

Chương 10

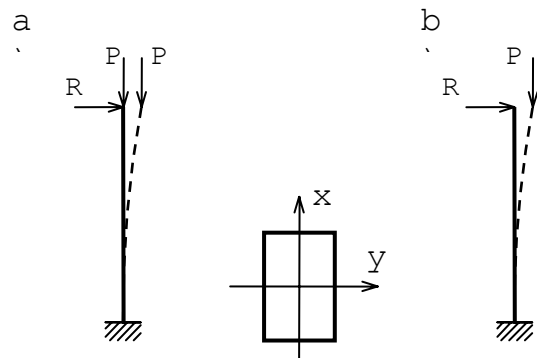
ỔN ĐỊNH

10.1. KHÁI NIỆM VỀ SỰ MẤT ỔN ĐỊNH CỦA MỘT HỆ ĐÀN HỒI

Những bài toán trước đây chúng ta đã trình bày, mới chỉ đề ý đến việc tính toán độ bền, độ cứng cho các thanh có các loại biến dạng khác nhau. Trong chương này chúng ta sẽ trình bày cách tính ổn định của thanh, bởi vì đây cũng là một nhiệm vụ của môn học Sức bền Vật liệu. Trong thực tế một chi tiết máy hoặc một bộ phận công trình có thể đảm bảo điều kiện bền, điều kiện cứng nhưng không thỏa mãn điều kiện ổn định, do đó nó cũng không thể làm việc được. Để có khái niệm về sự mất ổn định của một hệ đàn hồi ta hãy xét một ví dụ sau.

Giả sử có một thanh dài, mặt cắt ngang hình chữ nhật bị ngàm một đầu (hình 10.1). Thanh chịu nén đúng tâm bởi lực P. Khi P nhỏ hơn một giới hạn nào đó thì xem thanh là thẳng và chịu nén thuần túy. Nếu ta xô ngang thanh bằng một lực R rất nhỏ (hình 10.1a), (lực này chỉ có tác dụng kích thích) thì thanh bị lệch khỏi vị trí thẳng đứng. Nhưng nếu ta thôi tác dụng lực R thì thanh trở về vị trí thẳng đứng ban đầu. Ta nói thanh còn làm việc ở trạng thái cân bằng bền hay gọi là *ổn định*.

Nếu ta tiếp tục tăng lực P và lặp lại quá trình trên thì sẽ đến lúc giá trị P đủ lớn cần thiết, dù ta thôi tác dụng lực R, thanh vẫn không trở về vị trí cân bằng thẳng đứng ban đầu nữa. Ta nói lúc này thanh bắt đầu *mất ổn định* hay gọi là ở trạng thái tới hạn. Lực P ứng với thời điểm này gọi là lực tới hạn và ký hiệu là P_{th} . Dĩ nhiên nếu lực $P > P_{th}$ thì thanh hoàn toàn mất ổn định. Trong thực tế không cần có lực xô ngang R nói trên vì có thể do gió, hoặc do tính không đồng nhất của vật liệu nên nó tự tạo thành tác dụng như lực xô ngang. Hơn thế nữa lực P không bao giờ có thể tác dụng đúng tâm được. Cần lưu ý thêm nếu kết cấu như hình 10.1 thì thanh có khả năng mất ổn định theo phương y chứ khó mất ổn định theo phương x.



Hình 10.1:
Thanh chịu nén không đúng tâm

Trong thực tế còn có nhiều ví dụ khác như khi thanh chịu nén, những vỏ chịu áp lực cũng có thể xảy ra sự mất ổn định tương tự. Trong chương này chúng ta chỉ xét hiện tượng mất ổn định của thanh thẳng chịu nén thôi.

Một thanh chịu nén đúng tâm để đảm bảo ổn định thì lực nén P cực đại phải thỏa mãn điều kiện sau:

$$P_{max} \leq \frac{P_{th}}{K_{od}}$$

Trong đó: K_{od} là hệ số an toàn về mặt ổn định, thường $K_{od} > n$ (n-hệ số an toàn khi tính toán độ bền).

Vì vậy để giải bài toán ổn định, việc cơ bản là xác định được tải trọng tới hạn P_{th} .

10.2. XÁC ĐỊNH LỰC TỚI HẠN CỦA THANH CHỊU NÉN ĐÚNG TÂM

(Bài toán Euler).

Euler năm 1774 và ông đã xác định lực P_{th} đối với một thanh có chiều dài l đặt trên 2 gối tựa, chịu nén đúng tâm (hình vẽ 10.2).

Ta giả sử P đạt tới giá trị P_{th} thì thanh bắt đầu mất ổn định. Thanh sẽ võng theo phương y và độ võng này thay đổi theo z (chọn hệ tọa độ như hình vẽ 10.2).

Tại mặt cắt cách gốc tọa độ o một đoạn là z, thanh có độ võng $y(z)$ và mô men uốn M tại mặt cắt đó (bỏ qua trọng lượng bản thân của thanh), ta tính được mô men là:

$$M = P_{th} \times y(z) \quad (a)$$

Ta giả thiết thanh vẫn làm việc trong miền đàn hồi và có thể sử dụng phương trình vi phân gần đúng trong khi thiết lập đường đàn hồi trong uốn.

$$\text{Vậy: } y''(z) = -\frac{M_x}{EJ_x} \quad (b)$$

Thay (a) vào (b), ta được:

$$y''(z) = -\frac{P_{th} \cdot y(z)}{EJ_x}$$

$$\text{Hay } y''(z) + \frac{P_{th}}{EJ_x} \cdot y(z) = 0$$

$$\text{Ta đặt } \frac{P_{th}}{EJ_x} = \alpha^2 \quad (c)$$

thì phương trình (10-1) có dạng:

$$y''(z) + \alpha^2 y(z) = 0 \quad (10-2)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (10-2) là:

$$y(z) = C_1 \sin \alpha \cdot z + C_2 \cos \alpha \cdot z \quad (10-3)$$

Các giá trị C_1 và C_2 là các hằng số tích phân và được xác định nhờ điều kiện biên của bài toán. Cụ thể là:

$$\text{Khi } z = 0 \text{ thì } y = 0 = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = C_1 \times 0 + C_2 \times 1$$

$$\text{Khi } z = l \text{ thì } y = 0 = C_1 \sin \alpha \cdot l + C_2 \cos \alpha \cdot l$$

$$\text{Từ điều kiện thứ nhất, ta có: } C_2 = 0$$

$$\text{Vậy } y = C_1 \sin \alpha \cdot z \quad (10-4)$$

$$\text{Từ điều kiện thứ 2, ta có: } C_1 \sin \alpha \cdot l = 0$$

Nếu $C_1 = 0$ thì phương trình (8-3) luôn luôn bằng không, điều này trái với thực tế vì trừ hai vị trí $z = 0$ và $z = l$ thì $y(z) \neq 0$.

$$\text{Vậy (10-4) chỉ thỏa mãn khi } \sin \alpha \cdot l = 0$$

$$\text{Hay } \alpha l = n \cdot \pi \quad (n=1.2.3\dots)$$

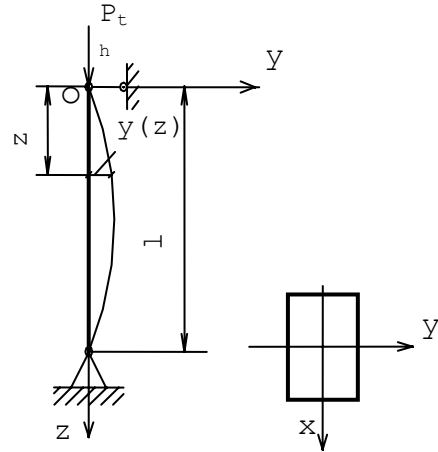
$$\Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{l} \quad (d)$$

Thay (d) vào (10-4) ta được phương trình đường đàn hồi khi ổn định là đường hình sin. Vì đường đàn hồi này sinh ra do lực dọc thanh chứ không phải do lực vuông góc với trục thanh như trong uốn ngang phẳng, nên người ta còn gọi hiện tượng này là uốn dọc.

Thay (d) vào (c), ta tìm được lực tới hạn:

$$P_{th} = \frac{n^2 \pi^2 EJ_x}{l^2} \quad (10-5)$$

Ta để ý thấy rằng giá trị J_x là nhỏ nhất, tức là $J_x = J_{min}$, nên (10-5) có thể viết:



Hình 10.2: Sơ đồ tính lực tới hạn

$$P_{th} = \frac{n^2 \pi^2 EJ_{min}}{l^2} \quad (10-6)$$

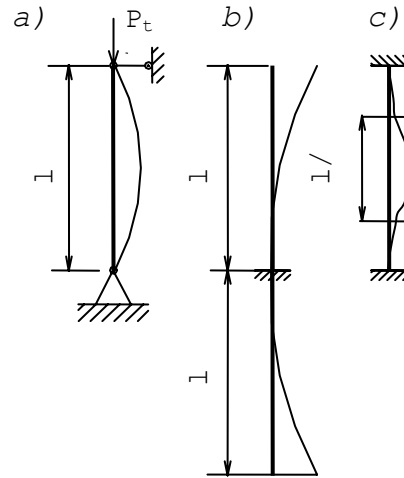
Với những giá trị khác nhau của n ta sẽ có các lực P_{th} khác nhau, đầu tiên ta gặp

khi $n = 1$ và:
$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l^2} \quad (10-7)$$

Lực tới hạn này còn gọi là lực Euler (P_{Euler})

Công thức (10-7) cho ta tính được P_{th} trong trường hợp thanh đặt trên hai gối tựa.

Với những thanh có liên kết khác ta có thể tính toán tương tự để có được giá trị P_{th} của chúng. Nhưng cũng có thể suy từ (10-7) cho các thanh có liên kết khác bằng việc để ý đến dạng của các đường đàn hồi của chúng. Nhìn lên hình vẽ 10.3, ta sẽ thấy thanh đặt trên hai gối tựa dạng đường đàn hồi là 1/2 bước sóng hình sin (hình 10.3a). Với liên kết ngàm một đầu và một đầu tự do (hình 10.3b) thì muốn có được 1/2 bước sóng ta phải có chiều dài gấp đôi thanh đặt trên hai gối tựa. Đối với thanh ngàm chặt 2 đầu ta chỉ cần 1/2 chiều dài của thanh kia thì đã có được dạng đường đàn hồi là 1/2 bước sóng. Như vậy công thức (10-7) có thể suy rộng cho các liên kết khác bằng cách thêm một hệ số m vào mẫu số. Hệ số



Hình 10.3: Tính lực tới hạn với các dạng thanh khác nhau

m này phụ thuộc vào dạng liên kết:

$$P_{th} = \frac{n^2 \pi^2 EJ_x}{(ml)^2}$$

(10-8)

Nếu liên kết khớp 2 đầu, thì $m = 1$; liên kết là ngàm một đầu, thì $m = 2$; liên kết là ngàm cả 2 đầu, thì $m = 0,5$ và nếu ngàm một đầu và một đầu đặt trên gối tựa, thì $m = 0,7$.

Khi đã tính được lực P_{th} ta có thể tính được ứng suất tới hạn xuất hiện trong thanh, ta chú ý rằng tại lực $P = P_{th}$ thanh còn ở vị trí thẳng đứng nên ứng suất tính như khi nén

đúng tâm:
$$\sigma_{th} = \frac{P_{th}}{F} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(ml)^2 \cdot F} \quad (10-9)$$

Ta đặt và gọi: $\sqrt{\frac{J_{min}}{F}} = i_{min}$ là bán kính quán tính cực tiểu của mặt cắt ngang, thì

(10-9) sẽ thành:
$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{ml}{i_{min}}\right)^2} \quad (10-10)$$

Tiếp tục đặt $\frac{ml}{i_{min}} = \lambda$, thì (10-10) sẽ có dạng:
$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (10-11)$$

λ là số hạng phụ thuộc vào liên kết của thanh, phụ thuộc vào hình dáng và kích thước của thanh (chiều dài l và mặt cắt ngang). Nếu λ lớn thì σ_{th} nhỏ, có nghĩa là dễ mất ổn định; nếu λ nhỏ thì σ_{th} lớn, có nghĩa là thanh khó mất ổn định hơn, nên ta gọi λ là độ mảnh. Thanh có độ mảnh lớn không có lợi.

10.3. GIỚI HẠN ÁP DỤNG CÔNG THỨC Euler.

Euler thiết lập công thức tính P_{th} với giả thiết thanh làm việc trong miền đàn hồi. Vì vậy công thức (10-8) hay (10-11) chỉ dùng được khi $\sigma_{th} \leq \sigma_{tl}$ (giới hạn tỷ lệ).

Tức là:
$$\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{tl}$$

Hay
$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}}$$

Nếu ký hiệu $\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}}$, thì điều kiện áp dụng công thức Euler là $\lambda > \lambda_0$.

Ta chú ý λ_0 chỉ phụ thuộc vào vật liệu.

Ví dụ: Đối với thép CT3 có $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$, $\sigma_{tl} = 210 \text{ MN/m}^2$ thì

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 2,1 \cdot 10^5}{2,1 \cdot 10}} \approx 100, \text{ đối với gỗ thông thì } \lambda_0 = 75; \text{ gang thì } \lambda_0 = 80.$$

Những thanh có $\lambda > \lambda_0$ gọi là những thanh có độ mảnh lớn. Những thanh có $\lambda \leq \lambda_0$ gọi là những thanh có độ mảnh vừa và bé không thể tính toán ổn định theo công thức của Euler được.

Vì vậy nếu vật liệu làm việc ở ngoài miền đàn hồi thì việc tính toán ổn định thực tế dựa vào công thức thực nghiệm của Iasinski đưa ra để tính toán cho những thanh có độ mảnh vừa $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_0$. Giá trị của λ_1 là giới hạn của độ mảnh vừa, nó cũng phụ thuộc vào vật liệu (đối với thép $\lambda_1 = 40$).

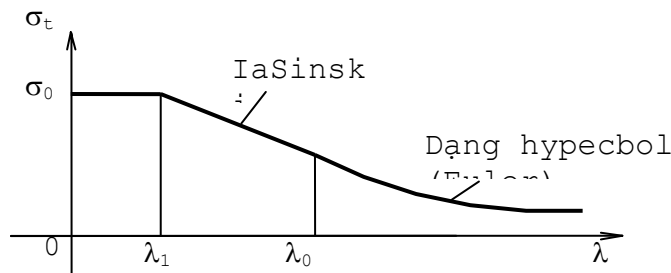
Công thức Iasinski có dạng: $\sigma_{th} = a - b\lambda$ (10-13)

Trong đó a và b là những hằng số thực nghiệm.

Ví dụ: đối với CT3, thì $a = 336 \text{ MN/m}^2$ và $b = 1,47 \text{ MN/m}^2$.

Đối với thanh có độ mảnh bé $0 < \lambda < \lambda_1$, thì ta lấy $\sigma_{th} = \sigma_0$ (giới hạn chảy nếu là vật liệu dẻo, giới hạn bền nếu là vật liệu giòn).

Như vậy tùy theo thanh có độ mảnh như thế nào đó mà ta tính toán ổn định. Hình 10.4 biểu diễn đồ thị về sự quan hệ giữa độ mảnh λ và σ_{th}



Hình 10.4: Biểu diễn đồ thị về sự quan hệ giữa

Chú ý: Công thức Euler ở trên, ta sử dụng J_{min} với điều kiện liên kết ở hai mặt phẳng quán tính chính như nhau. Trong kỹ thuật rất có thể liên kết theo hai phương (trong mặt phẳng zoy và zox) khác nhau thì độ mảnh khác nhau vì m khác nhau. Lúc đó ta phải tùy theo liên kết để tính độ mảnh và nơi nào có độ mảnh lớn hơn sẽ nguy hiểm hơn. Nói một cách khác không nhất thiết thanh bị võng theo phương của cạnh nhỏ và có thể theo phương của cạnh kia (xem ví dụ dưới đây).

Ví dụ 1: Xác định lực tới hạn (P_{th}) cho thanh thép định hình chữ I N₂₂ trong các trường hợp sau:

a/ Thanh đứng trên hai gối tựa có chiều dài 4m (hình 10.5a).

b/ Thanh cũng đứng trên hai gối tựa có chiều dài 2m.

c/ Thanh được ngàm 2 đầu có chiều dài 3m (hình 10.5b).

Cho biết: $E=2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$, $a=31 \text{ kN/cm}^2$, $b=0,14 \text{ kN/cm}^2$, $\lambda_0=100$, $\lambda_1=40$.

Bài giải: Trước hết tra bảng để biết các số liệu của thép định hình chữ I N₂₂ :

$$i_{\min}=i_y=2,27 \text{ cm}, \quad F=30,6 \text{ cm}^2$$

a/ Trường hợp a:

$$\lambda = \frac{ml}{i_{\min}} = \frac{1 \times 400}{2,27} = 176 > \lambda_0 = 100$$

Thanh có độ mảnh lớn, ta sử dụng công thức Euler (1) để tính σ_{th} :

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \times 2,1 \cdot 10^4}{176^2} = 6,69 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{Vậy } P_{th} = \sigma_{th} \times F = 6,69 \times 30,6 = 204,7 \text{ kN.}$$

b/ Trường hợp b:

$$\lambda = \frac{ml}{i_{\min}} = \frac{1 \times 200}{2,27} = 88 < \lambda_0$$

Vậy σ_{th} sẽ phải tính theo công thức Iasinski:

$$\sigma_{th} = a - b\lambda = 31 - 0,14 \times 88 = 18,68 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{và } P_{th} = \sigma_{th} \times F = 18,68 \times 30,6 = 571,68 \text{ kN.}$$

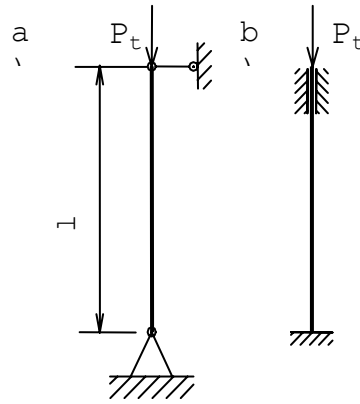
c/ Trường hợp c:

$$\lambda = \frac{0,5 \times 300}{2,27} = 132,16$$

Thanh vẫn có độ mảnh lớn, ta sử dụng công thức Euler để tính σ_{th} :

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \times 2,1 \cdot 10^4}{132,16^2} = 11,86 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{Vậy } P_{th} = \sigma_{th} \times F = 11,86 \times 30,6 = 363 \text{ kN.}$$



Hình 10.5: Xác định lực tới hạn khi thanh đứng trên hai gối tựa (a) và thanh được ngàm

10.4. PHƯƠNG PHÁP THỰC HÀNH ĐỂ TÍNH TOÁN THANH CHỊU NÉN.

Như đã biết theo điều kiện bền ta có:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_0}{n} \quad (a)$$

Mặt khác thanh chịu nén còn phải tính đến ổn định nữa theo biểu thức:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma]_{od} = \frac{\sigma_{th}}{K_{od}} \quad (b)$$

Chú ý: σ_{th} có thể tính theo Euler hoặc Iasinski hay lấy bằng σ_0 tùy trị số λ . Ta đem (b) chia cho (a):

$$\frac{[\sigma]_{od}}{[\sigma]} = \frac{\sigma_{th}}{K_{od}} \times \frac{n}{\sigma_0} = \varphi \rightarrow [\sigma]_{od} = \varphi [\sigma] \quad (10-14)$$

$\varphi < 1$ (vì $K_{od} > n$, $\sigma_{th} < \sigma_0$), hệ số này được gọi là hệ số giảm ứng suất, nó phụ thuộc vào vật liệu và độ mảnh, giá trị của nó được cho trong bảng 10.1.

Vậy điều kiện ổn định có thể viết:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi \times [\sigma] = [\sigma]_{\text{od}} \quad (10-15)$$

Công thức (10-15) cho phép ta tính toán ổn định không cần xác định σ_{th} và được gọi là phương pháp thực hành hay phương pháp quy phạm.

Từ (10-15), ta tính được lực nén cho phép:

$$[P] \leq \varphi [\sigma] \times F \quad (10-16)$$

Cũng nhờ (10-15), ta gặp lại 3 bài toán cơ bản là kiểm tra ổn định, tính lực lớn nhất nén thanh để khỏi mất ổn định (theo 10-16) và chọn kích thước của mặt cắt ngang của thanh. Tuy vậy bài toán chọn kích thước của mặt cắt ngang suy từ biểu thức (10-15) là:

$$F \geq \frac{P}{\varphi [\sigma]} \quad (10-17)$$

không đơn giản như việc chọn kích thước trong các bài toán trước đây. Thật vậy căn cứ vào (10-17), ta không thể tìm ngay được F vì φ chưa biết. Muốn biết φ phải biết độ mảnh λ mới tra bảng được mà trong λ có chứa F, cho nên phải tiến hành xác định F theo phương pháp đúng dần. Tức là ban đầu người ta chọn một giá trị φ nào đó để xác định F sơ bộ, sau đó trên cơ sở F sơ bộ xác định lại φ , rồi suy lại điều kiện ổn định có thỏa mãn hay không. Nếu không sẽ phải chọn lại φ rồi lập lại quá trình tính cho đến khi nào đạt yêu cầu. Để sáng tỏ vấn đề này ta hãy xét ví dụ sau.

Ví dụ 2: Chọn số hiệu thép chữ I cho một thanh dài 2m, liên kết khớp ở hai đầu và chịu một lực nén $P = 230 \text{ kN}$. Biết vật liệu là thép số 2 với $[\sigma] = 140 \text{ MN/m}^2$.

Bài giải: Theo công thức (10-17), muốn chọn F ta phải chọn φ ban đầu.

1. Chọn lần thứ nhất $\varphi = 0,50$. Từ (10-17), ta có:

$$F_1 = \frac{P}{\varphi [\sigma]} = \frac{230 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 140 \cdot 10^6} = 32,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 32,3 \text{ cm}^2$$

Tra bảng thép định hình ứng với $F = 32,4 \text{ cm}^2$ xấp xỉ với trị số F_1 tính toán, ta chọn loại I 22a nó có $i_y = i_{\min} = 2,5 \text{ cm}$.

Ta tính độ mảnh của nó:
$$\lambda = \frac{ml}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 10^2}{2,5} = 80$$

Tra bảng 10.1, ứng với $\lambda = 80$ và thép số 2 ta có $\varphi = 0,75$. Hệ số φ này khác nhiều so với φ_1 ta chọn ban đầu, nên phải chọn lại.

2. Chọn lần thứ hai: Ta lấy giá trị φ_2 là trung bình cộng của φ_1 và φ .

$$\varphi_2 = \frac{0,5 + 0,75}{2} = 0,625$$

Ta tính lại
$$F_2 \geq \frac{230 \cdot 10^3}{0,625 \cdot 140 \cdot 10^6} = 26,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 26,2 \text{ cm}^2$$

Tra lại bảng thép định hình, ta thấy loại thép I 20 có diện tích $F = 26,4 \text{ cm}^2$ xấp xỉ với F_2 và $i_{\min} = 2,06 \text{ cm}$. Độ mảnh tính được là:

$$\lambda = \frac{1 \times 2 \cdot 10^2}{0,0206} = 97$$

Tra lại bảng 10.1, ta thấy ứng với $\lambda = 97$, bằng cách nội suy giữa $\lambda=90$ và $\lambda=100$, ta có $\varphi = 0,627$. Trị số này gần bằng φ_2 , ta chọn và ta tiến hành kiểm tra lại ổn định theo (10-15):

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi[\sigma] \rightarrow \sigma = \frac{230 \cdot 10^3}{26,4 \cdot 10^{-4}} = 87 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 87 \text{ MN/m}^2$$

Rõ ràng $< \varphi[\sigma] = 0,627 \times 140 = 87,8 \text{ MN/m}^2 = [\sigma]_{\text{od}}$

Vậy ta kết luận với quy cách của thép định hình I 20 đủ thỏa mãn điều kiện ổn định và ta cho I 20 được dùng trong trường hợp uốn dọc này.

Chú ý : Nếu mặt cắt ngang có một nơi nào đó bị khoét lỗ đi do điều kiện lắp ghép chẳng hạn, thì phải kiểm tra điều kiện bền tại đó theo nén đúng tâm:

$$\sigma = \frac{P}{F_t} \leq [\sigma]$$

F_t là diện tích thực ở mặt cắt ngang đã bị khoét bỏ, tức là ở mặt cắt có diện tích nhỏ nhất, vì có thể điều kiện này nguy hiểm hơn điều kiện ổn định.

Ví dụ 3: Có một cột gỗ cao 7m, mặt cắt ngang hình chữ nhật $12 \times 22 \text{ (cm}^2\text{)}$. Trong mặt phẳng có độ cứng nhỏ nhất, hai đầu bị ngàm chặt (hình 10.6a) và trong một mặt phẳng có độ cứng lớn nhất thì hai đầu có liên kết khớp (hình 10.6b). Hãy xác định lực tới hạn, cho biết $E=9 \times 10^5 \text{ N/cm}^2$.

$$i_{\max} = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{22}{\sqrt{12}} = 6,86 \text{ cm}$$

$$i_{\min} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{12}{\sqrt{12}} = 3,46 \text{ cm}$$

Bài giải: Với mặt cắt hình chữ nhật, ta có:

Trong mặt phẳng có độ cứng lớn nhất, thì độ mảnh của thanh tính bằng:

$$\lambda' = \frac{ml}{i_{\max}} = \frac{1 \times 7}{6,36 \times 10^{-2}} = 110$$

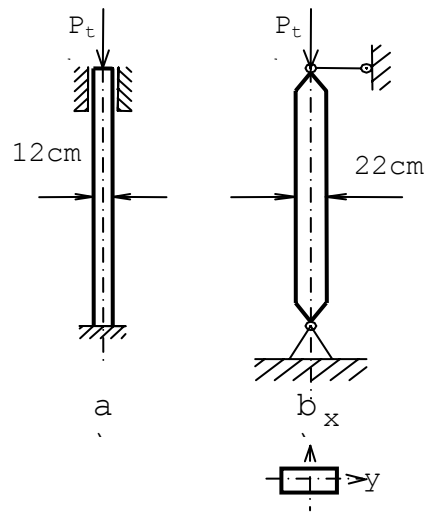
Trong mặt phẳng có độ cứng bé nhất, thì độ mảnh của thanh tính bằng:

$$\lambda'' = \frac{ml}{i_{\min}} = \frac{0,5 \times 7}{3,46 \times 10^{-2}} = 101$$

Như vậy, ở bài toán ổn định này, ta có $\lambda' > \lambda''$, nên khi mất ổn định cột sẽ cong trong mặt phẳng có độ cứng lớn nhất, tức là độ võng theo y (hình 10.6). Ta sẽ dùng giá trị λ' để tính ứng suất tới hạn và lực tới hạn.

Ta đã biết đối với gỗ thì $\lambda_0=75$, vậy ở đây có thể sử dụng công thức Euler để tính ứng suất tới hạn và lực tới hạn:

$$\sigma_{\text{th}} = \frac{\pi^2 E}{(\lambda')^2} = \frac{9,86 \times 9 \cdot 10^5}{110^2} = 733 \text{ N/cm}^2$$



Hình 10.6:
Sơ đồ xác định lực tới hạn

Vậy lực tới hạn sẽ là :

$$P_{th} = \sigma_{th} \times F = 733 \times 12 \times 22 = 193,500N = 193,5kN$$

10.5. KHÁI NIỆM VỀ HÌNH DÁNG HỢP LÝ CỦA MẶT CẮT NGANG VÀ VẬT LIỆU KHI ỔN ĐỊNH

Như ta biết, muốn tăng tính ổn định thì cần giảm độ mảnh λ . Để giảm độ mảnh λ ta có thể giảm chiều dài của thanh, thay đổi liên kết của thanh hoặc tăng i_{min} . Vì vậy để mặt cắt ngang có hình dạng hợp lý người ta chọn hình dáng của nó sao cho:

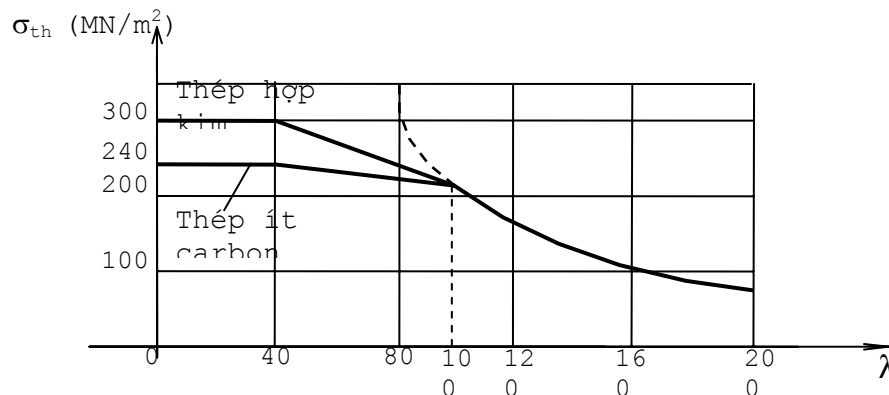
a) $i_{min} = i_{max}$, tức là $j_{min} = j_{max}$. Như vậy thanh sẽ có sự ổn định theo mọi phương như nhau. Do đó mặt cắt ngang hợp lý khi chịu ổn định là tròn hoặc hình vuông, nói chung là loại đa giác đều.

b) Nếu cùng một diện tích F mà tăng được giá trị mô men quán tính chính trung tâm thì càng tốt. Vì thế người ta thường dùng loại mặt cắt rỗng như hình tròn rỗng hoặc hình vuông rỗng...

Tóm lại: Hình dáng hợp lý của mặt cắt ngang khi thanh làm việc trong điều kiện ổn định là loại rỗng và có mô men quán tính đối với mọi trục qua trọng tâm đều bằng nhau. Dĩ nhiên phải đảm bảo chiều dày tối thiểu để tránh hiện tượng mất ổn định cục bộ. Người ta còn dùng những thanh có mặt cắt ghép chữ I hoặc ghép bằng những bản mỏng sao cho $J_{min} = J_{max}$ và các giá trị này càng lớn càng tốt. Thường người ta thêm những thanh giằng để các cột chịu ổn định được vững vàng. Ví dụ: các loại cột điện ta thường gặp.

Nhìn vào công thức tính ứng suất tới hạn σ_{th} (10-11), ta thấy đối với những thanh có độ mảnh lớn (sử dụng được công thức Euler) thì chỉ có mô đun đàn hồi ảnh hưởng đến nó. Đối với những thanh có độ mảnh nhỏ và vừa (tính theo IaSinski hoặc $\sigma_{th} = \sigma_0$), thì giới hạn chảy và giới hạn bền ảnh hưởng đến σ_{th} . Do đó, đối với những thanh có độ mảnh lớn ta không cần dùng thép có độ bền cao- như thép hợp kim - để tiết kiệm vật liệu. Nhưng đối với những thanh có độ mảnh nhỏ và vừa thì nên dùng thép có cường độ cao là có lợi, vì nó làm cho giá trị σ_{th} tăng lên.

Theo đồ thị ở hình 10.7, ta thấy khi $\lambda > 100$, thì ứng suất tới hạn của các loại thép như nhau. Trái lại khi $\lambda < 100$, thì thép hợp kim có ứng suất tới hạn lớn hơn so với thép ít carbon.



Hình 10.7: Đồ thị tính trị số λ ứng với các

Hiện tượng mất ổn định không những đối với thanh chịu nén như ta đã nghiên cứu, mà sự mất ổn định có thể xuất hiện ở những thanh chịu uốn, những vòng tròn chịu áp suất

hướng tâm, những tâm, vỏ, các công trình... Vì vậy, hiện tượng ổn định và mất ổn định là rất rộng lớn và có những chuyên khảo chuyên nghiên cứu về ổn định.

Dưới đây chúng ta tiếp tục nghiên cứu một số dạng mất ổn định thường gặp.

10.6.ỔN ĐỊNH CỦA DÀM CHỊU UỐN.

Với các dầm chịu uốn, mà mặt cắt ngang của nó là hình chữ nhật hẹp (tức là mặt cắt ngang tương đối mỏng), thì khi mô men uốn đạt tới giá trị nào đó (M_{th}) thì dầm bị mất ổn định. Khi đó nó không chỉ bị uốn cong mà còn bị vênh do thanh bị xoắn.

Lúc ban đầu ta gắn một hệ trục oxyz (hình 10.8a). Sau khi chịu tác dụng bởi 2 mô men uốn đạt đến tới hạn M_{th} (thanh bị mất ổn định). Do bị xoắn, thì hệ trục đó sẽ vẽ ở mặt cắt tương ứng, thì trục x (mặt cắt) bị xoắn một góc φ (như hình 10.8b) và lúc đó hệ trục có vị trí mới là OXYZ. Như đã biết M_{th} được biểu diễn bởi một véc tơ theo phương x cũ tức là M_{th} (trên hình 10.8b).

Bây giờ ta phân tích M_{th} theo hai phương x, y. Ta sẽ có hai mô men uốn quanh trục X,Y và M_z được xác định bằng tích số giữa M_{th} và góc xoay quanh trục Y là X' :

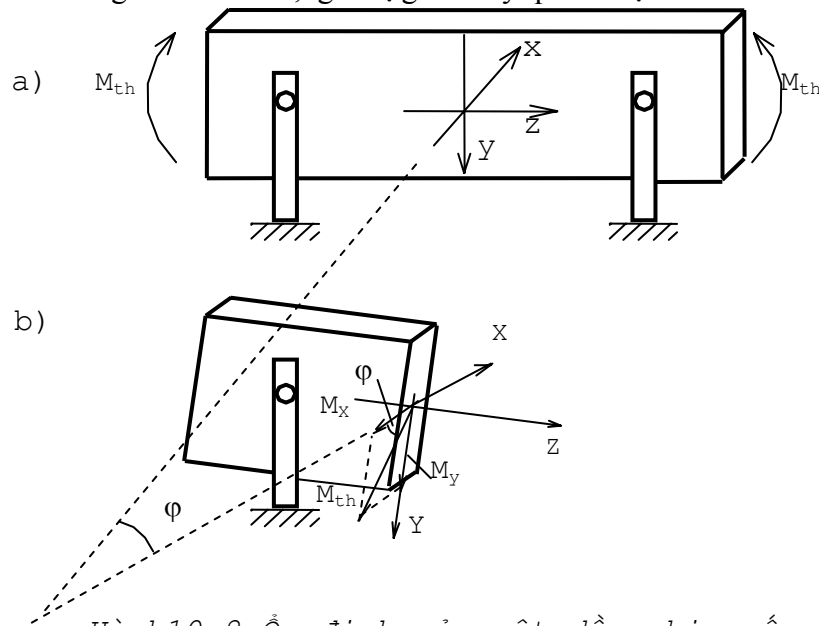
$$\left. \begin{aligned} M_x &= M_{th} \cdot \cos \varphi \\ M_y &= M_{th} \cdot \sin \varphi \\ M_z &= M_{th} \cdot X' \end{aligned} \right\} \quad (10-18)$$

φ là một góc rất bé, nên $\cos \varphi \approx 1$, $\sin \varphi \approx \text{tg} \varphi \approx \varphi$.

Vậy:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= M_{th} \\ M_z &= M_{th} \cdot \varphi \end{aligned} \right\} \quad (10-19)$$

Mặt khác như trong bài toán uốn, giá trị góc xoay quanh trục Y là X'' với mô men



Hình 10.8: Ổn định của một dầm chịu uốn

M_y có liên hệ vi phân là:

$$X'' = \frac{-M_y}{EJ_y} \quad (10-20)$$

Góc xoắn φ được xác định từ phương trình vi phân:

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_p} \quad (10-21)$$

Phương trình này ta đã gặp trong chương xoắn. Vậy:

$$\varphi' = \frac{M_{th} \cdot x}{GJ_p} \quad (10-22)$$

Lấy đạo hàm lần nữa, ta có:

$$\varphi'' = \frac{M_{th} \cdot x'}{GJ_p} \quad (10-23)$$

Chúng ta để ý đến (10-20) và đưa nó vào (10-23), cuối cùng ta có :

$$\varphi'' = \frac{M_{th}^2 \cdot \varphi}{EGJ_p J_y} \quad (10-24)$$

hay
$$\varphi'' + \frac{M_{th}^2}{EGJ_p J_y} \cdot \varphi = 0 \quad (10-25)$$

Nếu đặt:
$$k^2 = \frac{M_{th}^2}{EGJ_p J_y} \quad (10-26)$$

thì phương trình (10-25) sẽ là:
$$\varphi'' + k^2 \cdot \varphi = 0 \quad (10-27)$$

Như đã biết, nghiệm của (10-27) sẽ là:

$$\varphi = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz \quad (10-28)$$

Các hằng số C_1 và C_2 được xác định nhờ các điều kiện biên:

Khi $z=0 \rightarrow \varphi=0$ (a)

Khi $z=l \rightarrow \varphi=0$ (b)

Với điều kiện (a), thì nghiệm (8-28) chỉ thỏa mãn khi $C_2=0$.

Và từ điều kiện (b), ta có:

$$C_1 \sin kl = 0 \quad (10-29)$$

Nghiệm (10-29) không thể có khi $C_1=0$, vì như vậy là không thực tế vì φ chỉ bằng 0 ở hai đầu thôi, còn ở các vị trí khác thì nó khác không. Vậy chỉ có thể cho:

$$\sin kl = 0 = \sin n\pi$$

Tức là: $(n=1,2,3,\dots,n)$

Vậy
$$k^2 = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} = \frac{M_{th}^2}{EGJ_p J_y}$$

Với $n=1$, ta có mô men uốn tới hạn M_{th} cho dầm có gối tựa ở hai đầu là:

$$M_{th} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EGJ_p J_y} \quad (10-30)$$

Cũng với lí luận như ở trên, ta suy ra các dầm chịu liên kết khác nhau sẽ là:

$$M_{th} = \frac{\pi}{ml} \sqrt{EGJ_p J_y} \quad (10-31)$$

m cũng là hệ số phụ thuộc vào các dạng liên kết như đã gặp.

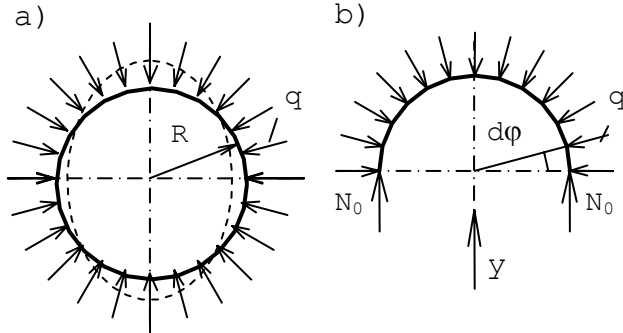
10.7.ỔN ĐỊNH CỦA VÀNH CHỊU ÁP SUẤT BÊN NGOÀI.

Chúng ta xét một vành tròn (bằng thép chẳng hạn) chịu áp lực phân bố đều bên ngoài với cường độ q (xem hình 10.9).

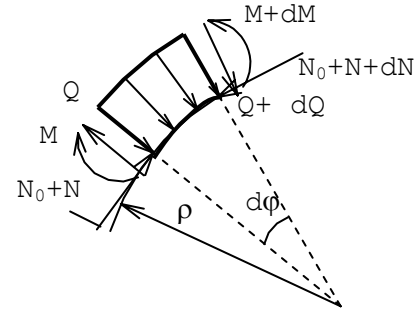
Rõ ràng là khi áp lực q tăng lên một giới hạn nào đó thì khi bỏ áp lực, vành cũng không còn giữ hình dáng là hình tròn như ban đầu nữa (mà có thể biến thành hình elíp chẳng hạn), ta gọi trạng thái đó là trạng thái mất ổn định

Tách một phân tử ds bởi hai mặt cắt vuông góc với trục. Khi vành bị mất ổn định, thì bán kính cong của phân tử bị thay đổi không còn là R nữa. Ta gọi bán kính cong này là ρ . Nếu gọi ξ là sự thay đổi của độ cong:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} = \xi \quad (10-32)$$



Hình 10.9: Vành chịu áp suất bên ngoài



Hình 10.10: Sơ đồ tính ứng suất

Khi vành chưa bị mất ổn định, trên mặt cắt ngang chỉ có một thành phần nội lực là N_0 được xác định bằng cách cắt vành như hình 10.9b. Chiều trên trục y , ta có:

$$2N_0 - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} q \cdot R \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = 2N_0 + 2qR \cdot \cos \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

Suy ra: $N_0 = qR$ (10-33)

Khi bị mất ổn định thì trên mặt cắt ngang có các thành phần nội lực như trên hình vẽ 10.10. Lúc này các phương trình cân bằng được viết như sau:

$$qds + dQ + (N_0 + N) \frac{ds}{\rho} = 0 \quad (a) - \text{Chiều lên phương } Q$$

$$\frac{Q}{R} + \frac{dN}{dS} = 0 \quad (b) - \text{Chiều lên phương } N.$$

$$\frac{dM}{dS} + Q = 0 \quad (c) - \text{Lấy mô men đối với trung tâm mặt cắt}$$

Khi viết các phương trình cân bằng này ta bỏ qua vô cùng bé bậc cao và xem $\sin d\varphi = \text{tg} d\varphi$, $\cos \varphi = 1$.

Thay giá trị N_0 từ (10-33) vào biểu thức (a) và rút gọn, ta được:

$$q \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{R} \cdot \frac{dQ}{dS} - \frac{N}{\rho R} = 0$$

Hay $-q\xi + \frac{1}{R} \cdot \frac{dQ}{dS} - \frac{N}{R^2} = 0$ (10-34)

Chú ý ở số hạng cuối cùng $\rho R \approx R^2$, các biểu thức (b), (c) và phương trình (10-34)

có thể viết lại: $q\xi + \frac{1}{R} \cdot \frac{d^2 M}{dS^2} + \frac{1}{R^3} \cdot M = C_1$ (10-35)

Ta đã từng biết tương quan giữa mô men uốn và sự thay đổi độ cong ξ sẽ là:

$$M = EJ \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \right) = EJ\xi \quad (10-36)$$

Thay biểu thức này vào (10-35), ta sẽ được phương trình vi phân:

$$\frac{d^2\xi}{dS^2} + K^2\xi = C_1 \frac{R}{EJ} \quad (10-37)$$

Trong đó :

$$K^2 = \frac{1}{R^2} + \frac{qR}{EJ} \quad (10-38)$$

Nghiệm của phương trình (10-37) sẽ có dạng:

$$\xi = C_1 \frac{R}{K^2 EJ} + C_2 \sin kS + C_3 \cos kS$$

Giá trị ξ phải là một hàm tuần hoàn, vì trị số ξ phải như nhau khi S có chiều dài là $2\pi R$. Với suy luận như vậy cũng có nghĩa là sự biến thiên của kS với chiều dài $2\pi R$ phải là một số nguyên lần của 2π , tức là:

$$k(S + 2\pi R) - kS = 2\pi n$$

n là một số nguyên. Vậy ta có: $kR = n$

Thay giá trị này vào (10-38), ta sẽ xác định được q_{th} là:

$$q_{th} = \frac{n^2 - 1}{R^2} EJ \quad (10-39)$$

Rõ ràng n tối thiểu phải là 2 mới có giá trị

$$q_{th} = \frac{3EJ}{R^2} \quad (10-40)$$

Như vậy độ thay đổi của bán kính cong ξ theo chu vi của vành là 2 chu kỳ nguyên vẹn và vành sẽ bị uốn theo bốn nửa bước sóng và có hình dáng gần với hình dáng của enlíp (xem hình 10.9a).

Trong trường hợp vành có sự gia cố bằng $2n$ liên kết đơn (dĩ nhiên $n > 2$, vì bằng 2 đã được xét rồi), được bố trí đều theo chu vi vành, lúc này sự mất ổn định sẽ tạo nên $2n$ nửa bước sóng và q_{th} cũng sẽ được tính theo (10-39) xem hình 10.11.

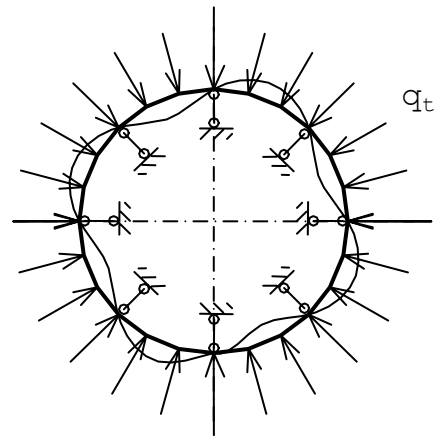
CÂU HỎI TỰ HỌC.

- 10.1. Khi nào thì gọi là một thanh chịu nén ổn định và lúc nào là mất ổn định ?
- 10.2. Bài toán Euler ? Khi mất ổn định thì thanh sẽ võng chiều nào ? Giá trị mô men quán tính trong công thức Euler như thế nào ?
- 10.3. Định nghĩa độ mảnh của thanh. Ý nghĩa của giá trị độ mảnh. Độ mảnh phụ thuộc những yếu tố nào ?
- 10.4. Phương pháp thực hành để tính ổn định ? ưu điểm của phương pháp này.
- 10.5. Các bài toán khi uốn dọc. Bài toán nào phức tạp nhất, vì sao ?
- 10.6. Hình dáng hợp lí của thanh khi uốn dọc. Vật liệu như thế nào thì phù hợp với bài toán uốn dọc?

----- ❧ -----

Bảng 10.1

Độ	Trị số φ
----	------------------



Hình 10.11: Sự thay đổi của bán kính cong ξ theo chu vi

mảnh λ	Thép 4. 3. 2	Thép số 5	Thép hợp kim	Gang	Gỗ
0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
10	0.90	0.98	0.97	0.97	0.99
20	0.96	0.95	0.95	0.91	0.97
30	0.94	0.92	0.91	0.81	0.92
40	0.92	0.89	0.87	0.69	0.87
50	0.89	0.86	0.83	0.57	0.80
60	0.86	0.82	0.79	0.44	0.71
70	0.81	0.76	0.72	0.34	0.60
80	0.75	0.70	0.65	0.26	0.48
90	0.69	0.62	0.55	0.20	0.36
100	0.60	0.51	0.43	0.1	0.31
110	0.52	0.43	0.35	-	0.26
120	0.45	0.36	0.30	-	0.22
130	0.40	0.33	0.26	-	0.18
140	0.36	0.29	0.23	-	0.16
150	0.32	0.26	0.21	-	0.14
160	0.29	0.24	0.19	-	0.12
170	0.26	0.21	0.17	-	0.11
180	0.23	0.19	0.15	-	0.10
190	0.21	0.17	0.14	-	0.09
200	0.19	0.16	0.13	-	0.05

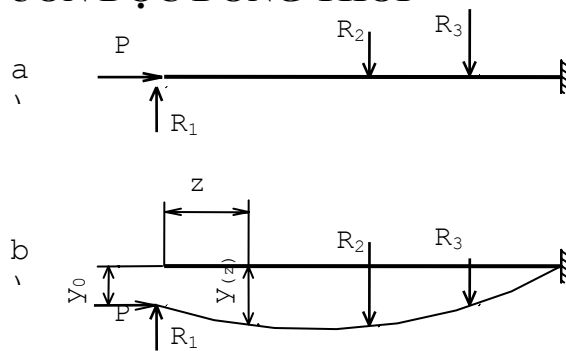


Chương 11

UỐN NGANG VÀ UỐN DỌC ĐỒNG THỜI

11.1. KHÁI NIỆM CHUNG

Từ trước đến nay việc tính toán một thanh hay một hệ chịu lực phức tạp đều dựa trên nguyên lý cộng tác dụng. Nguyên lý này chỉ đúng khi vật liệu làm việc trong giới hạn đàn hồi và



22 Hình 11.1: Thanh chịu uốn ngang và uốn dọc đồng thời

hệ bị biến dạng nhỏ. Thật vậy nếu không xét đến biến dạng uốn do lực dọc gây ra thì dầm trên hình 11.1a sẽ tính toán như một thanh chịu uốn do các lực ngang R_1, R_2, R_3 sinh ra và chịu nén do lực P .

Nếu thanh dài và độ cứng EJ nhỏ, tức là biến dạng lớn, ta phải kể đến sự uốn do lực dọc P gây ra nữa.

Bây giờ ta hãy xét biến dạng uốn do lực nén P gây ra (hình 11.1).

Tại mặt cắt bất kỳ cách đầu tự do một đoạn là z có độ võng là $y(z)$, mô men tại mặt cắt đó sẽ là:

$$M(z) = R_1 \times z + P [y(z) - y_0] \quad (a)$$

Trong đó: y_0 là độ võng ban đầu tại đầu tự do, do các lực dọc và lực ngang gây ra.

Biểu thức mô men (a) có thể viết dưới dạng:

$$M(z) = M^*(z) + P [y(z) - y_0] \quad (11-1)$$

Số hạng thứ nhất trong vế phải của (11-1) là lượng mô men do lực ngang gây ra. Số hạng thứ hai là lượng mô men do lực dọc gây ra, lượng này tăng nhanh khi lực dọc và lực ngang tăng. Vì thế bài toán này được gọi là bài toán uốn ngang và uốn dọc đồng thời. Nó có hai điểm khác trước đây:

1- Chuyển vị có ảnh hưởng đến trị số của nội lực (vì nó làm dời chuyển điểm đặt lực khác lớn).

2- Nội lực không tỷ lệ bậc nhất với ngoại lực vì $y(z)$ là hàm của P và R_1, R_2, R_3 nên số hạng thứ hai trong (11-1) không tỷ lệ bậc nhất với P được.

Một cách chặt chẽ hơn, ta nói lực dọc ở các mặt cắt không còn là không đổi và bằng lực P nữa vì mọi mặt cắt đã xoay đi. Tuy vậy lực dọc tính một cách chính xác không sai nhiều so với P nên người ta vẫn xem lực dọc là bằng giá trị lực P :

$$N_z = -P$$

Trên mỗi mặt cắt, ứng suất pháp do lực dọc N_z và mô men uốn $M(z)$ gây ra có giá trị tuyệt đối lớn nhất tại thớ biên chịu nén bằng:

$$\max \sigma_z = - \left[\frac{P}{F} + \frac{|M(z)|}{W_x} \right] \quad (11-2)$$

$$\text{hay} \quad \max \sigma_z = - \left(\frac{P}{F} + \frac{|M^*(z) + P[y(z) - y_0]|}{W_x} \right) \quad (11-3)$$

Người ta chỉ tính uốn ngang và uốn dọc đồng thời khi dầm dài có tỷ số $\frac{l}{h} > 12$ (h là chiều cao của dầm, l là chiều dài).

11.2. XÁC ĐỊNH NỘI LỰC THEO PHƯƠNG PHÁP CHÍNH TẮC

Căn cứ vào biểu thức (11-3) đồng thời dựa vào mối liên hệ vi phân giữa độ võng với nội lực và ngoại lực, chúng ta có thể đi đến kết quả việc xác định các thành phần nội lực tương đối chính xác. Trước hết ta thành lập phương trình vi phân của mô men uốn bằng cách đạo hàm hai lần liên tiếp phương trình (11-1):

$$\frac{d^2 M(z)}{dz^2} = \frac{d^2 M^*}{dz^2} + P \cdot \frac{d^2 y(z)}{dz^2} \quad (a)$$

Trong chương uốn, ta đã có:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = - \frac{M(z)}{EJ_x} \quad \text{và} \quad \frac{d^2 M^*}{dz^2} = q(z) \quad (b)$$

Thay (b) vào (a), ta được:

$$\frac{d^2 M(z)}{dz^2} = q(z) - \frac{P}{EJ_x} M(z) \quad (11-4)$$

Ta đặt $\alpha^2 = \frac{P}{EJ}$

Và phương trình (11-4) có thể được viết lại:

$$\frac{d^2 M(z)}{dz^2} + \alpha^2 M(z) = q(z) \quad (11-5)$$

Để thuận lợi và không quá phức tạp khi giải hệ (11-5), ta đưa ra một số giả thiết sau:

1. Dầm có độ cứng $EJ_x = \text{const}$ suốt chiều dài của dầm và không có liên kết bản lề trên dầm.

2. Nếu dầm có tải trọng phân bố thì cường độ đó hoặc không đổi hoặc bậc nhất trong từng đoạn hay trên suốt cả chiều dài dầm thì sẽ đơn giản hơn.

Với những giả thiết như thế thì biểu thức (11-5) sẽ là một phương trình vi phân cấp hai không thuần nhất, hệ số là hằng số hoặc là hàm bậc nhất.

Bây giờ chúng ta hãy xét một dầm dài chịu tác dụng các lực ngang và lực dọc, tức là bài toán phải tính toán là uốn ngang đồng thời với uốn dọc. Có thể căn cứ vào sự tác động của tải trọng ta có thể chia ra làm nhiều đoạn sao cho tải trọng trên từng đoạn là hằng số hoặc một hàm bậc nhất liên tục như đã nói ở trên.

Chúng ta gọi các biểu thức mô men ứng với từng đoạn là:

$$M_1(z), M_2(z), \dots, M_i(z), M_{i+1}(z), \dots, M_n(z).$$

Chúng ta hãy xét hai đoạn kề nhau thứ i và thứ $i+1$ (xem hình 11.2). Trên hình này vì tách ra 2 đoạn i và $i+1$ nên ta không biểu diễn các lực dọc ở đầu dầm là nguyên nhân gây ra uốn dọc. Tại ranh giới giữa hai đoạn i và $i+1$ xem như có tọa độ là $z=a$. Giả sử tại điểm K giáp giới giữa hai đoạn có lực tập trung là P_a và mô men tập trung là M_a và cường độ tải trọng phân bố có bước nhảy là Δq_a (xem hình 11.2). Biểu đồ mô men uốn thứ i và thứ $i+1$ được trình bày trên hình 11.2b. Tương tự kéo dài biểu đồ mô men ở đoạn thứ i sang đoạn $i+1$, lúc đó mô men trong đoạn thứ $i+1$ có thể xem bằng biểu thức:

$$M_{i+1}(z) = M_i(z) + \Delta M(z-a) \quad (11-6)$$

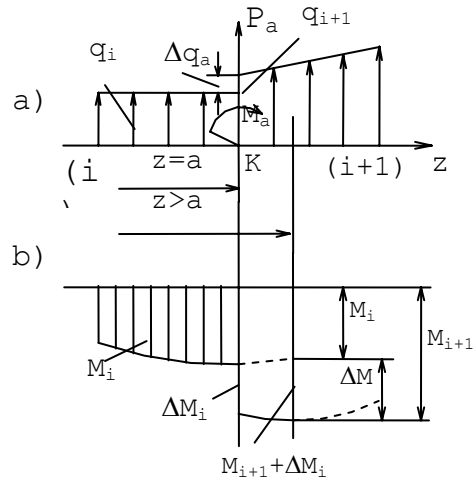
6)

Rõ ràng giá số ΔM thay đổi theo vị trí của mặt cắt, tức là ΔM cũng là hàm số theo $(z-a)$. Khi đã biết M_i , $\Delta M(z-a)$ thì tính được M_{i+1} . Việc xác định $\Delta M(z-a)$ là quan trọng. Hãy viết cho đoạn thứ i và $i+1$:

$$M_i''(z) + \alpha^2 M_i(z) = q_i \quad (c)$$

$$M_{i+1}''(z) + \alpha^2 M_{i+1}(z) = q_{i+1} \quad (d)$$

Thay biểu thức (11-6) và đạo hàm cấp 2 của nó vào (d), ta được:



Hình 11.2: Sơ đồ xác định nhảy lực

$$[M_i''(z) + \Delta M''(z-a)] + \alpha^2 [M_i(z) + \Delta M(z-a)] = q_{i+1} \quad (e)$$

Lấy (e) trừ cho (c), ta có:

$$\Delta M''(z-a) + \alpha^2 \Delta M(z-a) = q_{i+1} - q_i = \Delta q_a \quad (f)$$

Vì lẽ α và Δq_a (bước nhảy lực phân bố tại $z=a$) là các hằng số, nên nghiệm của phương trình (f) sẽ là:

$$\Delta M(z-a) = A \cos \alpha(z-a) + B \sin \alpha(z-a) + \frac{\Delta q_a}{\alpha} \quad (g)$$

A và B là những hằng số tích phân được xác định theo điều kiện biên của bài toán:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad \Delta M|_{z=a} = \Delta M_a \\ 2) \quad \Delta Q|_{z=a} = \Delta Q_a \end{array} \right\} \quad (h)$$

$$\text{Đạo hàm (g), ta có: } \Delta Q(z-a) = -A\alpha \cdot \sin \alpha(z-a) + B\alpha \cdot \cos \alpha(z-a) \quad (i)$$

Thay (h) vào (g), ta được:

$$A = \Delta M_a - \frac{\Delta q_a}{\alpha^2}; \quad B = \frac{\Delta Q_a}{\alpha}$$

Khi đã xác định được các hằng số A và B thì thay (h) vào (11-6), ta được biểu thức tổng quát về mô men ở đoạn thứ $i+1$:

$$\begin{aligned} M_{i+1}(z) = M_i(z) + \Delta M_a \cos \alpha(z-a) + \frac{\Delta Q_a}{\alpha} \cdot \sin \alpha(z-a) + \\ + \frac{\Delta q_a}{\alpha^2} [1 - \cos \alpha(z-a)] \end{aligned} \quad (11-7)$$

Từ (11-7), ta viết được mô men của đoạn thứ nhất, khi đó $M_i=0, a=0$ sẽ là:

$$M_1(z) = M_0 \cos \alpha z + \frac{Q_0}{\alpha} \cdot \sin \alpha z + \frac{q_0}{\alpha^2} (1 - \cos \alpha z) \quad (11-8)$$

Ở đây M_0, Q_0 và q_0 là mô men uốn, lực cắt và cường độ lực phân bố tại gốc tọa độ (đầu trên của dầm). Đã có các biểu thức mô men uốn M, đạo hàm nó, ta có được lực cắt Q. Thật vậy, đạo hàm (11-7) và (11-8), ta được:

$$Q_{i+1}(z) = Q_i(z) - \Delta M_a \alpha \sin \alpha(z-a) + \Delta Q_a \cos \alpha(z-a) + \frac{\Delta q_a}{\alpha} \sin \alpha(z-a) \quad (11-9)$$

$$\text{và} \quad Q_i = -M_0 \alpha \sin \alpha z + Q_0 \cos \alpha z + \frac{q_0}{\alpha} \sin \alpha z \quad (11-10)$$

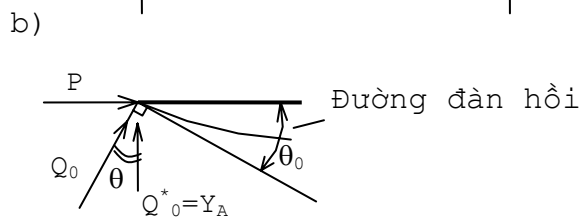
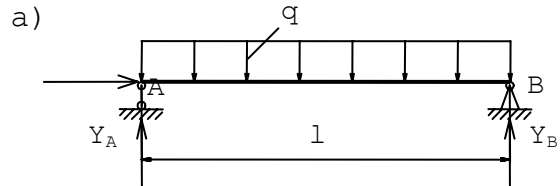
Chú ý: Trường hợp lực dọc là lực kéo thì không tạo ra uốn ngang đồng thời với uốn dọc được vì lực kéo này làm giảm độ võng chứ không làm cho độ võng tăng thêm.

Ví dụ 1: Cho một dầm chịu lực như hình 11.3. Hãy xác định ứng suất lớn nhất trong dầm.

Lời giải :

1-Đầu tiên ta xác định Q_0 trong (11-8) theo ngoại lực và chuyển vị ở gốc tọa độ A của dầm. Gọi Q_0^* là lực cắt tại A chỉ do riêng lực ngang gây ra, cho nên:

$$Q_0^* = \frac{ql}{2} = Y_A$$



Và θ là góc xoay của mặt cắt ngang A tại đầu dầm (xem hình 11.3b), nên:

$$Q_0 = Q_0^* \cos \theta_0 + P \sin \theta_0$$

Vì góc θ nhỏ, nên có thể viết lại:

$$Q_0 = Q_0^* + P \cdot \theta_0 = \frac{ql}{2} + P \cdot \theta_0$$

2- Lập bảng của thông số ban đầu: Dầm này là một đoạn, nên các thông số tại tọa độ $z=0$ sẽ là:

$$M_0 = 0 ; Q_0 = \frac{ql}{2} + P \cdot \theta_0 ; q_0 = -q$$

Do θ_0 chưa biết, nên Q_0 cũng chưa xác định được.

3- Viết biểu thức của mô men uốn theo (11-8) :

$$M(z) = \frac{Q_0}{\alpha} \sin \alpha z - \frac{q}{\alpha^2} (1 - \cos \alpha z)$$

4-Xác định thông số Q_0 bằng cách dựa vào điều kiện biên. Rõ ràng tại góc cố định phía phải mô men uốn bằng không (tức là tại $z=l$, thì $M=0$): $M_{z=l} = 0$

Do đó:
$$\frac{Q_0}{\alpha} \sin \alpha l - \frac{q}{\alpha^2} (1 - \cos \alpha l) = 0$$

Suy ra:

$$Q_0 = \frac{1 - \cos \alpha l}{\sin \alpha l} \cdot \frac{q}{\alpha}$$

Và ta có biểu thức mô men uốn bằng:

$$M(z) = \frac{1 - \cos \alpha l}{\sin \alpha l} \cdot \frac{q}{\alpha^2} \cdot \sin \alpha z - \frac{q}{\alpha^2} (1 - \cos \alpha z)$$

5- Tính ứng suất pháp lớn nhất (giá trị tuyệt đối), nó phát sinh ở tại mặt cắt có mô men uốn lớn nhất. Và nhớ rằng do lực dọc là nén, nên tại mặt cắt đó thì điểm chịu nén xa nhất do mô men uốn sẽ có giá trị tuyệt đối bằng tổng giá trị do lực dọc và mô men uốn

gây ra :

$$\sigma_{z \min} = - \left(\frac{P}{F} + \frac{|M_{\max}|}{W_x} \right)$$

Để xác định M_{\max} thì có thể lấy $\frac{dM(z)}{dz} = 0$ để xác định vị trí và trị số cực trị của nó. Song cũng có thể căn cứ vào tính chất của ngoại lực (chẳng hạn tính đối xứng) để đoán được vị trí và tính giá trị cực đại của mô men. Ví dụ trong bài toán của ta thì mô men sẽ đạt cực đại tại giữa dầm $z=l/2$. Vậy:

$$M_{\max} = M(z = l/2) = \frac{1 - \cos \alpha l/2}{\sin \alpha l} \cdot \frac{q}{\alpha^2} \cdot \sin \frac{\alpha l}{2} - \frac{q}{\alpha^2} \left(1 - \cos \frac{\alpha l}{2} \right) \quad (a)$$

Khi đó ứng suất lớn nhất sau khi biến đổi cuối cùng sẽ là:

$$\sigma_{z \min} = - \frac{P}{F} + \frac{q}{\alpha^2 W_x} \left(\frac{1 - \cos \frac{\alpha l}{2}}{\cos \frac{\alpha l}{2}} \right) \quad (b)$$

6- Các nhận xét:

- Theo (11-4), thì $\alpha^2 = \frac{P}{EJ_x}$, kết hợp (a) và (b), ta thấy nội lực không tỉ lệ bậc nhất với ngoại lực. Do đó, ứng suất cũng không tỉ lệ bậc nhất với ngoại lực.

- Khi $\cos \frac{\alpha l}{2} = 0$ thì M_{\max} và khi $\sin \alpha z$ sẽ tiến đến vô cùng, lúc này ta có:

$$\frac{\alpha l}{2} = (2k + 1) \frac{\pi}{2} \quad (k=0,1,2\dots)$$

Kết hợp với (11-4), ta có:

$$\frac{P}{EJ_x} = \alpha^2 = \frac{(2k + 1)^2 \pi^2}{l^2}$$

Vậy:

$$P = (2k + 1)^2 \frac{\pi^2 EJ_x}{l^2}$$

Ta cho rằng với $k=0$, thì lực P đạt tới giá trị tới hạn (P_{th}) và được tính:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_x}{l^2}$$

Chúng ta lại gặp lại giá trị lực dọc tới hạn như trong bài toán Euler.

Như vừa trình bày việc xác định nội lực, ứng suất khi uốn ngang đồng thời bằng phương pháp chính tắc vừa rồi là khá phức tạp. Vì vậy dưới đây ta trình bày cách xác định nội lực, ứng suất gần đúng, nhưng kết quả đó cũng đủ thoả mãn cho việc giải các bài toán uốn ngang đồng thời với uốn dọc.

11.3. BIỂU THỨC CỦA MÔ MEN UỐN VÀ LỰC CẮT BẰNG PHƯƠNG PHÁP GẦN ĐÚNG.

Phương pháp gần đúng này có kết quả không sai nhiều so với phương pháp đúng khi dầm chịu tải trọng đối xứng.

Giả sử có hai dầm giống nhau đặt trên hai gối tựa và chịu tải trọng đối xứng. Một dầm chỉ chịu tải trọng các lực ngang (hình 11.4a) và một dầm ngoài lực ngang còn có thêm lực dọc P tác dụng vào đầu khớp di động (hình 11.4b).

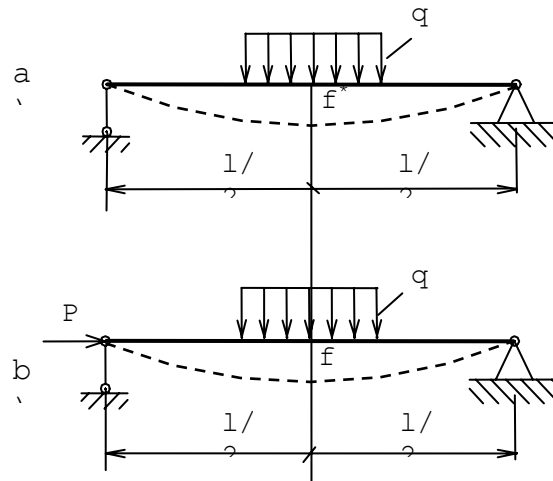
Đường đàn hồi của hai dầm có tính chất đối xứng và có thể xem dạng đường đàn hồi là hình sin. Do đó phương trình đường đàn hồi của dầm thứ nhất là:

$$y^* \approx f^* \sin \frac{\pi z}{l} \quad (a)$$

$$\text{và dầm thứ hai là: } y = f \sin \frac{\pi z}{l} \quad (b)$$

Trong đó: f^* - độ võng lớn nhất của dầm a); f - độ võng lớn nhất của dầm b).

Như đã biết:



Hình 11.4: Sơ đồ tính nội lực bằng phương pháp gần đúng

$$y''(z) = -\frac{M(z)}{EJ}$$

Vậy từ (a) và (b) ta viết được:

$$\begin{aligned} M^*(z) &= -EJ_x \cdot y^{*''} \\ &= EJ_x \frac{\pi^2}{l^2} f^* \sin \frac{\pi z}{l} = EJ_x \frac{\pi^2}{l^2} \cdot y^*(z) \end{aligned}$$

(chỉ có lực ngang)

$$M(z) = -EJ_x \cdot Y'' = EJ_x \frac{\pi^2}{l^2} f \sin \frac{\pi z}{l} = EJ_x \frac{\pi^2}{l^2} y(z)$$

(có lực ngang và lực dọc)

Thay chúng vào công thức (11-1), ta có:

$$EJ_x \frac{\pi^2}{l^2} y(z) = EJ_x \frac{\pi^2}{l^2} y^*(z) + P \cdot y(z)$$

Sau khi chuyển vế và rút gọn ta được:

$$y(z) = \frac{y^*(z)}{1 - P / \frac{\pi^2 EJ_x}{l^2}}$$

Ta thấy: $\frac{\pi^2 EJ_x}{l^2} = P_{th}$ (trong uốn dọc), lực P_{th} trong trường hợp uốn dọc.

Cuối cùng:
$$y(z) = \frac{y^*(z)}{1 - \frac{P}{P_{th}}} \quad (11-11)$$

Trong đó $y^*(z)$ là độ võng chỉ do các lực ngang gây ra được xác định bằng phương pháp thông thường đã biết ở chương uốn hoặc chương tính chuyển vị sau này.

Để tìm biểu thức mô men gần đúng ta tiến hành đạo hàm hai lần (11-4) rồi nhân cả hai vế cho EJ_x , ta được:

$$-EJ_x y''(z) = \frac{-EJ_x \cdot y^{*''}(z)}{1 - \frac{P}{P_{th}}}$$

hay:
$$M(z) = \frac{M^*(z)}{1 - \frac{P}{P_{th}}} \quad (11-12)$$

Trong đó: $M^*(z)$ là biểu thức mô men do lực ngang gây ra (xác định bằng phương pháp mặt cắt khi xác định nội lực). Đạo hàm (11-12), ta được công thức gần đúng để tính

lực cắt $Q(z)$:
$$Q(z) = \frac{Q^*(z)}{1 - \frac{P}{P_{th}}} \quad (11-13)$$

Trong đó: $Q^*(z)$ là lực cắt do các lực ngang gây ra và cũng xác định được bằng phương pháp mặt cắt. Như vậy ta cũng có công thức tính ứng suất nén lớn nhất theo biểu thức (11-3):

$$\sigma_{zmin} = - \left[\frac{P}{F} + \frac{|M^*(z)|}{W_x \left(1 - \frac{P}{P_{th}} \right)} \right] \quad (11-14)$$

Chú ý :

1- Các công thức gần đúng ở trên được chứng minh từ dầm đặt trên hai gối tựa. Tuy thế chúng có thể dùng cho các loại dầm có liên kết khác với điều kiện tính lực P_{th} trong điều kiện tương ứng mà ta đã biết:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_x}{(ml)^2} \quad (11-15)$$

Cũng cần nói thêm rằng công thức (11-8) khác với công thức tính P_{th} trong ổn định ở chỗ: Nếu liên kết theo hai mặt zoy và zox như nhau, trong ổn định ta tính giá trị J_{min} , còn trong trường hợp này nếu mô men uốn nằm trong mặt phẳng zoy thì trong công thức (11-8) phải dùng J_x và ngược lại. Có thể mô men quán tính J_x không phải là cực tiểu.

2- Nếu dầm đối xứng chịu tải trọng đối xứng thì kết quả tính khá đúng. Nếu không thỏa mãn điều đó thì kết quả kém chính xác hơn, nhất là khi các tải trọng ngang không nằm cùng một phía thì sai số sẽ lớn.

Ví dụ 2: Hãy tính giá trị mô men lớn nhất của dầm chịu lực như trên hình vẽ 11.5. Cho biết lực P bằng một nửa lực tới hạn P_{th} .

Lời giải: Căn cứ vào công thức tính giá trị mô men lớn nhất bằng phương pháp gần đúng chỉ có lực ngang q tác động, thì mô men uốn lớn nhất ở giữa là:

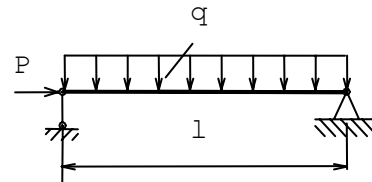
$$M_{max} = \frac{M_{max}^*}{1 - P/P_{th}}$$

Khi chỉ có lực ngang q tác dụng thì mô men lớn nhất sẽ ở giữa dầm là:

$$M_{max}^* = ql^2 / 8$$

Theo đề bài $P = \frac{1}{2} P_{th}$, nên ta có:

$$M_{max} = \frac{ql^2}{\left(1 - \frac{1}{2} \right) \cdot 8} = \frac{ql^2}{4} = 0,25ql^2$$



Hình 11.5: Tính mô men lớn nhất

11.4. KIỂM TRA BỀN

Với trường hợp lực dọc là lực nén, thì khi ta tính mô men uốn bằng công thức (11.1), ta thấy rằng lúc đó $M_x(z) > M^*(z)$, điều đó có nghĩa là mô men uốn do lực ngang và lực dọc tác dụng đồng thời lớn hơn mô men uốn chỉ do tác dụng của các lực ngang sinh ra.

Nếu lực dọc là lực kéo thì ngược lại $M_x(z) < M^*(z)$, điều này cũng có nghĩa là một thanh vừa chịu kéo và vừa chịu uốn thì biến dạng nhỏ đi và có thể áp dụng nguyên lý độc lập tác dụng (cộng tác dụng) như trong bài toán uốn cộng kéo. Việc kiểm tra bền được tiến hành như đã gặp trong chương chịu lực phức tạp, tức là kiểm tra bền theo ứng suất cho phép và ta có:

$$\max |\sigma| \leq [\sigma]$$

Tại mặt cắt có mô men lớn nhất, ta có:

$$\max |\sigma| = \frac{P}{F} + \frac{M_{\max}^*}{W_x} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_0}{n}$$

Trong đó: n- Hệ số an toàn; M_{\max}^* -Mô men uốn lớn nhất chỉ do lực ngang sinh ra.

Bây giờ chúng ta trở lại trường hợp lực dọc là một lực nén. Trong trường hợp này, giá trị ứng suất lớn nhất nằm ở xa trục đường trung hoà về phía chịu lực nén, tức là:

$$\max |\sigma| = \left| \frac{-nP}{F} - \frac{nM^*(z)}{W_x \left(1 - \frac{nP}{P_{th}}\right)} \right| \quad (11-16)$$

Nhìn vào (11-16), ta thấy tải trọng tăng lên n lần thì ứng suất sẽ tăng lên hơn n lần. Chính vì lí do này trong uốn ngang đồng thời với uốn dọc người ta không kiểm tra bền theo ứng suất cho phép được, mà người ta phải kiểm tra bền theo phương pháp tải trọng cho phép, tức là:

$$\max |\sigma| = \left| \frac{-n_0 P}{F} - \frac{n_0 M^*(z)}{W_x \left(1 - \frac{n_0 P}{P_{th}}\right)} \right| \leq \sigma_0 \cdot K \cdot m \quad (11-17)$$

Chú ý: Trong công thức, P và M_z^* được lấy giá trị tuyệt đối của nó và ở nơi mô men lớn nhất M_{\max}^* . Cũng có khi hệ số an toàn n được thay bằng nhiều hệ số khác. Ví như gọi hệ số vượt tải là n_0 ($n_0 > 1$), hệ số đồng nhất của vật liệu là K ($K < 1$) và hệ số điều kiện làm việc là m ($m < 1$). Lúc đó, ứng suất do tải trọng sau khi đã nhân hệ số vượt tải gây ra phải thoả mãn điều kiện:

$$\max |\sigma| = \left| \frac{-n_0 P}{F} - \frac{n_0 M_{\max}^*}{W_x \left(1 - \frac{n_0 P}{P_{th}}\right)} \right| \leq \sigma_0 \cdot K \cdot m \quad (11-18)$$

Tích số $\sigma_0 \cdot K \cdot m$ gọi là cường độ tính toán.

CÂU HỎI TỰ HỌC:

- 11.1. Thế nào gọi là hiện tượng uốn ngang đồng thời với uốn dọc ?
- 11.2. Công thức tính mômen và ứng suất trong trường hợp uốn ngang đồng thời với uốn dọc ? Các công thức này khác với trường hợp chỉ uốn ngang ở chỗ nào
- 11.3. Trình bày phương pháp tính gần đúng để xác định lực cắt, mômen khi uốn ngang đồng thời với uốn dọc .
- 11.4. Hiện tượng uốn ngang đồng thời với uốn dọc chỉ xảy ra khi lực dọc là nén, tại sao?
- 11.5. Giá trị P_{th} trong trường hợp uốn ngang cộng với uốn dọc khác gì khi chỉ có uốn dọc ?
- 11.6. Kiểm tra bền khi dầm vừa chịu lực dọc và lực ngang.
- 11.7. Công thức tính ứng suất gần đúng ở trên phù hợp với trường hợp nào về tải trọng, về kết cấu ?

--- %%%-%---

Chương 12