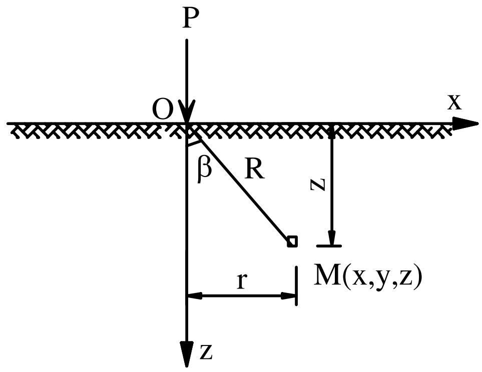
§2 PHÂN BỐ ỨNG SUẤT DO TẢI TRỌNG NGOÀI GÂY RA

2.1 Bài toán cơ bản - Tác dụng của lực tập trung

Trong thực tế, ít khi có thể gặp trường hợp lực tập trung tác dụng trên nền đất. Vì tải trọng tác dụng bao giờ cũng thông qua đáy móng mà truyền đến đất nền trên một diện tích nhất định. Dù vậy, bài toán này vẫn có một ý nghĩa rất cơ bản về mặt lý thuyết và cũng là cơ sở để giải quyết các bài toán ứng suất khi tải trọng phân bố trên những diện tích và hình dạng nhất định. Khi nghiên cứu trạng thái ứng suất của đất dưới tác dụng của lực tập trung có thể phân biệt thành ba trường hợp: Lực tập trung tác dụng thẳng đứng trên mặt đất, lực tập trung tác dụng nằm ngang trên mặt đất và lực tập trung đặt trong đất, cả ba trường hợp trên khi xác định ứng suất và chuyển vị trong đất, đều xem nền đất là một bán không gian biến dạng tuyến tính.

2.1.1 Lực tập trung tác dụng thẳng đứng trên mặt đất

Xét một điểm M bất kỳ trong nền đất được xác định trong toạ độ cực là R và β hoặc toạ độ Decac M(x,y,z), khi trên mặt phẳng nửa không gian biến dạng tuyến tính có tác dụng một lực tập trung. Bài toán cơ bản này đã được nhà khoa học Pháp J. Boussinesq giải quyết và rút ra các biểu thức tính toán ứng suất và chuyển vị tại điểm M(x,y,z) từ năm1885 như sau:



Hình II.1
Sơ đồ tác dụng của lực tập trung

Ứng suất pháp tuyến:

$$\sigma_Z = \frac{3P}{2\pi}.\frac{z^3}{R^5} \tag{II-1a}$$

$$\sigma_y = \frac{3P}{2\pi}\left\{\frac{y^2.z}{R^5} + \frac{1-2\mu}{3}\left[\frac{1}{R(R+z)} - \frac{(2R+z).y^2}{(R+z)^2.R^3} - \frac{z}{R^3}\right]\right\} \tag{II-1b}$$

$$\sigma_x = \frac{3P}{2\pi}\left\{\frac{x^2.z}{R^5} + \frac{1-2\mu}{3}\left[\frac{1}{R(R+z)} - \frac{(2R+z)x^2}{(R+z)^2.R^3} - \frac{z}{R^3}\right]\right\} \tag{II-1c}$$

Ứng suất tiếp tuyến

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{zy} &= \tau_{yz} = \frac{3P}{2\pi}.\frac{y.z^2}{R^5} \\
\tau_{xz} &= \tau_{zx} = \frac{3P}{2\pi}.\frac{x.z^2}{R^5} \\
\tau_{xy} &= \tau_{yx} = \frac{3P}{2\pi}\left[\frac{xyz}{R^5} - \frac{1-2\mu}{3}.\frac{(2R+z)xy}{(R+z)^2.R^3}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{II-2}$$

Tổng ứng suất chính:

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{P}{\pi}(1+\mu)\frac{z}{R^3} \quad \text{(II - 3)}$$

Các chuyển vị theo chiều của các trục:

$$W(Oz) = \frac{P(1+\mu)}{2.\pi.E_0}\left[\frac{z^2}{R^3} + 2(1-\mu).\frac{1}{R}\right] \quad \text{(II - 4a)}$$

$$U(Ox) = \frac{P(1+\mu)}{2.\pi.E_0}\left[\frac{x.z}{R^3} - (1-2\mu).\frac{x}{R(R+z)}\right] \quad \text{(II - 4b)}$$

$$V(Oy) = \frac{P(1+\mu)}{2.\pi.E_0}\left[\frac{y.z}{R^3} - (1-2\mu).\frac{y}{R(R+z)}\right] \quad \text{(II - 4c)}$$

Trong đó: μ, E_0 - là hệ số nở hông, môđun tổng biến dạng của đất.

$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, x,y,z - là toạ độ của điểm cần tính .

Vị trí của điểm M trên hình (II-1) có thể xác định qua toạ độ z và r của nó, nên $R = \sqrt{z^2 + r^2}$, thay vào biểu thức (II-1a) ta được:

$$\sigma_Z = \frac{3P}{2\pi.Z^2}.\frac{1}{\left[1+\left(\frac{r}{z}\right)^2\right]^{\frac{5}{2}}} \quad \text{(II - 5)}$$

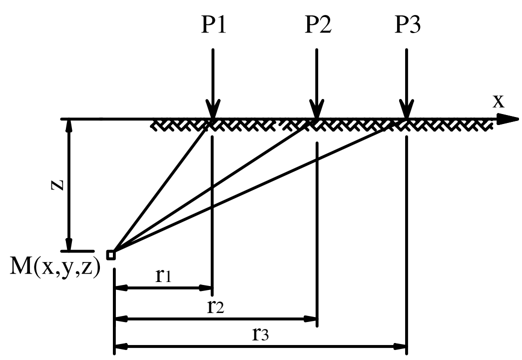
Trong đó: r là khoảng cách tính từ trục Oz đến điểm đang xét

Từ biểu thức (II-5) ta có thể viết:

$$\sigma_z = K.\frac{P}{z^2} \quad \text{(II - 6)}$$

Trong đó trị số K là hàm số phụ thuộc vào tỷ r/z và sẽ tra ở bảng (II -1).

Từ biểu thức (II - 6) có thể nhận xét rằng, đối với những điểm gần điểm đặt lực tập trung, ứng suất nén σ_z sẽ đạt tới trị số lớn và đất ở trạng thái biến dạng dẻo và đó cũng chính là nhược điểm của phương pháp tính toán này. Do đó đối với những điểm này, người ta coi việc tác dụng của ngoại lực được thay thế bằng những lực bề mặt, về mặt tĩnh học tương đương với lực P.



Hình II-2: Trường hợp có nhiều lưch tâp trung tác dung

Nếu trên mặt đất có nhiều lực tập trung P_1, P_2, P_3, v v... tác dụng như hình (II-

2), thì ứng suất tại một điểm bất kỳ trong nền đất sẽ được tính bằng tổng ứng suất của từng lực gây ra tại điểm đó. Nếu dùng ký hiệu như hình (II - 2) thì ta có biểu thức sau:

$$\sigma_Z = \frac{1}{z^2}.\sum_{i=1}^{n} K_i.P_i \qquad \text{(II - 7)}$$

Ví dụ II-1:

Trên mặt đất tác dụng một lực tập trung thẳng đứng P=60T. Xác định ứng suất thẳng đứng tại điểm A có độ sâu 2m và cách trục đặt lực 1m. (Hình II-3).

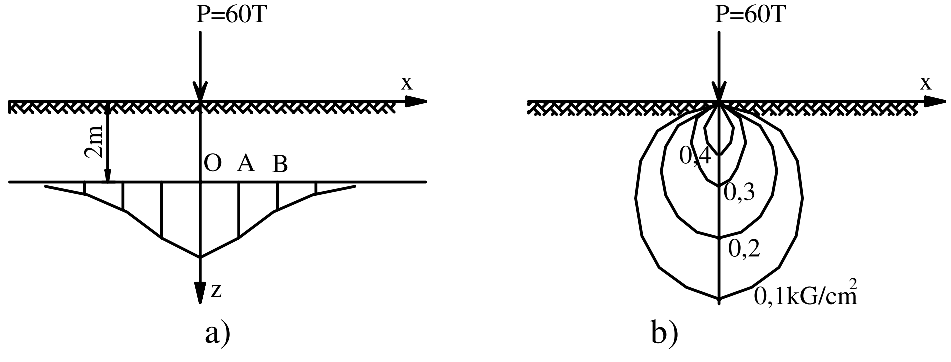
Giải: Cho biết z = 200cm, r = 100cm

Nên ta có: r/z = 100/200 = 0,5, tra theo bảng (II-1) sẽ được trị số của K=0,2733.

Ứng suất nén thẳng đứng tại điểm A sẽ là:

$$\sigma_z = 0{,}2733.\frac{60.000}{200x200} = 0{,}41\,(\text{kG/cm}^2)$$

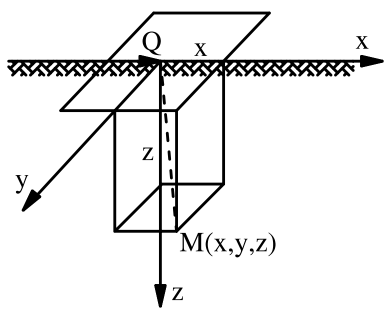
Bằng cách tương tự, xác định ứng suất nén σ_z tại những điểm khác có cùng độ sâu z=200cm thì sẽ có kết quả được trình bày như trên hình (II-3a) theo dạng biểu đồ ứng suất nén thẳng đứng. Dựa vào biểu đồ σ_z ở hình (II-3a) ta có nhận xét rằng, càng xa trục Oz thì trị số ứng suấtσ_z càng giảm dần. Nếu như tính và vẽ biểu đồ phân bố ứng suất nén thẳng đứng σ_z cho nhiều điểm trong nền đất và nối các điểm có cùng trị số σ_z với nhau thì sẽ thu được các đường cong đồng ứng suất hay còn gọi là "đường đẳng áp" như trên hình (II-3b).



Hình II-3.a) ứng suất nén trong đất ở độ sâu 2m; b) Các đường đẳng ứng suất

2.1.2 Trường hợp lực tập trung tác dụng nằm ngang trên mặt đất.

Đối với trường hợp lực tập trung nằm ngang tác dụng trên mặt đất có một ý nghĩa rất lớn đối với các công trình thuỷ lợi: Bài toán này đã được các nhà khoa học Trung Quốc (Huang Wen - Hsi) giải quyết với biểu thức tính ứng suất thẳng đứng là:



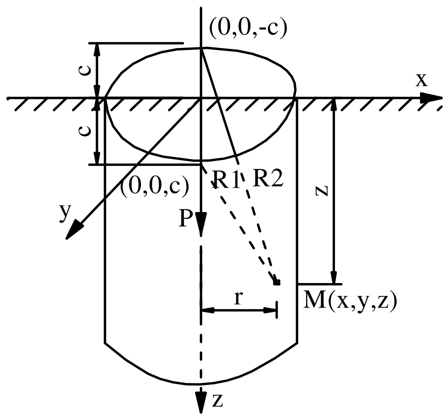
Hình II - 4

$$\sigma_Z = \frac{3Q}{2\pi}\frac{xz^2}{R^5} \qquad \text{(II - 8)}$$

Trong đó: $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$

2.1.3 Trường hợp lực tập trung thẳng đứng tác dụng trong nền đất hình (II - 5)

Trong thực tế khi tính toán công trình, có khi cần phải xác định ứng suất và chuyển vị của đất nền dưới tác dụng của lực tập trung đặt ngay trong nền đất (ví dụ: Khi phân tích các thí nghiệm nén sâu, khi nghiên cứu sự làm việc của cọc, v v ...) . Bài toán này đã được R.Midlin giải. Với các ký hiệu như hình (II - 5), biểu thức tính ứng suất nén thẳng đứng σ_z và chuyển vị thẳng đứng W sẽ tính là:



Hình II-5

$$\sigma_Z = \frac{P}{8\pi.(1-\mu)}[-\frac{(1-2\mu)(z-c)}{R_1^3} + \frac{(1-2\mu)(z-c)}{R_2^3} - \frac{3(z-c)^3}{R_1^5} -$$

$$-\frac{3(3-4\mu)z(z+c)^2 - 3c(z+c)(5z-c)}{R_2^5} - \frac{30c.z(z+c)^3}{R_2^7}] \qquad \text{(II - 9)}$$

$$W = \frac{P}{16\pi.G(1-\mu)}[\frac{(3-4\mu)}{R_1} + \frac{8(1-\mu)^2 - (3-4\mu)}{R_2} + \frac{(z-c)^2}{R_1^3} +$$

$$+\frac{(3-4\mu)(z+c)^2 - 2cz}{R_2^3} + \frac{6c.z(z+c)}{R_2^5}] \qquad \text{(II - 10)}$$

Trong đó: c - là chiều sâu đặt lực tập trung.

$G = \dfrac{E_0}{2(1-\mu)}$ là môđun trượt.

$R_1 = \sqrt{r^2 + (z-c)^2}$, $R_2 = \sqrt{r^2 + (z+c)^2}$

E_o,μ - Mô đun biến dạng và hệ số nở hông của đất.

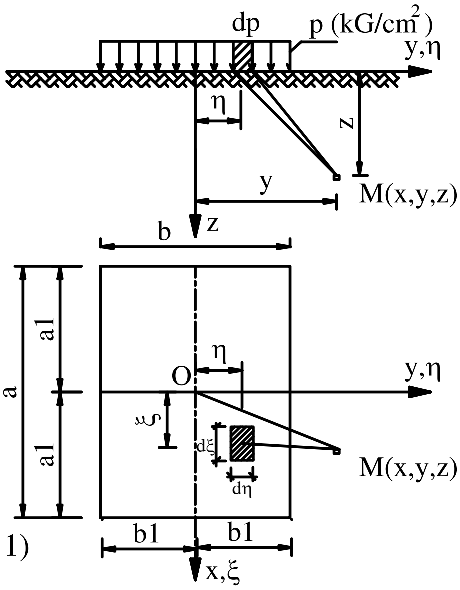
r - Khoảng cách từ trục tác dụng của lực tập trung đến điểm đang xét.

z- Toạ độ điểm đang xét.

2.2 Phân bố ứng suất trong trường hợp bài toán không gian

2.2.1 Trường hợp tải trọng phân bố đều trên diện tích hình chữ nhật

Như đã trình bày ở phần trên, trong thực tế không có lực tác dụng tại một điểm, mà chỉ có tải trọng tác dụng cục bộ. Để xác định ứng suất tại một điểm bất kỳ trong nền đất, dưới tác dụng của tải trọng phân bố đều trên diện tích hình chữ nhật như hình (II-6). Có thể giải quyết bài toán này bằng cách, lấy một diện tích chịu tải vô cùng nhỏ dF = dξdη và xem tải trọng tác dụng trên đó như một lực tập trung dp = p.dξdη tác dụng tại trọng tâm của diện chịu tải đó. Áp dụng biểu thức (II-1) của J.Boussinesq để tính ứng suất thành phần σ_Z tại điểm M bất kỳ, rồi tích phân diện tích F sẽ thu được biểu thức tính ứng suất dưới tác dụng của toàn bộ tải trọng hình chữ nhật như sau:



Hình II-6: Trường hợp tải trọng phân bố đều trên diện hình chữ nhật

Hay:

$$\sigma_Z^M = \frac{3pz^3}{2\pi}\int_{-b_1}^{+b_1}\int_{-a_1}^{+a_1}\frac{d\xi.d\eta}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{5/2}} \quad \text{(II-11)}$$

Trong đó: a_1, b_1 - là nửa cạnh chiều dài và nửa cạnh ngắn của hình chữ nhật.

Giải phương trình tích phân (II-11) rất phức tạp, nên không được áp dụng rộng rãi trong thực tế. Dưới đây chỉ giới thiệu các biểu thức V.G Carotkin để xác định ứng suất nén thẳng đứng trong các trường hợp đơn giản là:

Đối với các điểm nằm trên đường thẳng đứng đi qua tâm diện chịu tải hình chữ nhật có cạnh bằng $2a_1$và $2b_1$ (hình II-6) sẽ là:

$$\sigma_Z^0 = \frac{2.p}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{b_1.a_1}{z\sqrt{b_1^2+a_1^2+z^2}} + \frac{b_1.a_1.z\left(b_1^2+a_1^2+2.z^2\right)}{\left(b_1^2+z^2\right)\left(a_1^2+z^2\right)\sqrt{b_1^2+a_1^2+z^2}}\right] \quad \text{(II-12)}$$

Đối với các điểm nằm trên đường thẳng đứng đi qua góc diện tích chịu tải hình chữ nhật có cạnh bằng $2a_1$ và $2b_1$:

$$\sigma_Z^g = \frac{2.p}{\pi}\left[\frac{4.a_1.b_1.z\left(4b_1^2+4a_1^2+2z^2\right)}{\left(4.b_1^2+z^2\right)\left(4a_1^2+z^2\right)\sqrt{4.b_1^2+4a_1^2+z^2}} + \operatorname{arctg}\frac{4.a_1.b_1}{z\sqrt{4.b_1^2+4.a_1^2+z^2}}\right] \quad \text{(II-13)}$$

Việc tính toán các trị số ứng suất sẽ đơn giản hơn nhiều, nếu sử dụng các bảng hệ số tỷ lệ giữa ứng suất và cường độ tải trọng tác dụng, lập cho những điểm ở độ sâu khác nhau đối với các diện chịu tải khác nhau. Trong trường hợp này các biểu thức (II-12) và (II-13) có dạng tương ứng như sau:

Đối với các điểm nằm trên trục đi qua tâm tâm diện chịu tải:

$$\sigma_z^0 = K_0.p \quad \text{(II-12')}$$

Đối với các điểm nằm trên trục đi qua góc diện chịu tải:

$$\sigma_z^g = K_g.p \qquad \text{(II-13')}$$

Trong đó: K_0 và K_g - các hệ số phụ thuộc vào a/b và z/b tra theo bảng (II-2) và (II-3).

Phương pháp điểm góc:

Muốn xác định ứng suất của một điểm bất kỳ trong nền đất, như trên đã trình bày, có thể dùng biểu thức tích phân tổng quát (II-11). Tuy vậy, nếu làm như thế thì việc tính toán sẽ rất phức tạp. Để đơn giản hoá vấn đề tính toán người ta thường dùng phương pháp dựa vào ứng suất của những điểm nằm trên trục đi qua góc diện tích chịu tải hình chữ nhật gọi là phương pháp điểm góc, do D.E.Polsin đề ra đầu tiên (1933). Bản chất của phương pháp này là biến điểm đang xét thành điểm góc chung của các diện chịu tải hình chữ nhật nhỏ được phân chia ra:

Có ba trường hợp cơ bản:

1. Điểm M đang xét nằm trong phạm vi diện chịu tải (hình II-7.a): Ứng suất tại điểm M được tính bằng tổng ứng suất góc do tải trọng tác dụng lên bốn diện chịu tải Mgah, Mhbl, Mlcf và Mfdg và ta có:

$$\sigma_Z^M = \left(K_g^I + K_g^{II} + K_g^{III} + K_g^{IV}\right).p \qquad \text{(II-14)}$$

Trong đó: p - Cường độ tải trọng phân bố đều (kG/cm^2).

$K_g^I, K_g^{II}, K_g^{III}, K_g^{IV}$ -Các hệ số góc xác định theo bảng (II-3), phụ thuộc vào hai tỷ số a/b và z/b, trong đó a và b là chiều dài và chiều rộng hình chữ nhật đang xét tương ứng nói trên, z - Độ sâu điểm đang xét.

2. Điểm M đang xét nằm trên chu vi diện chịu tải (hình II-7.b): Ứng suất tại điểm M bằng tổng ứng suất góc do tải trọng tác dụng trên hai diện chịu tải hình chữ nhật Mabe và Mecd và ta có:

$$\sigma_Z^M = \left(K_g^I + K_g^{II}\right).p \qquad \text{(II-15)}$$

3. Điểm M đang xét nằm ngoài diện chịu tải (hình II7.c): Khi điểm M nằm ngoài diện chịu tải hình chữ nhật abcd, thì cần giả định có những diện tích chịu tải "ảo" như trong hình (II-7.c) và tính trị số σ_Z^M theo biểu thức như sau:

$$\sigma_Z^M = \left(K_g^I + K_g^{II} - K_g^{III} - K_g^{IV}\right).p \qquad \text{(II-16)}$$

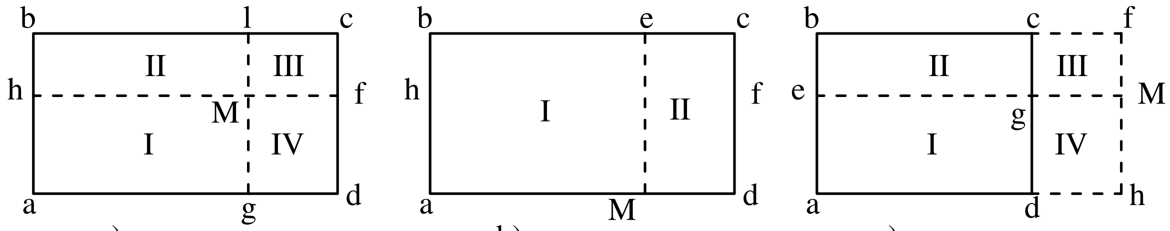
Trong đó:

K_g^I - Hệ số góc tra bảng ứng với hình chữ nhật Mhae

K_g^{II} - Hệ số góc tra bảng ứng với hình chữ nhật Mebf

K_g^{III} - Hệ số góc tra bảng ứng với hình chữ nhật Mgcf

K_g^{IV} - Hệ số góc tra bảng ứng với hình chữ nhật Mgdh



Hình II-7: Sơ đồ phân chia diện chịu tải hình chữ nhật khi xác định ứng suất theo phương pháp điểm góc.

Ví dụ II-2: Có tải trọng p = 4 kG/cm^2 phân bố đều trên một diện tích hình chữ nhật có kích thước: (20 × 10)m^2. Xác định ứng suất phụ thêm σ_z tại những điểm nằm dưới tâm ở các chiều sâu 5 m, 10 m và 15 m.

Giải: Tính trị số a/b và z/b rồi tra bảng (II-2) để tìm trị số K_0:

$$\frac{a}{b}=\frac{20}{10}=2\text{ , Khi}\qquad z=5m;$$

thì : $\frac{z}{b}=\frac{5}{10}=0{,}5; K_0=0{,}734; \sigma_Z=0{,}734\times 4=2{,}94\,kG/cm^2$.

$$z = 10m;\text{ thì : }\frac{z}{b}=\frac{10}{10}=1{,}0;\ K_0=0{,}470; \sigma_Z=0{,}470\times 4=1{,}88\,kG/cm^2$$

$$z = 15m;\text{ thì : }\frac{z}{b}=\frac{15}{10}=1{,}5; K_0=0{,}288; \sigma_Z=0{,}288\times 4=1{,}15\,kG/cm^2$$

Ví dụ II-3: Tải trọng như ví dụ (II-2) xác định ứng suất phụ thêm tại các điểm L, M ở độ sâu 5 m và có vị trí trên mặt bằng như trên hình (II-8).

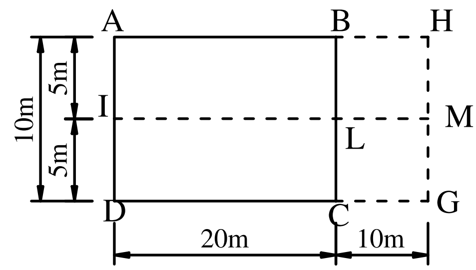
Giải: Dùng phương pháp điểm góc ta có:

Tại điểm L: $\sigma_Z^L=\left[K_{g(LIAB)}+K_{g(LIDC)}\right]p$

do đối xứng nên $K_{g(LIAB)} = K_{g(LIDC)}$

Xét hình chữ nhật LIAB ta có:

$\frac{a}{b}=\frac{20}{5}=4;\frac{z}{b}=\frac{5}{5}=1$, Tra bảng (II-3) ta được: $K_{g(LIAB)} = 0{,}204$



Hình II-8

Vậy σ_Z^L=2x0.204x4=1,63kG/cm^2

Tại điểm M: $\sigma_Z^M=\left[K_{g(MIAH)}+K_{g(MIDG)}-K_{g(MLBH)}-K_{g(MLCG)}\right]p$

hay $\sigma_Z^M=2\left[K_{g(MIAH)}-K_{g(MLBH)}\right]p$

Đối với hình chữ nhật MIAH:

$$\frac{a}{b}=\frac{30}{5}=6; \frac{z}{b}=\frac{5}{5}=1; \; K_{g(MIAH)}=0{,}205$$

Đối với hình chữ nhật MLBH:

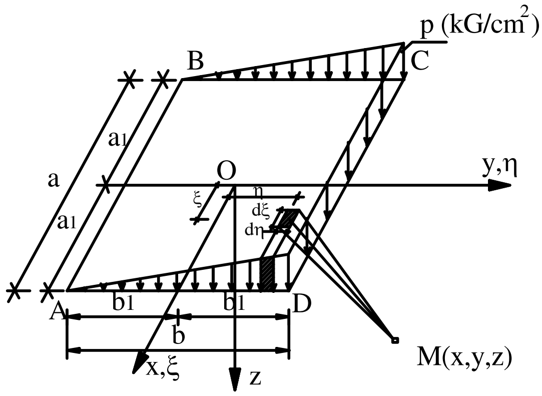
$$\frac{a}{b}=\frac{10}{5}=2; \; \frac{z}{b}=\frac{5}{5}=1; \; K_{g(MLBH)}=0{,}200$$

Vậy $\sigma_Z^M = 2[0{,}205-0{,}200].4 = 0{,}04\,kG/cm^2$

Qua hai ví dụ trên có thể nhận xét rằng: Càng đi xuống sâu hoặc càng ra xa khỏi tâm diện tích tác dụng của tải trọng thì trị số ứng suất phụ thêm σ_Z càng giảm dần.

2.2.2 Trường hợp tải trọng phân bố trên diện tích hình chữ nhật theo biểu đồ tam giác:

Trong trường hợp này, cũng như trong trường hợp tải trọng phân bố đều trên diện tích hình chữ nhật. Ta lấy một diện tích chịu tải phân tố vô cùng nhỏ dF = dξ.dη và xem tải trọng đó tác dụng trên phân bố dF như một lực tập trung dp = $p_{(\eta)}$.dξ.dη tác dụng tại trọng tâm của phân tố đó như trên hình (II-9). Áp dụng biểu thức (II-1.a) của J.Boussinesq để tính ứng suất thành phần σ_z tại điểm M(x,y,z) bất kỳ trong nền đất, rồi tích phân diện tích ta sẽ thu được biểu thức tính ứng suất dưới tác dụng của toàn bộ tải trọng phân bố trên diện tích hình chữ nhật theo biểu đồ tam giác như sau:



Hình II-9

$$p_{(\eta)} = \frac{p}{2}.\left(1+\frac{\eta}{b_1}\right) \quad \text{(II-17)}$$

Trong đó: $p_{(\eta)}$ - Cường độ tải trọng tại phân tố có diện tích dF = dξ.dη.

p - Cường độ tải trọng lớn nhất tác dụng trên diện tích hình chữ nhật.

η - Toạ độ của phân tố dF.

b_1 - Nửa cạnh song song với chiều có tải trọng thay đổi.

Như vậy lực tập trung dp tại trọng tâm của phân tố đó sẽ là:

$$dp = \frac{p}{2}.\left(1+\frac{\eta}{b_1}\right).d\xi.d\eta \quad \text{(II-18)}$$

Biểu thức tổng quát để tính σ_Z trong trường hợp này sẽ là:

$$\sigma_Z^M = \frac{3.p.z^3}{4.\pi}\int_{-a_1}^{+a_1}\int_{-b_1}^{+b_1}\frac{\left(1+\frac{\eta}{b_1}\right).d\xi.d\eta}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{5/2}} \qquad \text{(II-19)}$$

Trong đó: a_1,b_1 - là nửa cạnh chiều dài và nửa cạnh chiều rộng của diện chịu tải hình chữ nhật.

ξ, η - Là toạ độ của điểm đặt lực tập trung dp.

x,y,z - Là toạ độ của điểm M đang xét.

Sau khi tích phân phương trình (II-19) ta sẽ thu được biểu thức tính ứng suất thành phần σ_z cho một điểm có vị trí bất kỳ. Dĩ nhiên, việc thực hiện tính toán với biểu thức trên rất phức tạp, nên người ta không dùng trực tiếp biểu thức đó, mà trong thực tế chỉ giải cho trường hợp đơn giản nhất. Đó là trường hợp, xác định ứng suất nén thẳng đứng của những điểm bất kỳ nằm trên trục thẳng đứng đi qua các điểm góc ở phía có cường độ tải trọng lớn nhất (D) và các điểm góc ở phía có cường độ tải trọng nhỏ nhất (A).

Trường hợp, đối với những điểm nằm trên trục thẳng đứng đi qua góc (A) ta có $x = a_1$ và $y = -b_1$:

$$\sigma_Z^A = \frac{3.p.z^3}{4.\pi}\int_{-a_1}^{+a_1}\int_{-b_1}^{+b_1}\frac{\left(1+\frac{\eta}{b_1}\right).d\xi.d\eta}{\left[(a_1-\xi)^2+(-b_1-\eta)^2+z^2\right]^{5/2}} \qquad \text{(II-20)}$$

Trường hợp đối với những điểm nằm trên trục thẳng đứng đi qua điểm góc D ta có ($x = a_1$; $y = b_1$):

$$\sigma_Z^D = \frac{3.p.z^3}{4.\pi}\int_{-a_1}^{+a_1}\int_{-b_1}^{+b_1}\frac{\left(1+\frac{\eta}{b_1}\right).d\xi.d\eta}{\left[(a_1-\xi)^2+(b_1-\eta)^2+z^2\right]^{5/2}} \qquad \text{(II-21)}$$

Để đơn giản cho việc tính toán các biểu thức trên, người ta đã lập bảng xác định hệ số tỷ lệ, nên các biểu thức (II-20) và (II-21) có thể viết dưới dạng rút gọn như sau:

Đối với những điểm nằm trên trục đi qua góc A:

$$\sigma_Z^A = K_A.p \qquad \text{(II-20a)}$$

Đối với những điểm nằm trên trục đi qua góc D:

$$\delta_Z^D = K_D.p \qquad \text{(II-21a)}$$

Trong đó: K_A và K_D - hệ số phụ thuộc vào hai tỷ số a/b và z/b tra theo bảng (II-4) và (II-5).

p - Trị số tải trọng lớn nhất tác dụng trên diện chịu tải hình chữ nhật (kG/cm^2)

Phương pháp điểm góc:

Trong trường hợp tính ứng suất tại một điểm bất kỳ trong nền đất, dưới tác dụng của tải trọng phân bố trên diện tích hình chữ nhật theo quy luật hình tam giác. Ta có thể biến điểm đang xét thành điểm góc của các diện chịu tải nhỏ, rồi tuỳ thuộc vào vị trí của điểm đang xét mà chia diện chịu tải thành các trường hợp cơ bản và áp dụng phương pháp điểm góc để xác định ứng suất. Phương pháp này được ứng dụng rộng rãi trong thực tế để xét sự phân bố ứng suất trong nền đất cũng như tính lún công trình khi xét đến ảnh hưởng của các móng công trình lân cận.

a) Trường hợp điểm M đang xét nằm trên chu vi hình chữ nhật: (hình II-10.a)

Qua điểm M ta phân hình chữ nhật lớn ABCD thành hình chữ nhật I và hình chữ nhật II (hình I tương ứng với hình chữ nhật ABMN, hình II tương ứng với hình chữ nhật MCDN). Như vậy, hình chữ nhật I chịu tải trọng phân bố theo quy luật hình tam giác có cường độ lớn nhất là p_1 điểm M tương ứng với điểm D đã xét ở trên. Hình chữ nhật II có tải trọng tác dụng theo quy luật hình thang, do đó có thể phân thành tải trọng phân bố đều trên hình chữ nhật có cường độ là p_1 và tải trọng phân bố theo quy luật hình tam giác trên diện tích hình chữ nhật (hình II-10.a) có cường độ lớn nhất là $(p-p_1)$. Vậy ứng suất nén σ_Z tại điểm M do toàn bộ tải trọng gây ra trong trường hợp này có thể tính theo biểu thức như sau:

$$\sigma_Z^M = K_D^I.p_1 + K_g^{II}.p_1 + K_A^{II}(p-p_1) \qquad \text{(II-22)}$$

Trong đó: $K_D^I, K_g^{II}, K_A^{II}$ - là hệ số góc của hình I và hình II như phần trên đã xét.

b) Điểm M đang xét nằm trong diện chịu tải hình chữ nhật hình (II-10.b)

Bằng cách phân tích tương tự như trên và ký hiệu như trên hình (II-10.b) ta có thể tính ứng suất nén thẳng đứng σ_Z tại điểm M do toàn bộ tải trọng gây ra như sau:

$$\sigma_Z^M = \left(K_D^I + K_D^{II}\right)p_1 + K_g^{IV}.p_1 + K_A^{IV}(p-p_1) + K_g^{III}.p_1 + K_A^{III}(p-p_1) \qquad \text{(II-23)}$$

c) Điểm M đang xét nằm ngoài diện chịu tải hình chữ nhật.

Khi điểm M nằm ngoài diện chịu tải hình chữ nhật có thể xảy ra hai trường hợp: Điểm M đang xét nằm ngoài về phía có cường độ tải trọng lớn nhất là p và điểm M đang xét nằm ngoài về phía có cường độ nhỏ nhất (hay là p = 0).

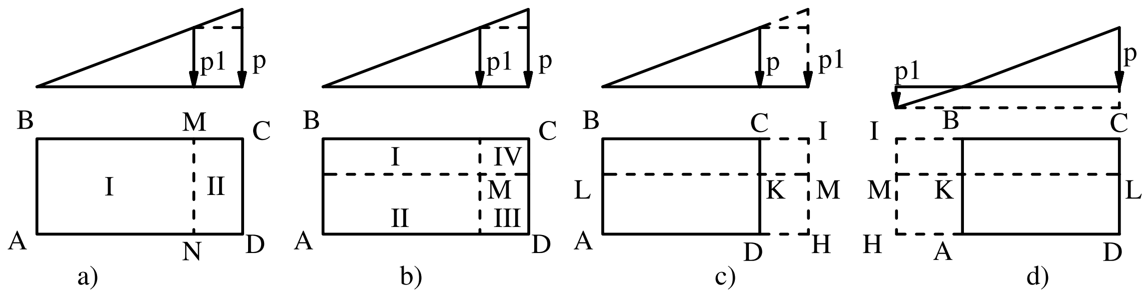
Trường hợp khi điểm M đang xét nằm ngoài về phía có cường độ tải trọng lớn nhất là p, ta cần giả định có những diện chịu tải ảo như trên hình (II-10.c), với cách giả định như vậy kết hợp với sự phân tích lực tác dụng trên các diện tích giả định đó, ta cũng có thể tính ứng suất nén thẳng đứng σ_Z tại điểm M trong trường hợp này như sau:

Nếu ta ký hiệu: Hình I là hình MLBI; hình II là hình MLAH, hình III là hình MKCI và hình IV là hình MKDH thì ta có:

$$\sigma_Z^M = K_D^I.p_1 + K_D^{II}.p_1 - \left[K_g^{III}.p + K_D^{III}(p_1 - p) + K_g^{IV}.p + K_D^{IV}(p_1 - p)\right] \quad \text{(II-24)}$$

Trường hợp khi điểm M nằm ngoài về phía có cường độ tải trọng nhỏ nhất (p = 0). Bằng cách phân tích như trên hình (II-10.d) và ký hiệu hình I là hình MLCI; hình II là hình MLDH; hình III là hình MKBI và hình IV là hình MKAH. Ta có thể tính ứng suất nén σ_Z tại điểm M trong trường hợp này như sau:

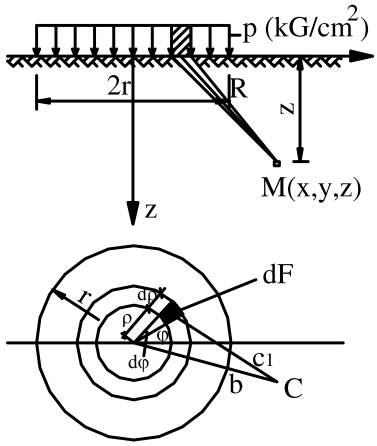
$$\sigma_Z^M = \left(K_A^I + K_A^{II}\right).(p - p_1) - \left[\left(K_g^I + K_g^{II}\right).p_1 - \left(K_D^{III} + K_D^{IV}\right).p_1\right] \quad \text{(II-25)}$$



Hình II-10: Sơ đồ ứng suất theo phương pháp điểm góc đối với trường hợp tải trọng phân bố trên diện tích hình chữ nhật theo quy luật hình tam giác

2.2.3 Trường hợp tải trọng phân bố đều trên diện tích hình tròn

Giả sử có tải trọng p phân bố đều trên diện tích hình tròn tâm O có bán kính r. Cần xác định ứng suất do tải trọng đó gây nên ở những điểm nằm trên đường thẳng đứng đi qua một điểm C bất kỳ trên mặt đất. Để tính ứng suất nén thẳng đứng σ_Z của một điểm M bất kỳ trong nền đất trong trường hợp này, ta cũng tách ra một diện tích phân tố vô cùng nhỏ dF = dρ.dφ.ρ, và xem tải trọng tác dụng trên diện phân tố như một lực tập trung dp = p.ρ.dρ.dφ tác dụng tại trọng tâm của diện phân tố như hình (II-11). Áp dụng biểu thức (II-1) của J.Boussinesq để tính ứng suất thành phần σ_Z tại một điểm M bất kỳ, rồi tích phân trên toàn bộ diện tích,



Hình II-11

ta sẽ thu được biểu thức tính ứng suất dưới dạng của toàn bộ tải trọng phân bố đều trên diện tích hình tròn như sau:

$$\sigma_Z^M = \frac{3.p.z^3}{2.\pi}\int_0^r\int_0^{2\pi}\frac{\rho.d\rho.d\varphi}{R^5} \quad \text{(II-26)}$$

Trong đó: $R^2 = z^2 + c_1^2$ mà $c_1^2 = b^2 + \rho^2 - 2.b.\rho.\cos\varphi$

r - Là bán kính hình tròn của diện chịu tải.

b - Là hình chiếu của khoảng cách từ điểm đang xét tới tâm hình tròn trên mặt phẳng nằm ngang.

ρ - Là khoảng cách từ lực tập trung dp tới tâm hình tròn.

Do đó ta có thể viết:

$$\sigma_Z^M = \frac{3.p.z^3}{2.\pi}\int_0^r\int_0^{2\pi}\frac{\rho.d\rho.d\varphi}{\left(\rho^2+b^2+z^2-2.b.\rho.\cos\varphi\right)^{5/2}} \qquad \text{(II-27)}$$

Sau khi tích phân và giải phương trình (II-27) ta được biểu thức rút gọn dưới dạng như sau:

$$\sigma_Z^M = K_{tr}.p \qquad \text{(II-28)}$$

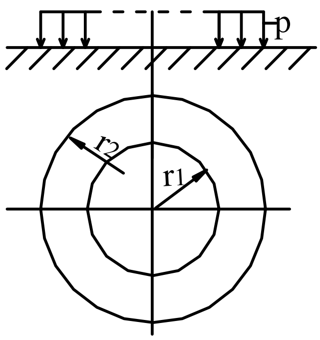
Trong đó: K_{tr}- Hệ số phụ thuộc vào hai tỷ số b/r và z/r tra theo bảng (II-6).

Nếu tính ứng suất thành phần σ_Z cho những điểm nằm trên trục thẳng đứng đi qua tâm hình tròn chịu tải thì biểu thức σ_Z có dạng như sau:

$$\sigma_Z^0 = p.\left\{1-\left[\frac{1}{1+(r/z)^2}\right]^{3/2}\right\} = K_{Tr}^o.p \qquad \text{(II-29)}$$

Trong đó: K_{Tr}^o - là hệ số phụ thuộc và tỷ số r/z tra theo bảng (II-7).

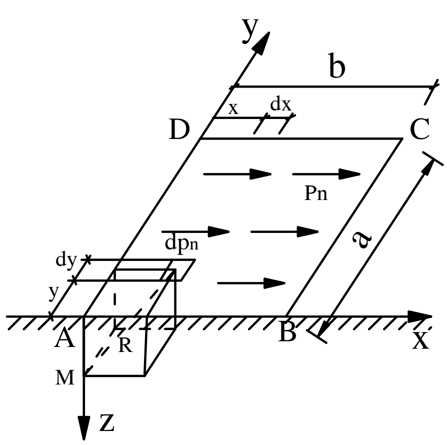
- Cần chú ý rằng chúng ta có thể vận dụng kết quả tính được trong trường hợp trên để tính ứng suất tại một điểm bất kỳ trong trường hợp tải trọng phân bố đều trên hình vành tròn (hình II-12). Lúc này chỉ cần tính hiệu của hai ứng suất σ_Z tương ứng với hai hình tròn có bán kính r_1 và r_2.



Hình II-12

2.2.4 Tải trọng nằm ngang phân bố đều trên diện tích hình chữ nhật.

Trong trường hợp này tải trọng phân bố như trên hình (II-13), cũng như các trường hợp trên, ta phân tải trọng nằm ngang phân bố đều, thành các tải trọng phân tố tập trung nằm ngang. Sau đó áp dụng công thức (II-8) của trường hợp tải trọng tập trung nằm ngang, rồi tích phân theo toàn bộ diện tích hình chữ nhật chịu tải, ta sẽ có thể tìm được công thức tính ứng suất σ_Z tại những điểm nằm dưới hai điểm góc A,B như sau:



Hình II - 13

$$\sigma_Z^M = \frac{3.p_n.z^3}{2.\pi}\int_0^a\int_0^b \frac{x.dx.dy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} = \pm K_n.p_n \qquad \text{(II-30)}$$

Trong đó: K_n - là hệ số phụ thuộc vào a/b và z/b tra theo bảng (II-8).

b - Là chiều dài cạnh song song với chiều tác dụng của tải trọng.

a - Là chiều dài cạnh thẳng góc với chiều tác dụng của lực.

Xét về trị số tuyệt đối mà nói, thì ứng suất tại những điểm có cùng độ sâu z dưới A và B có giá trị bằng nhau, nhưng về dấu thì khác nhau. Về phía điểm A ứng suất có dấu âm (ứng suất kéo), còn về phía B thì ứng suất có dấu dương (ứng suất nén).

Đối với những điểm không nằm dưới góc A và B, khi tính ứng suất σ_Z ta có thể áp dụng phương pháp điểm góc như các phần trên đã trình bày.

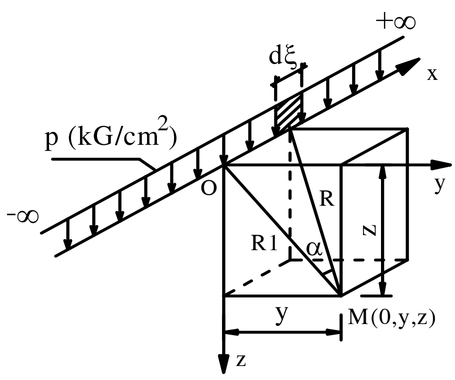
2.3. Phân bố ứng suất trong trường hợp bài toán phẳng

Bài toán phẳng là bài toán mà ứng suất phân bố trong một mặt nào đó sẽ không phụ thuộc vào toạ độ vuông góc với mặt phẳng ấy. Trong thực tế xây dựng, việc xác định sự phân bố ứng suất của nền đất dưới các móng băng tường nhà, tường chắn, đê, đập thuỷ công, nền đường đất đắp, v.v... đều có thể coi là thuộc bài toán phẳng. Trong trường hợp này, chiều dài của công trình lớn hơn gấp nhiều lần so với chiều rộng của nó. Do đó chỉ cần tách một phần công trình (thường là bằng một đơn vị chiều dài) ra bằng hai tiết diện ngang song song để xét, sự phân bố ứng suất dưới phần công trình đó sẽ tiêu biểu cho trạng thái ứng suất dưới toàn bộ công trình.

Giáo sư N.P.Pưzurevxki (1923,1929) người đầu tiên đã cho lời giải về sự phân bố ứng suất trong trường hợp chung của bài toán phẳng với giả thiết là sự thay đổi ứng suất tại một điểm đã cho chỉ phụ thuộc vào góc tạo nên bởi bán kính vecto và chiều dương của trục nằm ngang. Giáo sư N.M.Gerxevanov (1933) bằng phương pháp các đặc trưng Côsi và hàm số ứng suất có điều kiện đã đưa ra lời giải tổng quát các phương trình tích phân của bài toán phẳng, sau này, V.A.Florin (1959) đã tìm ra được nhiều lời giải chi tiết hơn về bài toán phẳng.

2.3.1 Trường hợp tải trọng phân bố đều theo đường thẳng:

Xét trường hợp khi trên mặt đất có tác dụng một tải trọng thẳng đứng phân bố đều trên đường thẳng dài vô tận (Hình II-14) cũng như trường hợp lực tập trung trên bề mặt nửa không gian biến dạng tuyến tính, trường hợp này, thực ra không bao giờ có thể gặp thấy trong thực tế. Mặc dù vậy, bài toán này vẫn cómột ý nghĩa lý thuyết cơ bản và nghiệm của nó được dùng làm cơ sở để giải các trường hợp cụ thể khác nhau của bài toán phẳng, khi trên mặt đất có các tải



Hình II-14

trọng tác dụng với các dạng phân bố khác nhau:

Xét một đoạn vô cùng nhỏ dξ trên trục phân bố tải trọng, và xem tải trọng tác dụng trên đó như một lực tập trung dp =p.dξ. Áp dụng công thức (II-1a) của J.Boussinesq để tìm ứng suất do lực tập trung dp gây nên tại một điểm M trên mặt yoz, sau đó tích phân từ -∞ đến +∞ ta sẽ được biểu thức tính ứng suất σ_Z tại một điểm M trên mặt yoz do toàn bộ tải trọng phân bố đều trên đường thẳng gây nên như sau:

$$\sigma_Z^M = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3.p.z^3.d\xi}{2\pi.R^5} \qquad \text{(II-31)}$$

Trong đó: $R^2 = R_1^2 + \xi^2 = R_1^2\left(1 + \frac{\xi^2}{R_1^2}\right)$

Theo trên hình (II-14) ta có: $\xi = R_1.tg\alpha$ hay $d\xi = R_1.\frac{1}{\cos^2\alpha}.d\alpha$, ở đây góc α thay đổi từ $0 \div \frac{\pi}{2}$ hay từ $\frac{\pi}{2} \div 0$ thay vào công thức (II-31) ta có:

$$\sigma_Z^M = \frac{3.p.z^3}{2.\pi}.2.\int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha.R_1^4\left(1+tg^2\alpha\right)^{5/2}} \qquad \text{(II-32)}$$

Vì $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ nên ta có:

$$\sigma_z^M = \frac{3.p.z^3}{\pi.R_1^4}\int_0^{\pi/2}\cos^3\alpha.d\alpha = \frac{3.p.z^3}{\pi.R_1^4}\left[\int_0^{\pi/2}\left(1-\sin^2\alpha\right).d(\sin\alpha)\right]$$

$$\sigma_Z^M = \frac{2.p}{\pi}.\frac{z^3}{R_1^4} = \frac{2.p}{\pi}.\frac{z^3}{\left(y^2+z^2\right)^2};$$

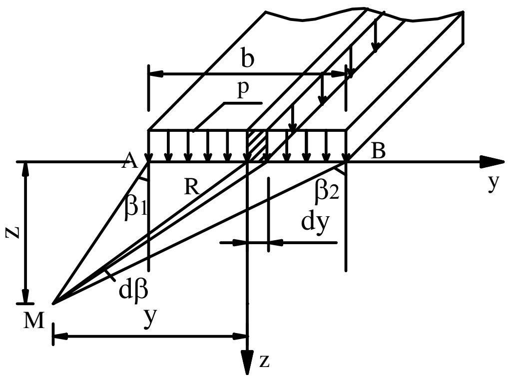
Tương tự ta có:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{2.p}{\pi}.\frac{y^2.z}{R_1^4} = \frac{2p}{\pi}.\frac{y^2.z}{\left(y^2+z^2\right)^2} \\ \tau_{YZ} = \tau_{ZY} &= \frac{2.p}{\pi}.\frac{y.z^2}{R_1^4} = \frac{2.p}{\pi}.\frac{y.z^2}{\left(y^2+z^2\right)^2} \end{aligned}\right\} \qquad \text{II-33}$$

Từ công thức (II-33), ta có nhận xét rằng, trị số ứng suất thành phần không phụ thuộc vào tính chất của đất. Nói một cách rõ ràng hơn là, các ứng suất thành phần σ_z, σ_y, và τ_{yz} trong mặt phẳng yoz không phụ thuộc vào các đặc trưng biến dạng của bán không gian biến dạng tuyến tính như môđun biến dạng E_0 và hệ số nở hông μ, nghĩa là nó sẽ đúng cho bất cứ vật thể nào mà sự phụ thuộc giữa ứng suất và biến dạng có thể xem như sự phụ thuộc tuyến tính. Đó là một tính chất quan trọng của bài toán phẳng .

2.3.2 Trường hợp tải trọng phân bố đều hình băng:

Trong trường hợp này nếu áp dụng lời giải của Flament ta có thể tách một đoạn phân tố có bề rộng là dy, thì dp = p.dy của đoạn phân tố đó chính là cường độ tải trọng phân bố đều theo đường thẳng (hình II-15) . áp dụng công thức (II-33) ta có công thức tính ứng suất σ_Z do tải trọng đường thẳng dp = p.dy gây nên tại M(y,z) là:



Hình II-15

$$d\sigma = \frac{2.p}{\pi}.\frac{z^3.dy}{R^4} \qquad \text{(II-34)}$$

Để tiện cho việc lấy tích phân, giải bài toán này theo hệ tọa độ cực, bán kính vectơ R và góc β hợp bởi phương của bán kính vectơ R với phương thẳng đứng:

Dựa trên hình vẽ (II-15) ta có: $y = z.tg\beta$ và $dy = \frac{z}{\cos^2\beta}.d\beta; \cos\beta = \frac{z}{R}$

Thay dy vào công thức (II-34) và đơn giản biểu thức ta có

$$d\sigma = \frac{2.p}{\pi}.\cos^2\beta.d\beta \qquad \text{(II-35)}$$

Tích phân phương trình (II-35) từ β_1 đến β_2 ta được biểu thức tính ứng suất σ_Z do toàn bộ tải trọng phân bố đều hình băng gây nên tại M(y,z) là

$$\sigma_z^M = \frac{p}{\pi}\int_{\beta_1}^{\beta_2}(1+\cos 2\beta).d\beta = \frac{p}{\pi}\left\{\beta\Big|_{\beta_1}^{\beta_2} + \frac{\sin 2\beta}{2}\Big|_{\beta_1}^{\beta_2}\right\} \qquad \text{(II-36)}$$

$$\sigma_z^M = \frac{p}{\pi}.\left[\beta_2 + \frac{1}{2}.\sin 2\beta_2 - (\pm\beta_1) - \frac{1}{2}\sin(\pm 2.\beta_1)\right] \qquad \text{(II-37)}$$

Bằng cách làm tương tự đối với σ_y và τ_{yz} ta có các biểu thức sau:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_y^M &= \frac{p}{\pi}.\left[\beta_2 - \frac{1}{2}.\sin 2\beta_2 - (\pm\beta_1) + \frac{1}{2}.\sin(\pm 2\beta_1)\right] \\ \tau_{yz} &= \frac{p}{2.\pi}\left[\cos 2\beta_1 - \cos 2\beta_2\right] \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II-38)}$$

Trị số β_1 lấy dấu (+) khi điểm M nằm ngoài giới hạn dải tải trọng, lấy dấu (-) khi điểm M nằm trong phạm vi dải tải trọng.

Trong đó: β_1 và β_2 là những góc được tạo bởi các đường thẳng nối từ M đến mép A và mép B của dải tải trọng với đường thẳng đứng. Để tiện cho việc tính toán, người ta đã thành lập bảng tính (II-9) cho các trị số $\frac{\sigma_z}{p}, \frac{\sigma_y}{p}, \frac{\tau_{yz}}{p}$ và trị số $\frac{\Theta}{p}$ tại hai điểm dưới mép tải trọng có thể tra ở bảng (II-10). Người ta đã chứng minh rằng phương của các ứng suất chính tại mỗi điểm trùng hoặc thẳng góc với đường phân giác của góc nhìn 2β (Hình II-15), góc 2β có giá trị bằng $[\beta_2 - (\pm\beta_1)]$. Đối với các điểm M nằm trên đường thẳng đứng Oz đi qua trục đối xứng của dải tải trọng, do tính chất đối xứng nên $\beta_1 = \beta_2 = \beta$; Do đó:

$$\tau_{yz} = \frac{p}{2\pi}(\cos 2\beta_1 - \cos 2\beta_2) = 0 \qquad \text{(II-39)}$$

Như vậy tại các điểm nằm trên Oz, ứng suất cắt $\tau = 0$, và các ứng suất thành phần σ_z và σ_y tác dụng như các ứng suất chính lớn nhất và nhỏ nhất:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z &= \sigma_1 = \frac{p}{\pi}(2\beta + \sin 2\beta) \\ \sigma_y &= \sigma_3 = \frac{p}{\pi}(2\beta - \sin 2\beta) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II-40)}$$

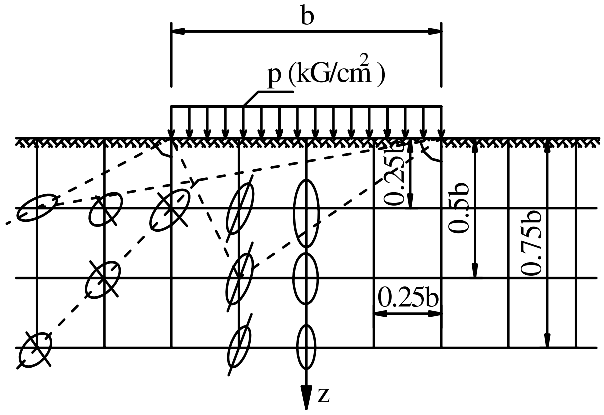
Từ đây ta thấy rằng:

$$\sigma_1 + \sigma_3 = \frac{2p}{\pi}.2\beta \qquad \text{(II-41)}$$

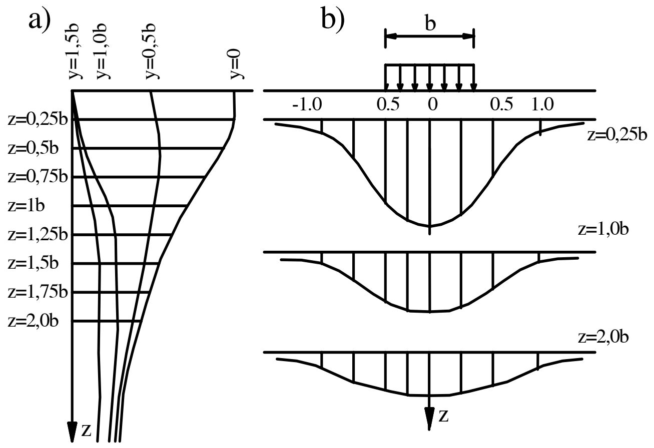
Từ biểu thức (II- 41) cho thấy: Với một trị số nhất định của cường độ tải trọng p, tổng số ứng suất chính chỉ phụ thuộc vào trị số của góc nhìn 2β mà thôi. Khi điểm M trên đường Oz nằm ngang trên mặt đất, góc 2β có giá trị cực đại là π. Điểm M càng chuyển xuống phía dưới thì góc 2β càng giảm dần và cuối cùng tiến tới không, khi M tiến tới vô cực. Như vậy ta thấy rằng điểm M càng gần tải trọng bao nhiêu thì tổng ứng suất $\sigma_1 + \sigma_3$ càng lớn bấy nhiêu.

Công thức (II-40) cho phép chúng ta xây dựng các elíp ứng suất đặc trưng cho trạng thái ứng suất tại mỗi điểm trong nền đất. Hai trục của Elíp ứng suất ứng với phương của ứng suất chính (Hình II-16) .

Hình (II-17) cho thấy những biểu đồ ứng suất σ_z đối với các diện ngang và dọc của



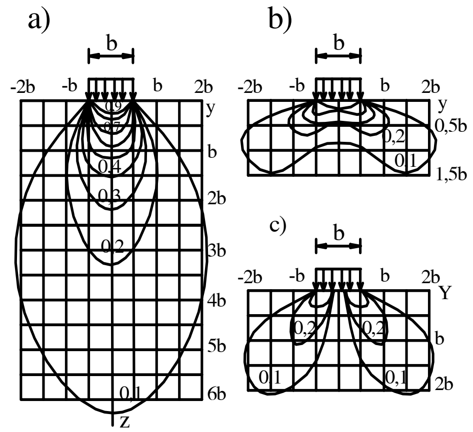
Hình II-16: Elíp ứng suất dưới tải trọng hình băng nền đất. Hình (II-18) là các đường đẳng ứng suất (là đường nối của các điểm cùng trị số ứng suất) ở trong nền đất.



Hình II-17: Biểu đồ phân bố ứng suất nén σ_Z

a -Theo chiều sâu

b- Theo chiều rộng



Hình II-18: a- Các đường đẳng ứng suất σ_Z

b - Các đường đẳng ứng suất σ_y

c- Các đường đẳng ứng suất τ

Ví dụ II-4: Một tải trọng phân bố đều hình băng có bề rộng 10 m, cường độ tải trọng p = 4kG/cm^2. Tìm trị số σ_z tại điểm nằm trên trục đối xứng Oz và ở các độ sâu 5m, 10m và 15m.

Giải: Ở đây theo bài toán cho ta có: y/b=0. Dùng bảng (II-9) tra được

$$\text{Với } \frac{z}{b}=\frac{5}{10}=0{,}5\text{; ta có } \frac{\sigma_z}{p}=0{,}82\text{; } \sigma_z = 0{,}82 \times p = 0{,}82 \times 4 = 3{,}28 \text{ kG/cm}^2$$

$$\text{Với } \frac{z}{b}=\frac{10}{10}=1{,}0\text{; ta có } \frac{\sigma_z}{p}=0{,}55\text{; } \sigma_z = 0{,}55 \times p = 0{,}55 \times 4 = 2{,}20 \text{ kG/cm}^2$$

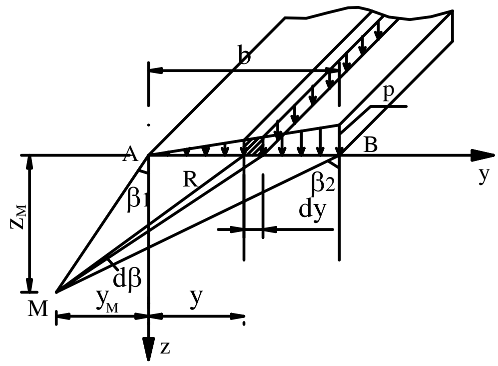
$$\text{Với } \frac{z}{b}=\frac{15}{10}=1{,}5\text{; ta có } \frac{\sigma_z}{p}=0{,}40\text{; } \sigma_z = 0{,}40 \times p = 0{,}55 \times 4 = 1{,}60 \text{ kG/cm}^2$$

So sánh các kết quả của ví dụ này với kết quả của ví dụ (II-2) ta thấy rằng, với cường độ tải trọng và chiều rộng diện tích chịu tải như nhau, tại cùng các độ sâu 5m, 10m, 15m. Trong trường hợp bài toán phẳng biểu đồ ứng suất σ_Z tắt dần chậm hơn ở trường hợp bài toán không gian. Điều này cũng có thể nhận thấy ngay ở bảng (II-2), khi $\frac{a}{b}$ càng lớn thì hệ số K_0 càng giảm đi chậm hơn.

2.3.3 Trường hợp tải trọng là dải phân bố theo hình tam giác

Trong thực tế thường gặp các loại bài toán xác định ứng suất trong đất dưới tác dụng của tải trọng hình băng phân bố không đều, có cường độ thay đổi theo những quy luật khác nhau. Trường hợp phổ biến nhất trong những loại tải trọng như vậy là trường hợp tải trọng hình băng phân bố theo quy luật hình tam tam giác (Hình II-19).

Cũng như các trường hợp trên, trong trường hợp này ta cũng tách ra một phân tố với bề rộng là dy, và tải trọng dp tác dụng trên đoạn phân tố đó chính là cường độ tải trọng phân bố đều trên đường thẳng. Do đó, Từ hình vẽ (II-19) ta có:



Hình II-19

$$dp = p_{(y)}.dy \qquad \text{(II- 42)}$$

Trong đó ta có:

$$p_{(y)} = \frac{p.y}{b};\ dy = \frac{R.d\beta}{\cos\beta}$$ và $y = z(tg\beta - tg\beta_1)$

Ở đây : p - là cường độ của tải trọng lớn nhất của hình tam giác

$p_{(y)}$ - cường độ của tải trọng phân bố trên diện phân tố dy

Thay các giá trị trên vào công thức (II - 42) ta có

$$dp = \frac{p.R.z}{b.\cos\beta}.(tg\beta - tg\beta_1)d\beta \qquad \text{(II - 42')}$$

Vậy ứng suất thẳng đứng do tải trọng đường thẳng với cường độ dp gây nên tại M sẽ là :

$$d\sigma = \frac{2.p.z^4.R}{R^4.\pi.b.\cos\beta}.(tg\beta - tg\beta_1)d\beta \qquad \text{(II - 43)}$$

Thay $z^3 = R^3\cos^3\beta$ và sau khi giảm ước ta có :

$$d\sigma = \frac{2.p.z}{\pi.b}.\cos^2\beta(tg\beta - tg\beta_1)d\beta \qquad \text{(II - 43a)}$$

Tích phân biểu thức (II - 43a) từ β_1 đến β_2 ta sẽ có biểu thức tính ứng suất σ_z do toàn bộ tải trọng hình băng phân bố theo quy luật hình tam giác gây nên tại điểm M(y,z) như sau :

$$\sigma_z = \frac{p.z}{\pi.b}\left[\sin^2\beta_2 - \sin^2\beta_1 - tg\beta_1\left(\beta_2 + \frac{1}{2}.\sin 2\beta_2 - \beta_1 - \frac{1}{2}\sin 2\beta_1\right)\right] \qquad \text{(II - 44)}$$

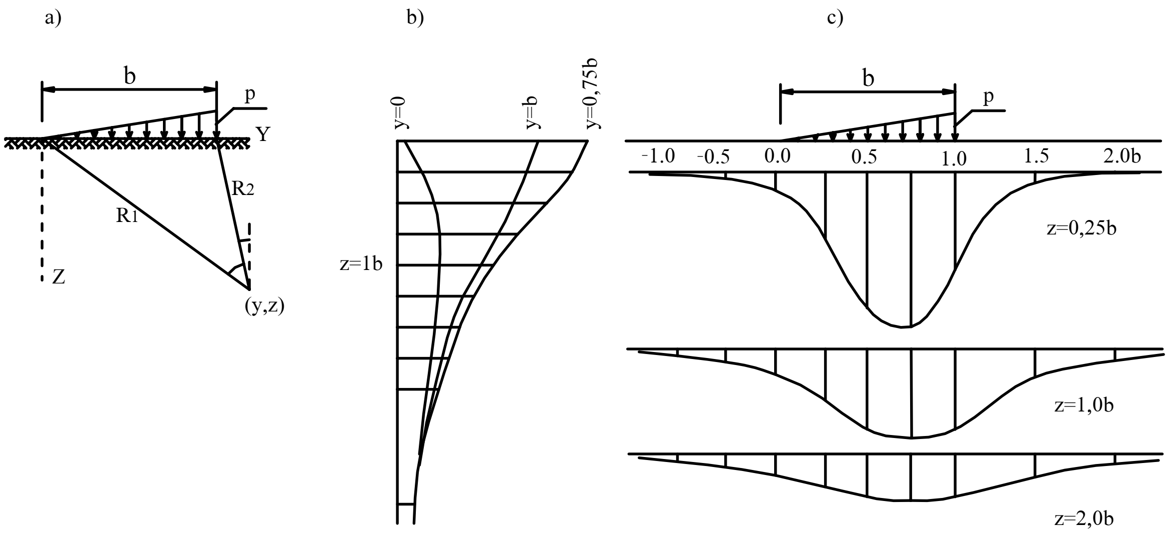
Bằng cách lập luận tương tự ta có biểu thức tính σ_y và τ_{yz} như sau :

$$\sigma_y = \frac{p.z}{\pi b}\left[\cos^2\beta_2 - 2\ln\cos\beta_2 - \cos^2\beta_1 + 2\ln\cos\beta_1 - tg\beta_1\left(\beta_2 - \frac{1}{2}\sin 2\beta_2 - \beta_1 + \frac{1}{2}\sin\beta_1\right)\right] \qquad \text{(II - 45)}$$

$$\tau_{yz} = \frac{p.z}{2\pi.b}\left[\sin 2\beta_2 - \sin 2\beta_1 + 2(\beta_1 - \beta_2) - tg\beta_1(\cos 2\beta_2 - \cos 2\beta_1)\right] \qquad \text{(II - 46)}$$

Để tiện cho việc tính toán σ_z, σ_y, τ_{yz} người ta đã lập bảng tính sẵn các trị số $\frac{\sigma_z}{p}, \frac{\sigma_y}{p}$ và $\frac{\tau_{yz}}{p}$ (Bảng II - 11 và II - 12).

Hình (II - 20) dưới đây sẽ minh hoạ tình hình phân bố ứng suất σ_z dưới tác dụng của tải trọng hình băng phân bố theo qui luật hình tam giác. Hình (II - 20b,c) biểu diễn các biểu đồ ứng suất σ_z trên tiết diện thẳng đứng và nằm ngang ở trong nền, từ các biểu đồ nhận thấy rằng, ứng suất nén thẳng đứng cực đại nằm trên đường thẳng đứng đi qua gần trọng tâm của tải trọng tam giác.



Hình II-20: Các biểu đồ phân bố ứng suất nén theo mặt cắt thẳng đứng và nằm ngang của khối đất khi có tác dụngcủa tải trọng tam giác

Ví dụ II - 5 : có tải trọng hình băng phân bố theo qui luật hình tam giác trình bày trên hình (II - 21). Tính trị số ứng suất tại các điểm A,B và C :

Giải :

Tại điểm A ta có: $\frac{y}{b} = \frac{5}{5} = 1; \frac{z}{b} = \frac{5}{5} = 1$

Tra bảng (II - 11) ta có :

$$\frac{\sigma_z}{p} = 0,241 \Rightarrow \sigma_z = 0,241.3 = 0,72 \ \ kG/cm^2$$

Tại điểm B :

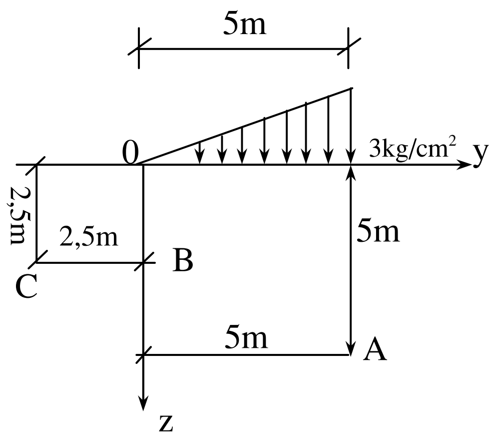
$$\frac{y}{b} = \frac{0}{5} = 0; \frac{z}{b} = \frac{2,5}{5} = 0,5; \frac{\sigma_z}{p} = 0,127$$

$$\Rightarrow \sigma_z = 0,127 \ . \ 3 = 0,38 \text{ kG/cm}^2$$

Tại điểm C :

$$\frac{y}{b} = \frac{-2,5}{5} = -0,5; \frac{z}{b} = \frac{2,5}{5} = 0,5; \frac{\sigma_z}{p} = 0,023$$

$$\Rightarrow \sigma_z = 0,023 \ . \ 3 = 0,07 \text{ kG/cm}^2$$



Hình II - 21

2.3.4. Trường hợp tải trọng phân bố theo dạng phức tạp :

Trong thực tế chúng ta thường gặp bài toán xác định sự phân bố ứng suất trong nền đất, trong trường hợp trên mặt đất tác dụng bởi một dải tải trọng phân bố theo dạng phức tạp (mặt cắt ngang thân đê, đập đất, nền đường đắp,v.v...). Gặp trường hợp này ta có thể phân biểu đồ tải trọng ra thành các tải trọng cơ bản, hình chữ nhật, hình tam giác. Rồi áp dụng các công thức tính ứng suất thành phần của các tải trọng cơ bản nói trên, sau đó tổng cộng lại ta được trị số ứng suất tại điểm cho trước dưới tác dụng của toàn bộ tải trọng phức tạp đó. Ngoài cách giải quyết trên ra ta có thể dùng biểu đồ của Osterberg để xác định ứng suất trong đất khi có tải trọng phân bố theo quy luật hình tam giác, hình chữ nhật, hình thang tác dụng trên mặt đất ở trường hợp bài toán phẳng (hình II - 22). Ứng suất nén thẳng đứng σ_z được tính theo công thức :

$$\sigma_z = I.p \qquad \text{(II - 47)}$$

Trong đó :

I : là hệ số phụ thuộc vào 2 tỷ số $\frac{a}{z}$ và $\frac{b}{z}$ lấy theo hình (II - 22).

a - là chiều dài phần tải trọng tam giác

b - là chiều dài tải trọng hình chữ nhật

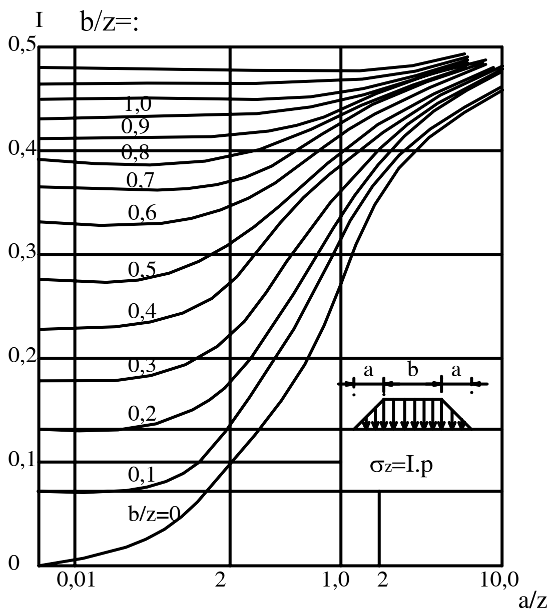
z - là chiều sâu của điểm được xét.

Trị số của I xác định bằng biểu đồ (II - 22) bằng cách cộng các hệ số tương ứng với tải trọng ở bên trái và ở bên phải đường thẳng đứng đi qua điểm đang xét, tức là :

$$\sigma_z = (I_t + I_p).p \qquad \text{(II — 47a)}$$

I_t - là hệ số tương ứng với phần tải trọng phía bên trái đường thẳng đứng đó.

I_p - là hệ số tương ứng với phần tải trọng phía bên phải.



Hình II - 22: Toán đồ Osterberg để xác định ứng suất

Ví dụ II - 6 : Có tải trọng phân bố như trên hình (II - 23). Hãy xác định ứng suất σ_z tại điểm M_1 và M_2, cho biết P = 0,9 kG/cm^2

Với điểm M_1

Đối với phần tải trọng ở bên trái

$$\frac{a}{z} = \frac{2}{2} = 1; \frac{b_1}{z} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Dựa vào biểu đồ (II - 22) tìm được $I_{tr} = 0{,}397$.

Đối với phần tải trọng bên phải :

$\frac{a}{z} = \frac{2}{2} = 1; \frac{b_2}{z} = \frac{3}{2} = 1{,}5$, Dựa vào biểu đồ (II - 22) tìm được $I_p = 0{,}478$

Như vậy ta có : $\sigma_z^{M_1} = (0{,}379 + 0{,}478).0{,}9 = 0{,}79\ kG/cm^2$

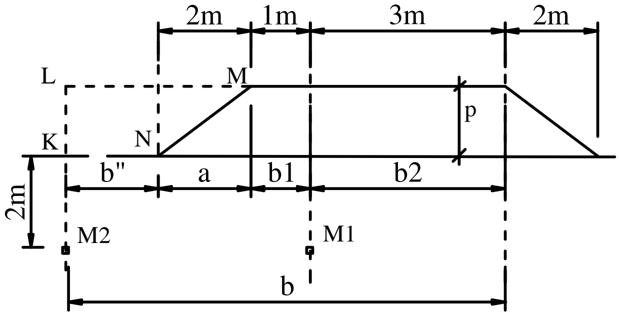
Với điểm M_2, ta có thể dùng thêm tải trọng ảo KLMN. Nếu kể cả tải trọng ảo thì ta có

$$\frac{a}{z} = \frac{2}{2} = 1; \frac{b'}{z} = \frac{8}{2} = 4$$, do đó :

$I_p = 0{,}499$

Nếu chỉ xét riêng tải trọng ảo KLMN ta có :

$$\frac{a}{z} = \frac{2}{2} = 1 \quad \frac{b''}{z} = \frac{2}{2} = 1$$ do đó ta có : $I_p = 0{,}455$



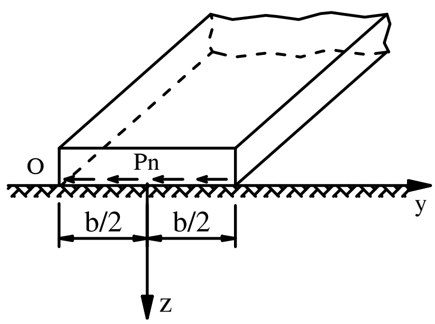
Hình II-23

Vậy : $\sigma_{z}{}^{N}{}_{2} = (0{,}499 - 0{,}455).0{,}9 = 0{,}04\ kG/cm^2$

2.3.5. Trường hợp tải trọng hình băng phân bố đều nằm ngang

Trong thực tế có nhiều trường hợp, khi tính toán nền đất, ngoài việc xét trường hợp tải trọng thẳng đứng còn phải xác định ứng suất do tải trọng nằm ngang gây nên (Hình II - 24).

Để tính ứng suất tại một điểm bất kỳ trong nền đất, dưới tác dụng của tải trọng hình băng phân bố đều nằm ngang, ta có thể tính theo các biểu thức dưới đây :



Hình II-24

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z &= K'_n . p_n \\ \sigma_y &= K''_n . p_n \\ \tau_{yz} &= K'''_n . p_n \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II - 48)}$$

Trong đó : K'_n, K''_n, K'''_n - là các hệ số phụ thuộc vào hai tỷ số y/b và z/b, các trị số này tra theo bảng (II - 13), cần chú ý rằng chiều tác dụng của tải trọng là chiều âm so với chiều của trục Oy.