1,85	1,075	1,073	1,072	1,072	1,069	1,067	1,064	1,061	1,054	1,047	1,043
1,90	1,086	1,082	1,080	1,079	1,075	1,072	1,068	1,065	1,057	1,049	1,045
1,95	1,097	1,090	1,087	1,085	1,080	1,076	1,072	1,068	1,059	1,051	1,046
2,00	1,107	1,098	1,094	1,090	1,085	1,080	1,076	1,071	1,062	1,053	1,047
2,10	1,126	1,112	1,106	1,100	1,094	1,087	1,082	1,076	1,065	1,056	1,049
2,20	1,144	1,125	1,117	1,109	1,094	1,087	1,082	1,080	1,068	1,058	1,050
2,30	1,161	1,137	1,127	1,117	1,102	1,094	1,088	1,084	1,068	1,058	1,051

Phụ lục 3 (tiếp theo)

ζ \ X	2,00	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,50	5,00	5,50
2,40	1,176	1,148	1,136	1,124	1,115	1,104	1,096	1,087	1,073	1,061	1,052
2,50	1,190	1,157	1,143	1,131	1,119	1,108	1,099	1,090	1,075	1,062	1,053
2,60	1,204	1,166	1,150	1,137	1,123	1,112	1,102	1,092	1,076	1,063	1,054
2,70	1,216	1,174	1,156	1,142	1,127	1,115	1,105	1,094	1,077	1,063	1,054
2,80	1,228	1,181	1,162	1,146	1,131	1,118	1,107	1,096	1,078	1,064	1,054
2,90	1,239	1,188	1,168	1,150	1,134	1,121	1,109	1,098	1,079	1,065	1,055
3,00	1,249	1,194	1,173	1,154	1,137	1,123	1,110	1,099	1,080	1,065	1,055
3,50	1,292	1,218	1,191	1,167	1,148	1,131	1,116	1,103	1,082	1,066	1,055
4,00	1,326	1,237	1,204	1,176	1,155	1,136	1,120	1,106	1,084	1,067	1,056
4,50	1,352	1,251	1,213	1,183	1,160	1,139	1,122	1,108	1,085	1,067	1,056
5,00	1,374	1,260	1,220	1,188	1,163	1,141	1,124	1,110	1,085	1,068	1,056
6,00	1,406	1,272	1,230	1,195	1,167	1,144	1,125	1,111	1,085	1,068	1,056
8,00	1,447	1,290	1,239	1,201	1,170	1,146	1,127	1,111	1,086	1,068	1,056
10,00	1,471	1,298	1,244	1,203	1,172	1,147	1,127	1,111	1,086	1,068	1,056

PHỤ LỤC 4

**Bảng tọa độ đường cong mặt đập không có chân không
vẽ theo phương pháp Corigio - Ôphixerôp**

$\bar{x} = \frac{x}{H_{tk}}$	$\bar{y} = \frac{y}{H_{tk}}$	
	Đập loại I (Kiểu Corigio - Ôphixerôp)	Đập loại II kiểu Corigio
0		0,043
0,1	0,126	0,010
0,2	0,036	0,000
0,3	0,007	0,005
0,4	0,000	0,023
0,6	0,060	0,098
0,8	0,147	0,189
1,0	0,256	0,321
1,2	0,393	0,420
1,4	0,565	0,665
1,7	0,873	0,992
2,0	1,235	1,377
2,5	1,960	1,14
3,0	2,824	3,06
3,5	3,828	4,08
4,0	4,930	5,24
4,5	6,22	6,58

PHỤ LỤC 5

Bảng trị số bán kính nối tiếp R ở chân đập (*)

H (m) P(m) \ R(m)	R (m)								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	3,0	4,2	5,4	6,5	7,5	8,5	9,5	10,6	11,6
20	4,0	6,0	7,8	8,9	10,0	11,0	12,5	13,3	14,3
30	4,5	7,5	9,7	11,0	12,4	13,5	14,7	15,8	16,8
40	4,7	8,4	11,0	13,0	14,5	15,8	17,0	18,0	19,0
50	4,8	8,8	12,0	14,5	16,5	18,0	19,2	20,3	21,3
60	4,9	8,9	13,0	15,5	18,0	20,0	21,0	22,2	23,2

Khi P < 10m, lấy R = 0,5P

PHỤ LỤC 6

Hệ số sửa chữa hình dạng σ_{hd}

α°	β°	$\frac{e}{P_1}$				
		0	0,3	0,6	0,9	1,0
15	15	0,880	0,878	0,855	0,850	0,933
	30	0,910	0,908	0,885	0,880	0,974
	60	0,927	0,925	0,902	0,895	1,000
45	15	0,915	0,915	0,911	0,919	0,933
	30	0,953	0,950	0,950	0,956	0,974
	60	0,974	0,974	0,970	0,978	1,000
75	15	0,930	0,930	0,930	0,930	0,933
	30	0,972	0,972	0,972	0,972	0,974
	60	0,998	0,998	0,998	0,999	1,000
90	15	0,933	-	-	-	-
	30	0,974	-	-	-	-
	60	1,000	-	-	-	-

PHỤ LỤC 7

Hệ số lưu lượng của đập thực dụng mặt cắt hình thang

Độ cao tương đối của đập $\frac{P}{H}$	Độ dốc mái		Hệ số lưu lượng m		
	S thượng lưu	S' hạ lưu	$\frac{H}{\delta} > 2$	$1 < \frac{H}{\delta} < 2$	$0,5 < \frac{H}{\delta} < 1$
3 ÷ 5	0,5	0,5	0,42 ÷ 0,43	0,38 ÷ 0,40	0,35 ÷ 0,36
2 ÷ 3	1	0	0,44	0,42	0,40
	2	0	0,43	0,41	0,39
	0	1	0,42	0,40	0,38
	0	2	0,40	0,38	0,36
1 ÷ 2	3	0	0,42	0,40	0,38
	4	0	0,41	0,39	0,37
	5	0	0,40	0,38	0,36
	10	0	0,38	0,36	0,35
	0	3	0,39	0,37	0,35
	0	5	0,37	0,35	0,34
	0	10	0,35	0,34	0,33

PHỤ LỤC 8

Tính toán nối tiếp ở hạ lưu công trình

F (τ_c)	τ_c	τ_c				
		$\varphi = 0,80$	$\varphi = 0,85$	$\varphi = 0,90$	$\varphi = 0,95$	$\varphi = 1,0$
0,01	0,0023	0,074	0,079	0,084	0,088	0,093
02	0045	105	112	118	125	132
03	0068	128	136	145	153	161
04	0090	147	157	166	176	185
05	0113	165	175	186	196	207
0,06	0,0134	0,179	0,190	0,202	0,213	0,225
07	0156	193	205	217	230	242
08	0178	205	218	232	245	258
09	0201	217	231	245	259	273
10	0228	227	242	257	272	288
0,12	0,0274	0,248	0,265	0,281	0,297	0,314
14	0320	266	284	301	319	336
16	0370	283	302	321	340	358
18	0418	299	319	339	357	378
20	0462	316	336	356	377	397
0,22	0,0510	0,324	0,347	0,370	0,392	0,415
24	0556	341	363	386	409	431
26	0596	352	376	400	424	448
28	0652	364	389	414	438	463
30	0701	375	401	426	452	477
0,35	0,0825	0,401	0,428	0,456	0,483	0,515
40	0950	424	453	472	501	540
45	107	445	476	506	537	568
50	120	464	491	518	545	573
0,55	0,134	0,481	0,515	0,549	0,583	0,617
60	147	497	532	567	602	638
65	160	512	548	585	621	658
70	174	526	563	601	638	676
75	188	538	577	615	654	693
0,80	0,202	0,549	0,589	0,629	0,668	0,708
85	217	560	600	641	682	723
90	232	569	611	653	695	736
95	247	570	621	664	707	750
1,00	263	585	629	672	716	759
1,05	0,279	0,591	0,636	0,680	0,724	0,768
10	296	396	641	686	732	777
15	313	602	647	693	738	784
20	330	606	652	698	744	790
25	350	608	655	701	748	795
1,30	0,370	0,609	0,656	0,704	0,751	0,798
35	391	610	657	704	752	800
40	412	608	656	704	752	800
45	436	605	653	701	749	797
50	461	605	648	696	744	793
1,55	0,490	0,592	0,640	0,688	0,736	0,785
60	523	579	627	675	723	771
63	546	569	616	664	711	759
66	574	553	601	648	696	742

PHỤ LỤC 9

Bảng trị số hệ số ε và tính nối tiếp sau của công với tâm chấn phẳng

$\frac{a}{H}$	ε	$F(\tau_c)$	$t_c = \varepsilon \cdot \frac{a}{H}$	$\tau \chi$			
				$\varphi = 0,85$	$\varphi = 0,90$	$\varphi = 0,95$	$\varphi = 1,00$
0,0	0,611	-	-	-	-	-	-
0,10	0,615	0,264	0,062	0,378	0,403	0,427	0,451
0,15	0,618	0,388	0,092	0,445	0,474	0,503	0,531
0,20	0,620	0,514	0,124	0,501	0,534	0,567	0,600
0,25	0,622	0,633	0,156	0,543	0,580	0,616	0,652
0,30	0,625	0,750	0,188	0,576	0,615	0,654	0,693
0,35	0,628	0,865	0,220	0,603	0,644	0,685	0,726
0,40	0,630	0,967	0,252	0,623	0,666	0,708	0,754
0,45	0,638	1,060	0,284	0,638	0,682	0,726	0,771
0,50	0,645	1,182	0,323	0,650	0,696	0,741	0,788
0,55	0,650	1,265	0,356	0,655	0,702	0,749	0,795
0,60	0,660	1,364	0,395	0,657	0,706	0,752	0,800
0,65	0,675	1,457	0,440	0,652	0,700	0,748	0,797
0,70	0,690	1,538	0,482	0,642	0,690	0,738	0,787
0,75	0,705	1,611	0,529	0,624	0,672	0,720	0,768

Thực nghiệm xác minh rằng trị số ε của Giucôpxki là đúng trong phạm vi $\frac{a}{H} \leq 0,75$.

PHỤ LỤC 10

Bảng tính dòng không áp trong lòng dẫn có mặt cắt tròn

$s = \frac{h}{d}$	$\bar{\omega} = \frac{\omega}{d^2}$	$\bar{R} = \frac{R}{d}$	$s = \frac{h}{d}$	$\bar{\omega} = \frac{\omega}{d^2}$	$\bar{R} = \frac{R}{d}$
0,01	0,0013	0,0066	0,51	0,4027	0,2531
0,02	0,0037	0,0132	0,52	0,4127	0,2561
0,03	0,0069	0,0197	0,53	0,4227	0,2591
0,04	0,0105	0,0262	0,54	0,4327	0,2620
0,05	0,0147	0,0326	0,55	0,4426	0,2649
0,06	0,0192	0,0389	0,56	0,4526	0,2676
0,07	0,0242	0,0451	0,57	0,4625	0,2703
0,08	0,294	0,0513	0,58	0,4723	0,2728
0,09	0,0350	0,0574	0,59	0,4822	0,2753
0,10	0,409	0,0635	0,60	0,4920	0,2776
0,11	0,470	0,0695	0,61	0,5018	0,2797
0,12	0,534	0,0754	0,62	0,5115	0,2818
0,13	0,600	0,0813	0,63	0,5212	0,2839
0,14	0,668	0,0871	0,64	0,5308	0,2860
0,15	0,739	0,0929	0,65	0,5104	0,2881
0,16	0,0811	0,0986	0,66	0,5499	0,2899
0,17	0,0886	0,1042	0,67	0,5594	0,2917
0,18	0,0961	0,1097	0,68	0,5687	0,2935
0,19	0,1039	0,1152	0,69	0,5780	0,950
0,20	0,1118	0,1206	0,70	0,5872	0,2962
0,21	0,1199	0,1259	0,71	0,5964	0,2973
0,22	0,1281	0,1312	0,72	0,6054	0,2984
0,23	0,1365	0,1364	0,73	0,6143	0,2995
0,24	0,1449	0,0416	0,74	0,6231	0,3006
0,25	0,1535	0,1466	0,75	0,6318	0,3017
0,26	0,1623	0,1516	0,76	0,6404	0,3025
0,27	0,1711	0,1566	0,77	0,6489	0,3032
0,28	0,1800	0,1614	0,78	0,6573	0,3037
0,29	0,1890	0,1662	0,79	0,6655	0,3040
0,30	0,1982	0,1709	0,80	0,6736	0,3042
0,31	0,2074	0,1755	0,81	0,6815	0,3044
0,32	0,2167	0,1801	0,82	0,6893	0,3043
0,33	0,2260	0,1848	0,83	0,6969	0,3041
0,34	0,2355	0,1891	0,84	0,7043	0,3038
0,35	0,2450	0,1935	0,85	0,7115	0,2033
0,36	0,2546	0,1978	0,86	0,7186	0,3026
0,37	0,2642	0,2020	0,87	0,7257	0,3017
0,38	0,2739	0,2061	0,88	0,7320	0,3008
0,39	0,1836	0,2102	0,89	0,7380	0,2996
0,40	0,2934	0,2142	0,90	0,7445	0,2980
0,41	0,3032	0,2181	0,91	0,7504	0,2963
0,42	0,3132	0,2220	0,92	0,7560	0,2944
0,43	0,3229	0,2257	0,93	0,7612	0,2822
0,44	0,3328	0,2294	0,94	0,7662	0,2896
0,45	0,3428	0,2331	0,95	0,7707	0,2867
0,46	0,3527	0,2366	0,96	0,7749	0,2830
0,47	0,3627	0,2400	0,97	0,7785	0,2787
0,48	0,3727	0,2434	0,98	0,7816	0,2735
0,49	0,3827	0,2467	0,99	0,7861	0,6256
0,50	0,3927	0,2500	1,00	0,7854	0,2500