

Chương 21

TẤM VÀ VỎ

Như đã nói ở phần mở đầu: Thanh mới là đối tượng nghiên cứu chính của môn học sức bền vật liệu, nhưng trong kĩ thuật còn xuất hiện nhiều kết cấu có hình dáng khác như tấm, vỏ, thanh mỏng hay những bài toán về khối....Tấm và vỏ là những bài toán về cơ học và thường gặp trong các lĩnh vực xây dựng, cơ khí, hoá học...vì vậy chúng tôi mạnh dạn giới thiệu vấn đề cơ bản nhất của lí thuyết về tấm và vỏ. Cũng cần nói thêm rằng: lí thuyết về tấm và vỏ là rất rộng lớn, nó đã và đang được nhiều nhà bác học nghiên cứu. Tập sách của X.P.Timôsenkô, X.Voinovski Krige đã được một số nhà khoa học Việt nam dịch và xuất bản năm 1971 với độ dày 665 trang. Cho nên chúng tôi nghĩ rằng chương tấm và vỏ này chỉ trang bị cho sinh viên một số khái niệm nào đó về tấm, vỏ. Chúng tôi cũng chỉ mới chọn lọc một số dạng bài toán thường gặp để giới thiệu trong giáo trình này.

Tấm và vỏ là những vật thể có kích thước theo một phương rất bé so với hai phương kia. Kích thước đó được gọi là bề dày của tấm và vỏ. Mặt quỹ tích cách đều hai mặt giới hạn của chúng được gọi là mặt trung gian. Nếu mặt trung gian là phẳng thì ta gọi vật thể là tấm, nếu mặt trung gian đó là mặt cong thì ta gọi vật thể đó là vỏ. Cũng căn cứ vào hình dáng của mặt trung gian đó mà gọi là tấm tròn, tấm vuông, tấm chữ nhật...hay vỏ cầu, vỏ trụ, vỏ tròn xoay...Người ta còn căn cứ vào tỉ lệ bề dày của tấm, vỏ để xác định ra loại tấm, vỏ mỏng hay tấm, vỏ dày.

- Nếu $\frac{\delta}{l_{\min}} > \frac{1}{5}$ thì gọi là tấm, vỏ dày.
- Nếu $\frac{\delta}{l_{\min}} < \frac{1}{5}$ thì gọi là tấm, vỏ mỏng.

Trong đó l_{\min} là cạnh ngắn nhất của tấm hay vỏ.

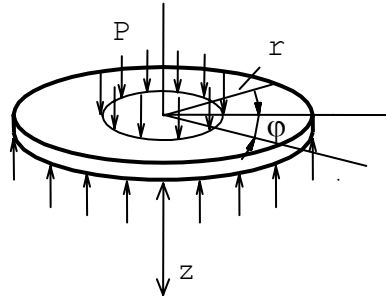
Bề dày của tấm, vỏ có thể thay đổi, nhưng cũng có thể là không đổi. Thường thì các kết cấu tấm và vỏ có bề dày δ không đổi nên ta chú tâm nghiên cứu các loại này.

Khi giải các bài toán về tấm và vỏ chúng ta cố gắng diễn giải vấn đề gần với kiến thức mà chúng ta đã học ở các phần trên. Chúng ta nghiên cứu trước các bài toán về tấm.

21.1. TẤM TRÒN CHỊU UỐN.

Hãy xét tấm tròn có chiều dày không đổi chịu uốn dưới tác dụng của các tải trọng có phương vuông góc với mặt phẳng trung gian và phân bố đối xứng qua trục của tấm, xem hình 21.1.

Hình dạng của mặt sau khi biến dạng được gọi là mặt đàn hồi (hình 21.2). Gọi w là thành phần chuyển vị thẳng đứng của điểm trên mặt trung gian. Ta giả sử w là rất bé so với chiều dày của tấm ($w/h \leq 1/5$), khi đó ta có thể bỏ qua thành phần chuyển vị theo hướng kính và xem w như chuyển vị toàn phần. Sử dụng hệ tọa độ trụ với trục z trùng với trục của tấm, r và φ là bán kính và tọa độ góc của các điểm trong mặt trung gian, khi chưa biến dạng thì w lại là hàm của r (w không phụ thuộc vào φ vì lí do đối xứng). w phụ thuộc vào vị trí mỗi điểm trên mặt trung gian nên phương trình của nó cũng là phương trình mặt trung gian. Để đơn giản việc tính toán, ta thừa nhận giả thiết của Kiéc-hốp về pháp tuyến của mặt trung gian như sau:



Hình 21.1: Tấm tròn chịu

tác dụng của tải

Ta xem rằng các điểm vật rắn nằm trên đường pháp tuyến của mặt trung gian sau biến dạng sẽ dịch chuyển đến các vị trí mới trên pháp tuyến tương ứng của mặt đàn hồi. Nói một cách khác, pháp tuyến của mặt trung gian không bị biến dạng trong quá trình tấm chịu lực.

Giả thiết này đóng vai trò quan trọng như giả thiết về mặt cắt phẳng của Becnuli trong lý thuyết về uốn của thanh.

Như vậy pháp tuyến của mặt cắt trung gian bị xoay đi một góc ζ trong quá trình tấm biến dạng (hình 21.2). Vì lý do đối xứng nên góc xoay đó hướng về trục của tấm và tương tự đối với thanh, góc xoay ζ là đạo hàm của độ võng w:

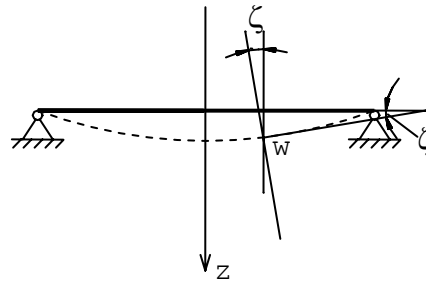
$$\zeta = \frac{dw}{dr} \quad (21-1)$$

Độ võng càng bé khi ζ càng bé.

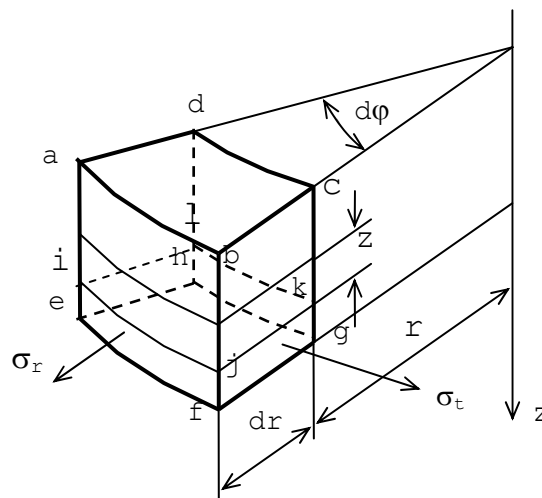
Bây giờ ta hãy tách một phân tử vô cùng bé ra khỏi tấm bằng các mặt cắt sau đây: hai mặt cắt đi qua trục của tấm tạo với nhau một góc $d\varphi$, hai mặt trụ có bán kính r và r+dr. Phân tử được biểu diễn trên hình 21.3.

Ta hãy tính biến dạng của lớp mỏng (ijkl) song song với mặt trung gian.

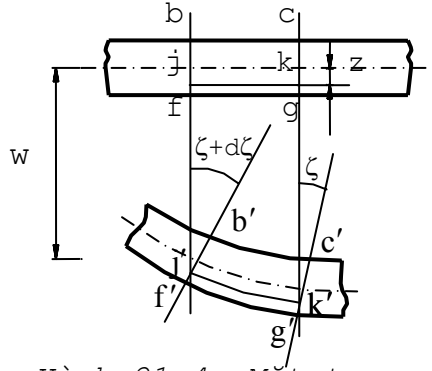
Sau biến dạng mặt trung gian trở thành mặt cong, các pháp tuyến bf và cg trở thành đường b'f' và c'g', xem hình 21.4.



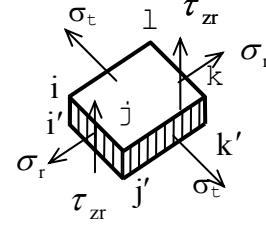
Hình 21.2: Hình dạng mặt tấm sau biến dạng



Hình 21.3: Phân tử tính biến dạng



Hình 21.4: Mặt trung gian trước và sau biến dạng



Hình 21.5: Sơ đồ ứng suất trên một lớp mỏng

Góc xoay của cg là góc ζ gồm giữa cg và c'g'. Góc xoay của bf sẽ là $\zeta+d\zeta$, góc gồm giữa bf và b'f'. Biến dạng dài theo phương bán kính ε_r là biến dạng tỉ đối của thớ jk.

$$\varepsilon_r = \frac{z(\zeta + d\zeta) - z\zeta}{dr} = z \frac{d\zeta}{dr} \quad (21-2)$$

Biến dạng theo phương vòng được tính bởi độ giãn của đường kính tròn đi qua kl. Chiều dài của đường tròn trước khi biến dạng là $2\pi r$ và sau khi biến dạng là $2\pi(r + z\xi)$.

Vậy:

$$\varepsilon_r = \frac{2\pi(r + z\xi) - 2\pi r}{2\pi r} = z \frac{\xi}{r} \quad (21-3)$$

Sử dụng hai mặt cắt ijkl và i'j'k'l' song song với nhau ta có thể tách từ phân tử trên một lớp mỏng (xem hình 21.5).

Ta thừa nhận rằng ứng suất pháp trên các mặt cắt song song với mặt trung gian là bằng không. Điều thừa nhận này tương đương với việc thừa nhận giả thiết về các lớp không ép lên nhau trong quá trình tấm biến dạng. Từ định luật Hooke, ta có:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu\sigma_t] \quad ; \quad \varepsilon_t = \frac{1}{E} [\sigma_t - \mu\sigma_r]$$

Hay có thể biểu diễn ứng suất qua các thành phần biến dạng:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_r + \mu\varepsilon_t) \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_t + \mu\varepsilon_r) \end{aligned} \right\} \quad (21-4)$$

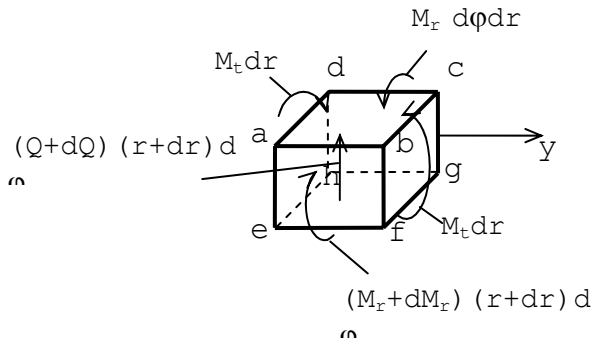
Thay các trị số của ε_r và ε_t của (21-4) vào (21-2) và (21-3), ta được :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{d\zeta}{dr} + \mu \frac{\zeta}{r} \right) \\ \sigma_t &= \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\zeta}{r} + \mu \frac{d\zeta}{dr} \right) \end{aligned} \right\} \quad (21-5)$$

(Những phương trình này có phần giống như các biểu thức biến dạng, ứng suất trong ống dày đã nghiên cứu).

Mối tương quan giữa nội lực và ứng suất cũng cần được xem xét.

Ta xét lại phân tử abcdefgh. Vì lí do đối xứng nên trên các mặt cắt đi qua trục của tấm (mặt bcgf và adhe) không thể có ứng suất tiếp, nghĩa là không có lực cắt. Trên các mặt cắt trụ abfe và dcgh ta có các ứng suất τ_{rz} , nghĩa là có thành phần lực cắt Q . Thành phần lực cắt này cân bằng với tải trọng đặt trên diện tích abcd. Ngoài thành phần lực cắt đó ta còn có các thành phần mô men uốn M_r và M_t (Q, M_r, M_t là các thành phần nội lực trên đơn vị độ dài), hình 21.6.



Hình 21.6: Sơ đồ tính ứng suất

Tương quan giữa nội lực và ứng suất là:

$$M_r \cdot r d\varphi = r \cdot d\varphi \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r \cdot z dz \quad ; \quad M_t \cdot dr = dr \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_t \cdot z dz$$

Đưa các biểu thức tính ứng suất từ (21-5) vào ta có:

$$M_r = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(\frac{d\zeta}{dr} + \mu \frac{\zeta}{r} \right) \cdot \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz$$

$$M_t = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(\frac{\zeta}{r} + \mu \cdot \frac{d\zeta}{dr} \right) \cdot \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz$$

Biểu thức tích phân: $\int_{-h/2}^{h/2} z^2 \cdot dz = \frac{h^3}{12}$

Từ đó ta suy ra:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= D \cdot \left(\frac{d\zeta}{dr} + \mu \cdot \frac{\zeta}{r} \right) \\ M_t &= D \cdot \left(\frac{\zeta}{r} + \mu \cdot \frac{d\zeta}{dr} \right) \end{aligned} \right\} \quad (21-6)$$

Trong đó :

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\mu^2)} \quad (21-7)$$

D được gọi là độ cứng khi uốn của tấm. Chiều tất cả các lực lên phương của trục đối xứng, ta có:

$$(Q + dQ)(r + dr)d\varphi - Q \cdot r d\varphi - p \cdot r d\varphi \cdot dr = 0$$

Do đó: $p \cdot r = \frac{d}{dr}(Q \cdot r) \quad (21-8)$

Lấy tổng mô men của các lực đối với trục y , trục tiếp tuyến với đường tròn r trên mặt trung gian, ta có:

$$\begin{aligned} (M_r + dM_r)(r + dr)d\varphi - M_r r \cdot d\varphi - p \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot \frac{dr}{2} - \\ - M_t \cdot dr \cdot d\varphi + (Q + dQ)d\varphi \cdot dr = 0 \end{aligned}$$

Bỏ qua các lượng vô cùng bé bậc cao, cuối cùng ta được:

$$M_t - \frac{d}{dr}(M_r \cdot r) = Q \cdot r \quad (21-9)$$

Vì lí do đối xứng nên tất cả các phương trình cân bằng khác luôn thoả mãn.

Đem các trị số M_t và M_r từ (21-6) vào (21-9) và giả thiết D là hằng số, ta nhận được phương trình vi phân:

$$r \cdot \frac{d^2 \zeta}{dr^2} + \frac{d\zeta}{dr} - \frac{\zeta}{r} = -\frac{Q \cdot r}{D}$$

Hay có thể viết dưới dạng:

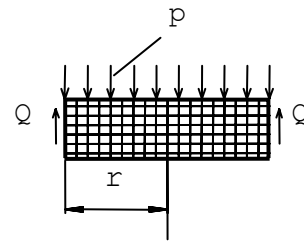
$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} (\zeta \cdot r) \right] = -\frac{Q}{D} \quad (21-10)$$

Như vậy để có ζ ta chỉ việc tích phân hai lần biểu thức (21-10), ta có:

$$\zeta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{D \cdot r} \int [r \int Q dr] dr \quad (21-11)$$

Trong đó C_1 và C_2 là các hằng số tích phân được xác định từ điều kiện biên của từng trường hợp cụ thể.

Trị số lực cắt Q được xác định từ phương trình (21-8) hay đơn giản hơn, ta tách ra một phần của tấm, bằng một mặt trụ bán kính r (hình 21.7) và xét sự cân bằng của phần đó.



Hình 21.7: Sơ đồ tính lực cắt Q

Khi đã xác định được ζ ta sẽ xác định được các mô men M_r và M_t theo (21-6) và có thể viết được phương trình của mặt đàn hồi w theo (21-1).

So sánh biểu thức (21-5) và (21-6) ta tìm được biểu thức của ứng suất :

$$\sigma_r = \frac{E \cdot z}{1 - \mu^2} \cdot \frac{M_r}{D} \quad ;$$

$$\sigma_t = \frac{E \cdot z}{1 - \mu^2} \cdot \frac{M_t}{D}$$

Thay trị số D từ (21-7) vào ta có :

$$\sigma_r = \frac{12M_r}{h^3} \cdot z \quad ; \quad \sigma_t = \frac{12M_t}{h^3} \cdot z$$

Trị số của ứng suất cực trị tại mặt trên và mặt dưới của tấm sẽ là:

$$\sigma_r^{\max} = \pm \frac{6M_r}{h^2} \quad ; \quad \sigma_t^{\max} = \pm \frac{6M_t}{h^2} \quad (21-12)$$

Ví dụ 1: Xác định độ võng và ứng suất trong tấm chịu tải trọng phân bố đều p ở hai trường hợp: khi tấm chịu ngàm chung quanh và khi tấm tựa trên các gối đỡ tự do. Gọi R là bán kính và h là chiều dày của tấm (xem hình 21.8).

Bài giải: Trị số của lực Q được xác định một cách đơn giản bằng cách sử dụng mặt cắt trụ bán kính r để tách một phần tấm. Dù liên kết ở bên ngoài như thế nào, từ điều kiện cân bằng của phần tấm ta đều có:

$$Q \cdot 2\pi r = p\pi \cdot r^2 \text{ hay } Q = \frac{pr}{2}$$

- Đưa trị số đó vào biểu thức (21-11) ta có được biểu thức của góc xoay :

$$\zeta = C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r} - \frac{p \cdot r^3}{16 \cdot D}$$

Với điều kiện góc xoay tại tâm của tấm là bằng không, ta xác định được $C_2=0$, vậy biểu thức của góc xoay được rút gọn lại:

$$\zeta = C_1 \cdot r - \frac{p \cdot r^3}{16 \cdot D} \quad (a)$$

Bây giờ ta hãy xét các trường hợp liên kết khác nhau. Trường hợp thứ nhất khi tấm chịu ngàm chung quanh. Điều kiện biên sẽ là $r=R$ thì $\zeta=0$. Từ đó ta tính được:

$$C_1 = \frac{pR}{16D} \quad ; \quad \zeta = \frac{p}{16D} (R \cdot r - r^2)$$

Theo công thức (21-6), ta có:

$$M_r = \frac{p}{16} [R^2(1+\mu) - r^2(3+\mu)]$$

$$M_t = \frac{p}{16} [R^2(1+\mu) - r^2(1+3\mu)]$$

Căn cứ biểu thức (21-1) ta tiến hành tích phân biểu thức (a) theo r , ta có phương trình của mặt đàn hồi:

$$w = \frac{p}{16D} \left[C_3 - \frac{1}{2} R^2 r^2 + \frac{r^4}{4} \right]$$

trong đó C_3 là hằng số tích phân được xác định từ điều kiện độ võng tại mép ngoài của tấm là bằng không, nghĩa là khi $r=R$ thì $w=0$. Từ đó ta có:

$$C_3 = \frac{1}{4} \cdot R^4$$

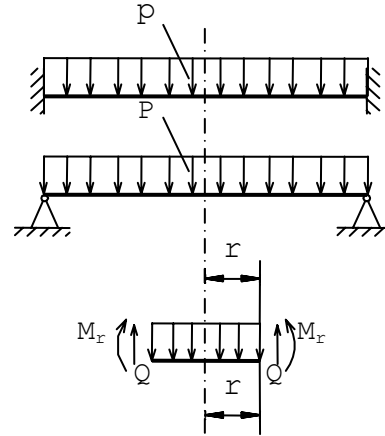
$$w = \frac{p}{64D} \cdot (R^2 - r^2)^2$$

- Đối với trường hợp thứ hai khi tấm được đặt trên các gối tựa, khi đó ứng suất σ_r (hay mô men uốn M_r) tại mép là bằng không. Theo (21-6) ta có:

$$\frac{d\zeta}{dr} + \mu \cdot \frac{\zeta}{r} = 0$$

Thay biểu thức của ζ vào ta có:

$$C_1 - \frac{3pR^2}{16D} + \mu \cdot \left(C_1 - \frac{pR^2}{16D} \right) = 0$$



Hình 21.8: Tấm chịu tải trọng phân bố đều khi chịu ngàm và khi đặt trên gối đỡ tự do

Từ đó ta tìm thấy:

$$C_1 = \frac{pR^2}{16D} \cdot \frac{3+\mu}{1+\mu}; \quad \zeta = \frac{p}{16D} \cdot \left[\frac{3+\mu}{1+\mu} \cdot R^2 \cdot r - r^3 \right]$$

Đưa các hằng số tích phân đã xác định vào các biểu thức tính M_r và M_t , ta có:

$$M_r = \frac{p}{16} \cdot (3+\mu)(R^2 - r^2)$$

$$M_t = \frac{p}{16} \cdot (3+\mu) \left(R^2 - \frac{1+3\mu}{3+\mu} \cdot r^2 \right)$$

Phương trình của mặt đàn hồi có dạng:

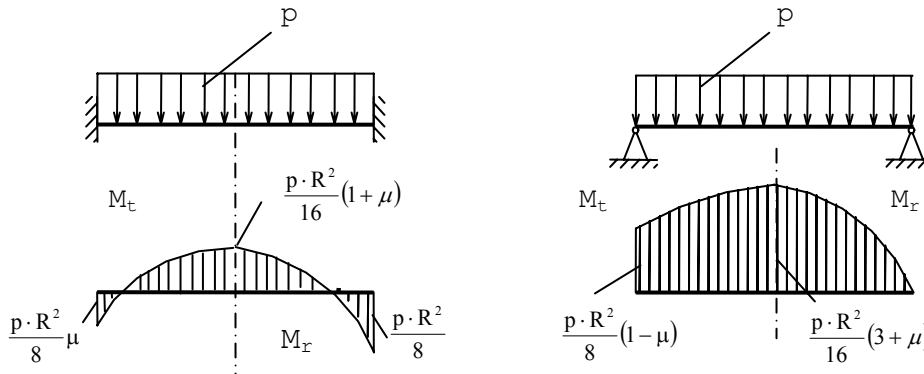
$$w = \frac{p}{16D} \cdot \left[C_3 - \frac{3+\mu}{1+\mu} \cdot \frac{R^2 r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \right]$$

Hằng số C_3 được xác định từ điều kiện độ võng tại mép là bằng không. Ta có:

$$C_3 = \frac{R^4}{4} \cdot \frac{5+\mu}{1+\mu}$$

$$w = \frac{p}{16D} \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{5+\mu}{1+\mu} \cdot R^4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3+\mu}{1+\mu} \cdot R^2 r^2 + \frac{1}{4} \cdot r^4 \right]$$

Biểu đồ mô men trong hai trường hợp được biểu diễn trên hình 21.9.



Hình 21.9: Biểu đồ mô men M_t và M_r khi tấm bê tông vai khi tấm âm trên hai

(Do tính chất đối xứng nên các nội lực chỉ cần biểu diễn trên một nửa của tấm. Ở đây bên trái là M_t và bên phải là M_r).

Ứng suất pháp lớn nhất xuất hiện tại ngàm. Tại đó chúng ta có:

$$\sigma_1 = \sigma_r = \frac{2p \cdot R^2}{16} \cdot \frac{6}{h^2}; \quad \sigma_2 = \sigma_t = \frac{2\mu \cdot p \cdot R^2}{16} \cdot \frac{6}{h^2}; \quad \sigma_3 = 0$$

Vậy ứng suất tương đương theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất sẽ là:

$$\sigma_{td} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{p \cdot R^2}{h^2}$$

Trong trường hợp tấm tựa trên các gối tựa thì ứng suất lớn nhất ở tâm. Tại đó, ta có:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_t = \sigma_r = \frac{3 + \mu}{16} \cdot \frac{6p \cdot R^2}{h^2}; \quad \sigma_3 = 0$$

Ứng suất tương đương là:

$$\sigma_{td} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{3}{8}(3 + \mu) \cdot \frac{p \cdot R^2}{h^2}$$

Cả hai trường hợp đều có độ võng lớn nhất ở giữa tấm.

Với trường hợp thứ nhất:

$$w_{\max} = \frac{pR^4}{64D}$$

Với trường hợp thứ hai:

$$w_{\max} = \frac{5 + \mu}{1 + \mu} \cdot \frac{pR^4}{64D}$$

Ví dụ 2: Xác định độ võng và ứng suất lớn nhất trong tấm tròn chịu ngàm chung quanh và lực tập trung P ở chính giữa, (hình 21.10).

Bài giải: Trước tiên ta xác định trị số của lực cắt Q.

Giống như ví dụ trước, ta có:

$$Q = \frac{p}{2\pi \cdot r}$$

Do đó ta có :

$$\zeta = C'_1 \cdot r + \frac{C'_2}{r} - \frac{p}{4\pi \cdot D} \cdot r \cdot \ln \frac{r}{R}$$

Ở tại tâm (r=0), góc $\zeta=0$; do đó $\lim_{r \rightarrow 0} \left(r \cdot \ln \frac{r}{R} \right) = 0$, từ đó ta suy ra $C'_2 = 0$. Hằng số

C'_1 được xác định từ điều kiện biên khi r=R, $\zeta=0$. Với điều kiện đó ta cũng tìm thấy

$C'_1 = 0$, do đó:

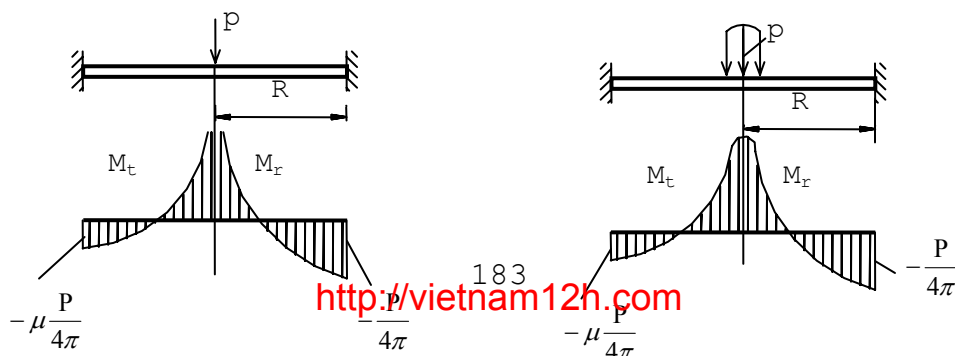
$$\zeta = \frac{p}{4\pi D} \cdot r \cdot \ln \frac{R}{r}$$

Vậy biểu thức các mô men uốn sẽ là:

$$M_r = \frac{p}{4\pi} \left[(1 + \mu) \cdot \ln \frac{R}{r} - 1 \right]$$

$$M_t = \frac{p}{4\pi} \left[(1 + \mu) \cdot \ln \frac{R}{r} - \mu \right]$$

Biểu đồ mô men uốn được biểu diễn trên hình 21.10. Ta thấy tại giữa tấm mô men uốn có trị số tăng lên vô cùng vì tại đây trị số lực cắt tăng lên vô cùng và điểm ở tâm trở nên điểm đặc biệt.



Trong thực tế không có lực tập trung tại một điểm, lực tập trung chỉ có trong sơ đồ để tính, bao giờ lực cũng đặt trên một diện tích nào đó, vì vậy trị số M_r và trị số M_t là hữu hạn, (hình 21.11).

Độ võng tại tâm của tấm có một trị số xác định.

$$w = C_3 - \frac{p \cdot r^2}{8\pi D} \cdot \left(\ln \frac{R}{r} + \frac{1}{2} \right)$$

Từ điều kiện $r=R, w=0$, ta có: $C_3 = \frac{p \cdot R^2}{16\pi \cdot D}$

Do đó :

$$w = \frac{p}{8\pi \cdot D} \cdot \left[\frac{1}{2}(R^2 - r^2) - r^2 \cdot \ln \frac{R}{r} \right]$$

Độ võng tại tâm là:

$$w_{\max} = \frac{p \cdot R^2}{16\pi \cdot D}$$

Ví dụ 3: Vẽ biểu đồ mô men uốn cho tấm chịu lực tác dụng tải trọng P phân bố đều trên đường tròn bán kính a (hình 21.12) và bị ngàm chung quanh.

Bài giải: Ta có hai miền rõ rệt: phần bên trong đường tròn đường kính $2a$ và phần bên ngoài.

Phần bên trong trị số lực cắt $Q=0$, do đó phương trình góc xoay sẽ có dạng:

$$\zeta_1 = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

Vì tại tâm $\zeta_1 = 0$, nên ta xác định ngay được $C_2=0$, do đó:

$$\zeta_1 = C_1 r \quad (1)$$

Ở phần ngoài trị số lực Q sẽ là:

$$Q = \frac{p}{2\pi r}$$

Từ đó ta có phương trình góc xoay là:

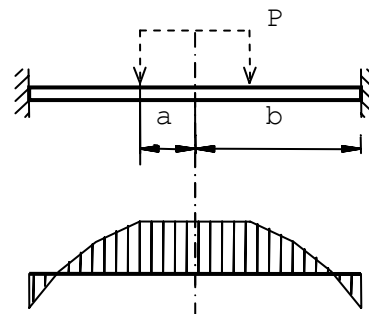
$$\zeta_2 = C'_2 r + \frac{C'_1}{r} - \frac{p}{4\pi D} r \ln \frac{r}{a} \quad (2)$$

Các hằng số C_1, C'_1 và C'_2 được xác định từ điều kiện liên kết của hai miền.

Với $r = a : \zeta_1 = \zeta_2$ và $M_{r1} = M_{r2}$.

Với $r = b : \zeta_2 = 0$.

Từ đó ta có hệ thống ba phương trình :



Hình 21.12: Sơ đồ tính mô men tấm tròn chịu lực phân bố đều

$$\left. \begin{aligned} C_1 a &= C_1' a + \frac{C_2'}{a} \\ C_1 &= C_1' - \frac{C_2'}{a^2} - \frac{p}{4\pi D} \\ C_1' b + \frac{C_2'}{b} - \frac{pb}{4\pi D} \ln \frac{b}{a} & \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Phương trình thứ hai của hệ thống đó thiết lập từ điều kiện $M_{r_1} = M_{r_2}$, có nghĩa là:

$$\left(\frac{d\zeta_1}{dr} + \mu \zeta_1 \right)_{r=a} = \left(\frac{d\zeta_2}{dr} + \mu \zeta_2 \right)_{r=a}$$

Giải hệ phương trình, ta tìm thấy :

$$C_1 = \frac{p}{4\pi D} \left(\ln \frac{b}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{b^2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$C_1' = \frac{p}{4\pi D} \left(\ln \frac{b}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{b^2} \right)$$

$$C_2' = -\frac{pa^2}{8\pi D}$$

Từ đó ta tìm mô men uốn ở các miền như sau:

$$\text{Ở miền trong: } M_r = M_t = \frac{p(1+\mu)}{4\pi} \left(\ln \frac{b}{a} + \frac{1}{2} \frac{a^2}{b^2} - \frac{1}{2} \right) = \text{const}$$

$$\text{Ở miền ngoài: } M_r = \frac{p}{4\pi} \left[(1+\mu) \left(\ln \frac{b}{r} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{b^2} \right) + \frac{a^2}{2r^2} (1-\mu) - 1 \right]$$

$$M_t = \frac{p}{4\pi} \left[(1+\mu) \left(\ln \frac{b}{r} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{b^2} \right) - \frac{a^2}{2r^2} (1-\mu) - \mu \right]$$

Biểu đồ được biểu diễn trên hình 21.12

21.2. TẤM CHỮ NHẬT CHỊU UỐN.

Khi xét tấm tròn chịu uốn ta chỉ gặp các hàm chịu ứng suất và chuyển vị với một biến số. Trong bài toán này ta gặp các hàm số với hai biến số. Đó là khó khăn khi giải bài toán.

Các giả thiết mà ta đã sử dụng để giải cho bài tấm tròn chịu uốn đều được sử dụng để giải với bài toán tấm chữ nhật chịu uốn như giả thiết của Kiếc-hốp về đường pháp tuyến cũng như thừa nhận biến dạng và chuyển vị là rất bé so với chiều dày của tấm. Ta thiết lập phương trình vi phân cơ bản của tấm trong hệ tọa độ Đê-các.

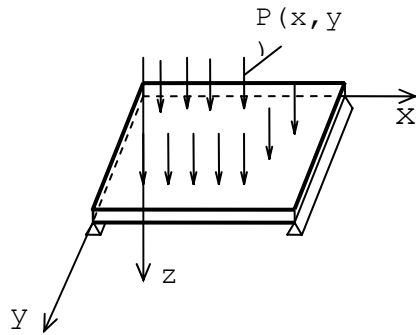
21.2.1. Xét tương quan giữa chuyển vị, biến dạng và ứng suất.

Giả sử có tấm chữ nhật chịu uốn như hình 21.13.

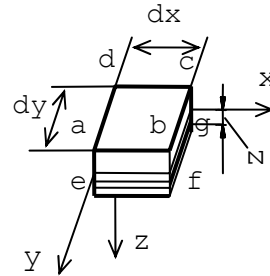
Hệ trục tọa độ được chọn như hình vẽ. Các trục ox, oy nằm trong mặt trung gian khi tấm chưa biến dạng và oz là pháp tuyến của mặt trung gian đó.

Tách một phân tử vô cùng bé bởi các mặt cắt song song với các mặt cắt toạ độ xoz và yoz. Phân tử được biểu diễn như trên hình 21.14.

Cũng như trên, ta xét các biến dạng theo phương x và y của một lớp ijkl (hình

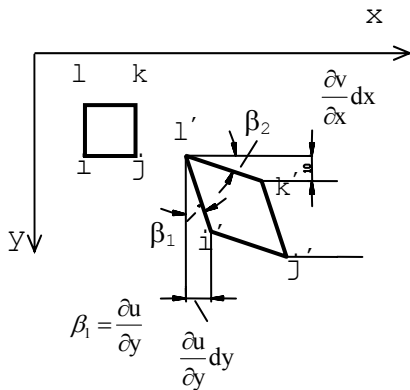


Hình 21.13: Tấm chữ nhật chịu uốn



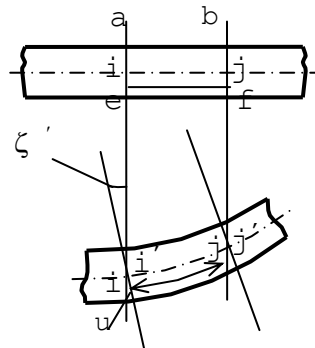
Hình 21.14: Phân tử tính nội lực

21.15) cách mặt trung gian một khoảng z.



Gọi ζ là góc xoay của pháp tuyến ac (hình 21.16). Tương quan giữa ζ và độ võng w là:

Hình 21.15: sơ đồ tính biến dạng



Hình 21.16: Sơ đồ tính góc xoay

$$\zeta = \frac{\partial w}{\partial x}$$

Góc xoay của pháp tuyến bf sẽ có trị số là:

$$\zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cdot dx$$

Vậy biến dạng theo phương x là:

$$\epsilon_x = z \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} = z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (21-13)$$

Tương tự ta có:

$$\epsilon_y = z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (21-14)$$

Xét đến biến dạng góc trong lớp ijkl. Gọi u và v là chuyển vị của các điểm.

Theo phương x và y, ta có

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Tương quan giữa u, v và w là như sau:

$$u = z \cdot \zeta = z \cdot \frac{\partial w}{\partial x}; \quad v = z \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$$

Từ đó ta có :

$$\gamma_{xy} = 2z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (21-15)$$

Cũng như trên, các tương quan định luật Hooke, được viết dưới dạng:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot 2(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot 2(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \gamma_{xy}$$

Thay các trị số ε_x , ε_y và γ_{xy} được tính từ (21-13), (21-14), (21-15) vào đây ta có :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{E \cdot z}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{E \cdot z}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{E \cdot z}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (21-16)$$

Ngoài thành phần τ_{xy} , trên các mặt cắt còn có các ứng suất tiếp τ_{yz} và τ_{xz} hướng theo phương trục z. Ở đây chúng ta cũng thừa nhận giả thiết về các lớp không ép lên nhau trong quá trình tấm biến dạng.

21.2.2. Các thành phần nội lực và phương trình cân bằng.

Trên mỗi mặt cắt của phân tố đều có đủ sáu thành phần nội lực: lực kéo, lực cắt theo phương thẳng đứng, lực cắt theo phương ngang, các mô men uốn và mô men xoắn. Song mô men uốn nằm trong mặt phẳng trung gian có trị số quá bé nên có thể xem bằng không. Thực vậy khi dx và dy là những lượng vô cùng bé và có thể xem ứng suất pháp phân bố dọc theo dx và dy là phân bố đều nên nó không sinh ra các mô men.

Ta cũng dễ dàng chứng minh rằng các lực kéo và lực cắt theo phương x và y là bằng không. Ta có:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot dy \cdot dz = -\frac{E \cdot dy}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot dz = 0$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot dx \cdot dz = -\frac{E \cdot dx}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot dz = 0$$

$$S_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot dx \cdot dz = -\frac{E \cdot dx}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot dz = 0$$

$$S_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} \cdot dy \cdot dz = -\frac{E \cdot dy}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot dz = 0$$

Do đó trên các mặt cắt của phân tố ta chỉ còn lại ba thành phần nội lực: mô men uốn M_x hoặc M_y , mô men xoắn M_{xy} và các thành phần lực cắt Q_x ; Q_y (Một lần nữa ta

nhắc lại rằng $M_x, M_y; M_{xy}$ và Q_x, Q_y là cường độ các thành phần nội lực trên đơn vị dài).
Ta có các biểu thức tương quan giữa ứng suất và nội lực như sau:

$$M_x \cdot dy = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dy \cdot zdz; \quad M_y \cdot dx = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dx \cdot zdz$$

$$M_{xy} \cdot dy = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dy \cdot zdz; \quad M_{yx} \cdot dx = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} dx \cdot zdz$$

Hay $M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot zdz; \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot zdz; \quad M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} \cdot zdz$

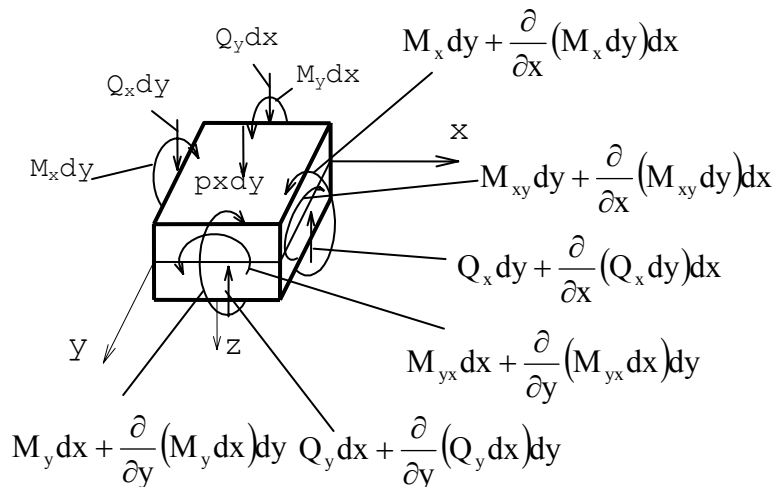
Đem thay các trị số của ứng suất (21-16) vào đây ta được:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ M_y &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ M_{xy} &= M_{yx} = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (21-17)$$

Trong đó: $D = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \mu^2)}$ (21-18), được gọi là độ cứng khi uốn của tấm.

Các thành phần nội lực cũng như ngoại lực đặt trên phân tố được biểu diễn trên hình 21.17. Chiều của nội lực trên phân tố được quy ước là dương như trên hình vẽ.

Chuyển từ mặt này sang mặt cắt kia, các thành phần nội lực có giá số được trình bày như trên hình 21.17.



Hình 21.17: Sơ đồ biểu diễn các thành phần nội lực và ngoại lực

Chiếu tất cả các lực đặt trên phân tố xuống trục z và lấy tổng mô men của các lực đối với trục x và trục y ta được các phương trình cân bằng sau đây:

$$\left. \begin{aligned} p dx dy + Q_x \cdot dy - \left[Q_x dy + \frac{\partial}{\partial x} (Q_x dy) dx \right] + \\ + Q_y dx - \left[Q_y dx + \frac{\partial}{\partial y} (Q_y dx) dy \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} M_y dx + \frac{\partial}{\partial y} (M_y dx) dy - M_y dx + \left[Q_y dx + \frac{\partial}{\partial y} (Q_y dx) dy \right] - \\ - M_{xy} dy + \left[M_{xy} dy + \frac{\partial}{\partial x} (M_{xy} dy) dx \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x dy - \left[M_x dy + \frac{\partial}{\partial x} (M_x dy) dx \right] - \left[Q_x dy + \frac{\partial}{\partial x} (Q_x dy) dx \right] dx - \\ - \left[M_{yx} dx + \frac{\partial}{\partial y} (M_{yx} dx) dy \right] + M_{yx} dx = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Sau khi rút gọn, ba phương trình trên có dạng:

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \\ Q_y &= -\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \\ Q_x &= -\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (21-19)$$

Đưa (21-17) vào (21-19) với các giả thiết là h và D không phụ thuộc vào x và y, hai biểu thức cuối của (21-19) có thể viết lại như sau:

$$Q_x = D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$Q_y = D \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

Dùng kí hiệu toán tử Lapolatxơ ∇^2 ta có thể viết gọn lại như sau:

$$Q_x = D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \quad (21-20)$$

$$Q_y = D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \quad (21-21)$$

Trong đó: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Đưa (21-20) và (21-21) vào phương trình đầu (21-19), ta được:

$$p = D \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 w + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^2 w \right]$$

Hay viết gọn lại: $P = D \cdot \nabla^2 \cdot \nabla^2 w \quad (21-22)$

Phương trình đó được viết dưới dạng khai triển như sau :

$$\frac{p}{D} = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \quad (21-23)$$

Phương trình đó được gọi là phương trình của Sôphi Giécmen. Phương trình đó không những dùng cho tấm chữ nhật mà còn đúng với mọi tấm khi sử dụng hệ tọa độ Đề-các với các giả thiết mà ta đã nêu ở trên.

21.2.3. Các điều kiện biên.

Nghiệm tổng quát của phương trình (21-23) gồm có hai phần:

$$w = f(x, y) + \Phi(x, y)$$

Trong đó: $f(x, y)$ là một nghiệm riêng; $\Phi(x, y)$ là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất:

$$\nabla^2 \cdot \nabla^2 w = 0$$

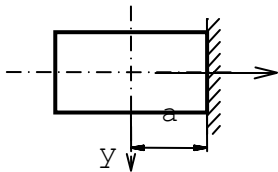
Một hàm φ nào đó mà thoả mãn điều kiện $\nabla^2 w = 0$ thì sẽ được gọi là hàm điều hoà. Cho nên hàm số $\Phi(x, y)$ được gọi là hàm trùng điều hoà. Song không phải tất cả mọi hàm điều hoà thoả mãn phương trình (21-23) đã là nghiệm của bài toán. Chỉ có nghiệm nào thoả mãn các điều kiện biên mới là nghiệm của bài toán và chính đó là khó khăn của bài toán tấm nói chung và hình chữ nhật nói riêng.

Các điều kiện biên là như sau:

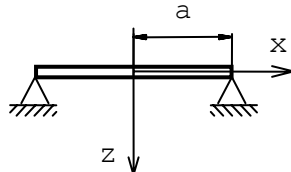
1. Biên là ngàm. Giả sử tấm có ngàm tại hoành độ $x=a$. Tại đó ta phải có hai điều kiện: độ võng và góc xoay theo phương vuông góc với ngàm là bằng không (xem hình 21.18):

$$(w)_{x=a} = 0 \quad (21-24)$$

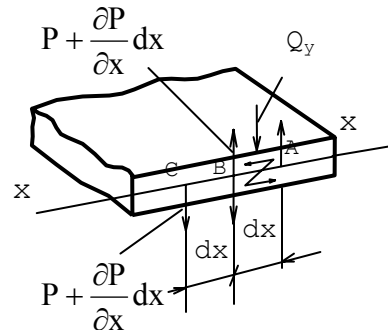
$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = 0 \quad (21-25)$$



Hình 21.18:
Biên là ngàm



Hình 21.19:
Biên là gối
tựa



Hình 21.20:
Biên tự do

2. Biên đặt trên gối tựa (xem hình 21.19).

Tại đó có hai điều kiện: độ võng bằng không và mô men uốn cũng bằng không. Giả sử biên có vị trí tại $x=a$. Vậy: $(w)_{x=a} = 0$ (21-26)

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \quad (21-27)$$

Chú ý rằng với điều kiện $(w)_{x=a} = 0$ kéo theo $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$.

Do đó điều kiện (21-27) có thể viết gọn lại là:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ hay } \nabla^2 w = 0 \quad (21-28)$$

3. Biên treo tự do. Khi đó cả ba thành phần ứng suất $\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{xy}$ trên các biên đều bằng không. Điều kiện đó tương đương với mô men uốn M_y , lực cắt Q_y và mô men xoắn M_{yx} phải bằng không. Song nếu có cả ba điều kiện thì sẽ mâu thuẫn với giả thuyết về pháp tuyến thẳng. Thực vậy vì đã có M_{yx} thì pháp tuyến không còn thẳng nữa. Do đó để thể hiện cả ba điều kiện thường mô men xoắn M_{xy} được đổi thành lực cắt.

Giả sử trên đoạn $AB=dx$ (hình 21.20) ta có mô men xoắn $M_{xy}dx$. Ta thay mô men xoắn đó bằng một ngẫu lực P ngược chiều:

$$\begin{aligned} P \cdot dx &= M_{xy} dx. \\ \text{Vậy} \quad P &= M_{xy} \end{aligned}$$

Xét đoạn tiếp $BC=dx$. Trên đoạn này mô men xoắn có trị số là $\left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) dx$.

Thay nó bằng ngẫu lực $\left(P + \frac{\partial P}{\partial x} \right)$. Vậy trên mỗi đoạn ta có một thành phần lực cắt phụ:

$$Q_1 = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$

Tại các điểm ở góc ta có các lực tập trung như $P_1 = M_{yx_1}$ và $P_2 = M_{yx_2}$. Như vậy lực cắt ở các biên sẽ được trừ đi một lượng là:

$$Q_y = \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}$$

Do đó các điều kiện $M_{yx}=0$ và $Q_y=0$ được thay bằng một điều kiện duy nhất là:

$$Q_y - \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = 0$$

Ta có thể viết: $M_y = 0$ hay $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$

$$Q_y - \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = 0 \text{ hay } \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} = 0 \quad (21-29)$$

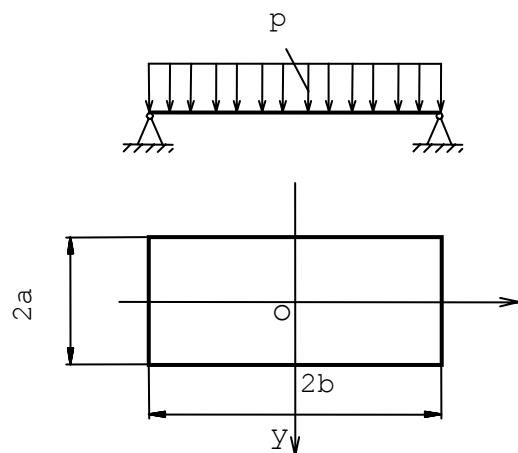
Ví dụ 4: Tính tấm chữ nhật có bốn biên tựa trên các gối tựa và chịu tác dụng của tải trọng phân bố đều p . Gọi $2a$ và $2b$ là các cạnh dài và ngắn của tấm (xem hình 21.21).

Bài giải: Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, vì bài toán có tính chất đối xứng nên hàm biểu diễn theo phương trình của mặt đàn hồi là một hàm chẵn. Điều kiện biên là như sau:

$$\begin{aligned} \text{Với } x = \pm a, w &= 0, M_x = 0, \\ y = \pm b, w &= 0, M_y = 0. \end{aligned}$$

Theo 21-28, ta có:

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{x=\pm a} = 0 \quad (1)$$



Hình 21.21: Tấm chữ nhật chịu tải phân bố đều đặt trên bốn gối tựa

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=\pm b} = 0 \quad (2)$$

Chọn hàm w dưới dạng:

$$w = f(x) + \sum_{1,3,5,\dots}^n \left(A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi \cdot y}{2a} + B_n y \operatorname{sh} \frac{n\pi \cdot y}{2a} \right) \sin \frac{n\pi(a+x)}{2a} \quad (3)$$

Trong đó $f(x)$ là một nghiệm riêng (hàm chỉ phụ thuộc vào một biến số). Ta phải chọn A_n và B_n để w thỏa mãn phương trình vi phân $\nabla^2 \nabla^2 w = 0$ và phải là một hàm chẵn. Ngoài ra đối với $x=\pm a$ các số hạng không phụ thuộc vào A_n và B_n phải bằng không. Cả đạo hàm bậc hai theo x hoặc y của nó cũng phải bằng không

Để xác định $f(x)$ ta sử dụng phương trình vi phân (21-23). Thay $f(x)$ vào ta có:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = \frac{p}{D}$$

Đặt
$$f(x) = \frac{p}{D} \left(\frac{x^4}{24} + \alpha \cdot x^3 + \beta \cdot x^2 + \gamma \cdot x + \delta \right)$$

Trong đó $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ là các hằng số bất kì.

Hàm $f(x)$ phải là một hàm chẵn, vậy $\alpha = \gamma = 0$.

Từ điều kiện (1), ta có:

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{x=\pm a} = 0 \quad \text{và} \quad [w]_{x=\pm a} = 0$$

Để ý đến tính chất của hàm dưới dấu Σ của (3), ta xác định được:

$$\beta = -\frac{a^2}{4}; \quad \delta = \frac{5a^4}{24}$$

Vậy :
$$f(x) = \frac{p}{D} \left(\frac{1}{24} \cdot x^4 - \frac{1}{4} a^2 \cdot x^2 + \frac{5}{24} a^4 \right)$$

Do đó :
$$w = \frac{p}{24D} (x^4 - 6a^2 \cdot x^2 + 5a^4) + \sum_{1,3,5,\dots}^n \left(A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{2a} + B_n y \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{2a} \right) \sin \frac{n\pi(a+x)}{2a} \quad (4)$$

Hàm đó với mọi giá trị A_n, B_n đều thỏa mãn điều kiện trên các biên tại $x=\pm a$. Bây giờ ta phải chọn A_n và B_n sao cho thỏa mãn các điều kiện biên với $y=\pm b$. Nghĩa là ta phải

có:
$$[w]_{y=\pm b} = 0 \quad \text{và} \quad \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{y=\pm b} = 0 \quad (5)$$

Để đạt được điều đó phần đại số ở biểu thức (4) phải được triển khai theo các hàm lượng giác:

$$\frac{p}{24D} (x^4 - 6a^2 x^2 + 5a^4) = \sum_{1,3,5,\dots}^n \alpha_n \sin \frac{n\pi(a+x)}{2a}$$

Với
$$\alpha_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^{+a} f(x) \sin \frac{n\pi(a+x)}{2a} dx$$

Sau khi lấy tích phân ta được:

$$\alpha_n = \frac{32pa^4}{(\pi n)^5 D} (1 - \cos \pi n)$$

Vậy với các trị số n chẵn $\alpha_n=0$ và với các trị số n lẻ:

$$\alpha_n = \frac{64Pa^4}{(\pi n)^5 \cdot D}$$

Do đó w có dạng :

$$w = \sum_{1,3,5,\dots}^n \left[\frac{64pa^4}{(\pi n)^5 \cdot D} + A_n \operatorname{ch} \frac{\pi n y}{2a} + B_n y \operatorname{sh} \frac{\pi n y}{2a} \right] \sin \frac{n\pi(a+x)}{2a}$$

Để thỏa mãn điều kiện (5) với mọi giá trị của x, hệ số của mỗi số hạng phải thỏa mãn, nghĩa là :

$$A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} + B_n b \cdot \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} = -\frac{64pa^4}{(\pi n)^5 \cdot D}$$

$$A_n \frac{\pi n}{2a} \operatorname{ch} \frac{\pi n b}{2a} + B_n \left[2 \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} + b \frac{\pi n}{2a} \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a} \right] = 0$$

Từ đó ta tìm thấy:

$$A_n = -\frac{32pa^4}{(\pi n)^5 \cdot D} \frac{2 + \frac{\pi n b}{2a} \operatorname{th} \frac{\pi n b}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi n b}{2a}}$$

$$B_n = \frac{32pa^4}{(\pi n)^5 \cdot D} \frac{\frac{\pi n}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi n b}{2a}}$$

Vậy phương trình của mặt đàn hồi sẽ là:

$$w = \frac{p(1-\mu^2)}{2Eh^3} \left\{ x^4 - 6a^2 x^2 + 5a^4 + \frac{1536a^4}{\pi^4} \sum_{1,3,5,\dots}^n \frac{1}{n^4 \operatorname{ch} \frac{\pi n b}{2a}} \times \right. \\ \left. \times \left[-\left(\frac{1}{\pi n} + \frac{b}{4a} \operatorname{th} \frac{\pi n b}{2a} \right) \operatorname{ch} \frac{\pi n y}{2a} + \frac{y}{4a} \operatorname{sh} \frac{\pi n y}{2a} \right] \sin \frac{\pi n(a+x)}{2a} \right\}$$

Độ võng lớn nhất là tại tâm. Với $x=y=0$, ta có:

$$w_0 = \frac{pa^4(1-\mu^2)}{2Eh^3} \left[5 - \frac{1536}{\pi^4} \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{n^4 \operatorname{ch} \frac{\pi n b}{2a}} \left(\frac{1}{\pi n} + \frac{b}{4a} \operatorname{th} \frac{\pi n b}{2a} \right) \right]$$

Ta có thể viết gọn lại dưới dạng:

$$w_0 = \xi \frac{pa^4}{Eh^3} \quad (7)$$

Để xác định được các mô men uốn M_x và M_y ta xác định các đạo hàm hạng hai riêng phần của w theo x và y:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{6p(1-\mu^2)}{Eh^3} \left\{ x^2 - a^2 - \frac{128a^4}{\pi^4} \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4 \cdot \text{ch} \frac{\pi nb}{2a}} \times \right. \\ \left. \times \left[-\left(\frac{1}{\pi n} + \frac{b}{4a} \text{th} \frac{\pi nb}{2a} \right) \text{ch} \frac{\pi ny}{2a} + \frac{y}{4a} \text{sh} \frac{\pi ny}{2a} \right] \left(\frac{\pi n}{2a} \right)^2 \sin \frac{\pi n(a+x)}{2a} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{p(1-\mu^2)}{Eh^3} \cdot \frac{768a^4}{\pi^4} \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4 \cdot \text{ch} \frac{\pi nb}{2a}} \times \\ \times \left[-\left(\frac{1}{\pi n} + \frac{b}{4a} \text{th} \frac{\pi nb}{2a} \right) \left(\frac{\pi n}{2a} \right)^2 \text{ch} \frac{\pi ny}{2a} + \frac{1}{2a} \cdot \frac{\pi n}{2a} \text{ch} \frac{\pi ny}{2a} + \frac{y}{4a} \left(\frac{\pi n}{2a} \right)^2 \text{sh} \frac{\pi ny}{2a} \right] \\ \times \sin \frac{\pi n(a+x)}{2a}$$

Theo (21-17) ta có các biểu thức M_x và M_y :

$$M_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$M_y = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$$

Mô men uốn lớn nhất là tại gốc tọa độ. Trị số của chúng là:

$$M_{x_0} = \frac{pa^2}{2} \left\{ -1 + \frac{32}{\pi^4} \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{n^4 \text{ch} \frac{\pi nb}{2a}} \left[(1-\mu)(\pi n)^2 \left(\frac{1}{\pi n} + \frac{b}{4a} \text{th} \frac{\pi nb}{2a} \right) + \mu \pi n \right] \right\}$$

$$M_{y_0} = \frac{pa^2}{2} \left\{ -\mu + \frac{32}{\pi^4} \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{n^4 \text{ch} \frac{\pi nb}{2a}} \left[-(1-\mu)(\pi n)^2 \left(\frac{1}{\pi n} + \frac{b}{4a} \text{th} \frac{\pi nb}{2a} \right) + \pi n \right] \right\}$$

Hay có thể viết gọn lại :

$$M_{x_0} = \chi pa^2; \quad M_{y_0} = \gamma pa^2$$

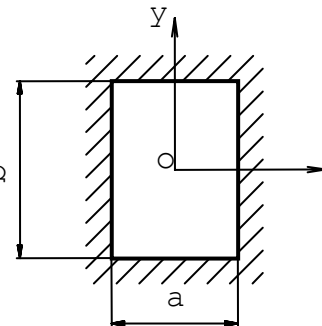
Các hệ số ξ , χ , γ phụ thuộc vào tỉ số b/a . Nếu lấy $\mu=0,30$ ta lập được bảng sau đây (bảng 21.1).

Một cách tương tự như vậy với tấm chịu ngàm chung quanh (hình 21.22), ta tìm thấy độ võng lớn nhất ở tâm:

$$w_0 = \alpha_1 \frac{pa^4}{Eh^3}$$

và mô men uốn lớn nhất là ở giữa cạnh dài, nghĩa là tại $x=\pm a/2$ và $y=0$:

$$M_x^{\max} = \beta_1 \cdot pa^2$$



Hình 21.22: Tấm chịu ngàm chung quanh

Bảng 21.1.

b/a	ξ	χ	γ
-----	-------	--------	----------

1	0,6928	0,1916	0,1916
1,2	0,9856	0,2504	0,2004
1,4	1,232	0,308	0,2024
1,6	1,4496	0,3448	0,1972
1,8	1,6272	0,3792	0,1916
2	1,7696	0,4068	0,1856
3	2,1376	0,4756	0,1616
4	2,24	0,494	0,1536
5	2,2656	0,4984	0,15
6	2,2752	0,5	0,15

Các hệ số α_1, β_1 phụ thuộc vào tỉ số b/a . b/a Nếu lấy $\mu=0,3$ ta có một trị số α_1 và β_1 theo b/a như trong bảng 21.2:

Bảng 21.2

b/a	1	1,25	1,50	1,75	2	
α_1	0,0138	0,0199	0,0240	0,0264	0,0277	0,0284
β_1	0,0513	0,0665	0,757	0,0817	0,0829	0,0838

Ta có thể tìm thấy các trường hợp chịu lực khác của tấm chữ nhật trong các tác phẩm của B.G. Galenski và Timoshenko.

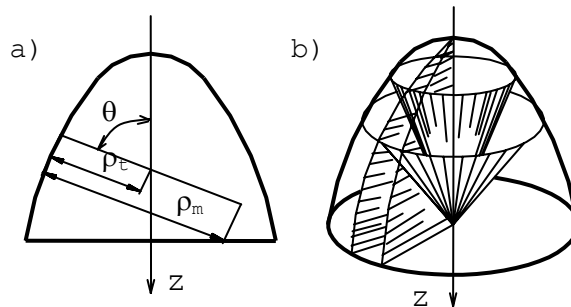
21.3.VỎ MỎNG TRÒN XOAY.

Ta gọi vỏ mỏng tròn xoay là khi mặt trung gian của vỏ có một trục đối xứng. Vì δ nhỏ nên có thể xem ứng suất pháp phân bố đều theo chiều dày của vỏ. Điều đó cũng có nghĩa là bỏ qua ảnh hưởng của thành phần mô men uốn. Cách tính toán dựa vào giả thuyết đó được gọi là lí thuyết không mô men.

Cũng cần nói thêm rằng: trong thực tế có khi có những lực tập trung tác dụng lên một nơi nào đó của vỏ hoặc có vành đai tăng cường, vùng biên chịu ngàm hay có sự thay đổi đột ngột về độ cong, ứng suất do mô men uốn gây nên là rất đáng kể. Song ảnh hưởng của mô men uốn chỉ nằm trong phạm vi rất hẹp. Ở xa các vùng đó ảnh hưởng của mô men uốn là rất bé có thể bỏ qua được.

Khi δ càng nhỏ thì lí thuyết không mô men càng đúng, càng gần với thực tế. Ở đây ta chỉ xem xét trường hợp áp suất tác dụng lên vỏ có tính chất đối xứng, nghĩa là trục đối xứng của vỏ cũng là trục đối xứng của tải trọng. Xét vỏ mỏng tròn xoay chịu áp lực phân bố đều bên trong như hình 21.23.

Gọi ρ_m là bán kính cong của đường kinh tuyến và ρ_1 là bán kính cong của đường vĩ tuyến tại một điểm nào đó trên mặt phẳng trung gian của vỏ mỏng. Các bán kính đó là bán kính chính của mặt cong. Chúng nằm trên pháp tuyến của mặt cong tại điểm đang xét. Gọi θ là góc làm bởi pháp tuyến này với trục đối xứng của vỏ, ρ_m và ρ_1 là những hàm số đối với θ . ρ_t là đoạn đường sinh của mặt nón giới hạn bởi đáy của đường tròn vĩ tuyến và đỉnh là giao điểm của pháp tuyến với trục



Hình 21.23:Vỏ mỏng tròn xoay chịu lực áp lực nhân bố đều

đối xứng của vỏ. ρ_m là bán kính cong của đường kinh tuyến tại điểm đang xét. ρ_m và ρ_t cũng được xác định trên pháp tuyến chung nhưng rõ ràng tâm cong của đường kinh tuyến không nằm trên trục đối xứng của mặt (xem hình 21.23a)

Ta tách ra khỏi vỏ một phân tố bởi các mặt sau đây:

- Hai mặt cắt là hai mặt nón đi qua hai đường vĩ tuyến rất gần nhau. Chúng có các đường sinh tạo với nhau một góc $d\theta$.

- Hai mặt kinh tuyến tạo với nhau một góc $d\varphi$.

Phân tố được biểu diễn như trên hình 21.23b.

Vệ lẽ do ảnh hưởng của các góc vuông luân luân ảnh hưởng bất lợi trong quá trình vỏ biến dạng và vì vậy trên các mặt cắt không có ứng suất tiếp, chỉ có các ứng suất pháp σ_m và σ_t theo phương kinh tuyến và vĩ tuyến.

Chiếu tất cả các lực lên phương pháp tuyến của phân tố ta có phương trình cân bằng như sau:

$$p \cdot \rho_m \rho_t d\theta d\varphi - 2\sigma_m \delta \rho_t d\varphi \sin \frac{d\theta}{2} - 2\sigma_t \cdot \delta \cdot \rho_m d\theta \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} = 0$$

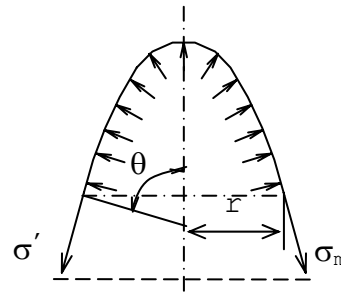
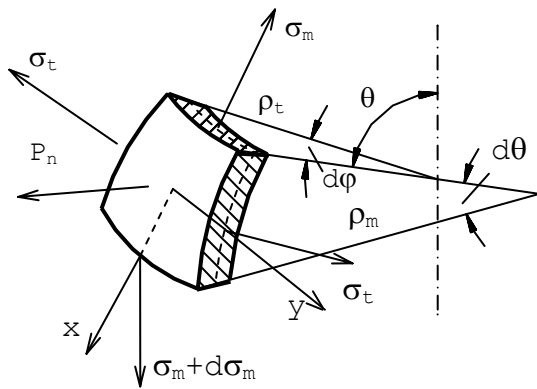
Vì $d\theta$ và $d\varphi$ là rất bé nên có thể xem $\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$, $\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$. Sau khi rút gọn và chia cả hai vế cho ρ_m, ρ_t, δ ta được phương trình:

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta} \quad (21-30)$$

Phương trình đó được gọi là phương trình Lapolatxơ.

Để thiết lập phương trình thứ hai, chúng ta xét sự cân bằng của một phần vỏ. Ví dụ cắt vỏ theo một mặt nón có đường sinh tạo với trục một góc θ (xem hình 21.25). Gọi P thành phần hợp lực của tải trọng trên phương của trục vỏ. Phương trình hình chiếu của các lực lên phương đó là:

$$\sigma_m \cdot 2\pi \cdot r \cdot \delta \sin \theta = P \quad (21-31)$$



T
rong đó
r là bán

Hình 21.24: Sơ đồ biểu diễn nội lực trên một phân tố

Hình 21.25: Nội lực trên mặt nón

kính của đường tròn đáy của hình nón.

Hệ phương trình (21-30) và (21-31) cho phép ta xác định được σ_m và σ_t . Ứng suất chính thứ ba là ứng suất ép giữa các lớp song song với thành vỏ. Ứng suất đó có thể bỏ

qua so với σ_m và σ_t . Thực vậy, ví dụ với điểm trong cùng, ứng suất đó là lớn nhất và bằng p , trong khi đó σ_m và σ_t có trị số vào cỡ $p \cdot \frac{\rho_m}{\delta}$ và $p \cdot \frac{\rho_t}{\delta}$, mà ρ_t và ρ_m là rất lớn so với δ .

Vậy trạng thái ứng suất có thể xem là trạng thái ứng suất phẳng.

Trong quá trình tính toán ta phải sử dụng định lí về hình chiếu sau đây:

Định lí 1: Nếu trên một mặt nào đó chịu tác dụng của một hệ áp lực p phân bố đều thì dù hình dạng của mặt đó như thế nào, thành phần hình chiếu của áp lực trên một phương nào đó sẽ là tích của áp suất với hình chiếu của mặt đó lên mặt phẳng vuông góc với phương chiếu.

Giả sử mặt F đã cho (hình 21.26), trên đó ta có hệ áp suất phân bố đều p . Ta phải tìm thành phần hình chiếu của áp lực P trên phương trục x . Thành phần đó được tính với biểu thức tích phân:

$$P_x = \int_F p \cos \varphi dF$$

Trong đó: φ -góc gồm giữa pháp tuyến của dF và trục x .

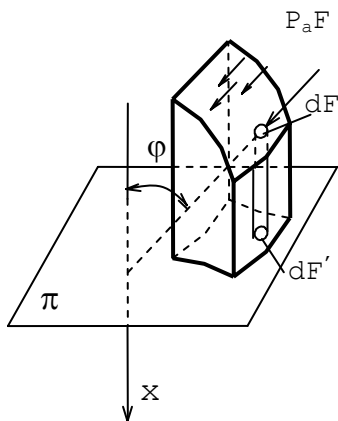
Hình chiếu diện tích dF trên mặt π vuông góc với trục x và bằng:

$$dF' = dF \cdot \cos \varphi$$

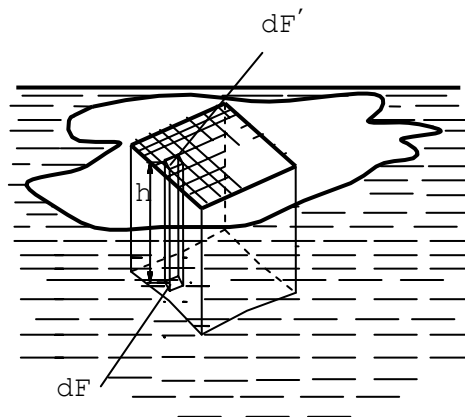
Do đó ta có thể viết lại: $P_x = p \cdot \int_F dF' = p \cdot F'$

F' là hình chiếu của F trên π .

Định lí thứ hai thường gặp là định lí về áp suất chất lỏng.



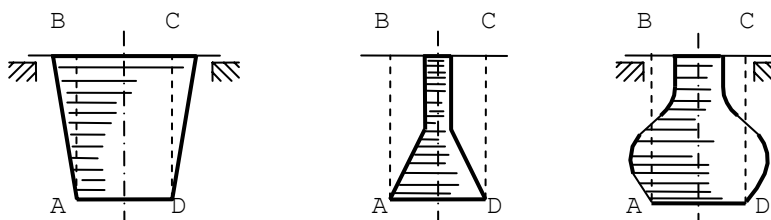
Hình 21.26: Mặt chịu áp suất rắn



Hình 21.27: Mặt chịu áp suất lỏng

Định lí thứ 2: Nếu trên một mặt nào đó chịu tác dụng áp suất của chất lỏng (hình 21.27) thì thành phần áp lực thẳng đứng là bằng trọng lượng cả thể tích cột chất lỏng đặt trên diện tích đó.

Trên các hình vẽ 21.28 ta thấy áp lực đặt trên AD là bằng trọng lực của cả cột chất lỏng BADC dù hình dạng của bình ở phía trên là như thế nào.



Hình 21.28: Kết cấu các dạng bình chịu áp suất lỏng

Thực vậy, khi mặt AD là nằm ngang thì áp suất của chất lỏng ở mọi nơi là bằng nhau và bằng $p = \gamma \cdot x$. γ là trọng lượng riêng của chất lỏng.

Theo định lý thứ nhất, hình chiếu của áp lực tác dụng lên AD trên phương thẳng đứng bằng áp suất nhân với diện tích hình chiếu của AD trên phương nằm ngang. Ở đây diện tích hình chiếu cũng chính là nó, do đó ta có:

$$P_x = F \cdot p = F \cdot x \cdot \gamma$$

$F \cdot x$ là thể tích của cột chất lỏng ở phía trên AD, vậy P_x là bằng trọng lượng của cả cột chất lỏng phía trên AD.

Ví dụ 5: Vỏ cầu bán kính R, chiều dày δ chịu áp suất bên trong p (hình 21.29). Xác định ứng suất trên thành vỏ.

Bài giải: Đối với vỏ cầu, ta có: $\rho_m = \rho_t = R$ và vì lí do đối xứng, nên:

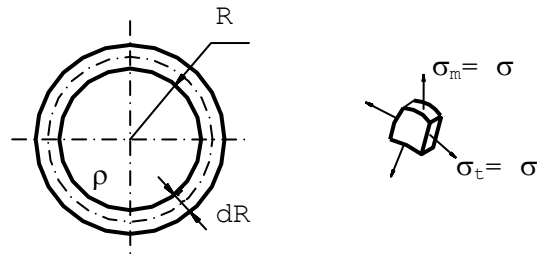
$$\sigma_m = \sigma_t = \frac{p \cdot R}{2\delta}$$

Thành phần ứng suất thứ ba coi như bằng không. Như vậy ứng suất tương đương theo thuyết bền ứng suất

lớn nhất là: $\sigma_{td} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{p \cdot R}{2\delta}$

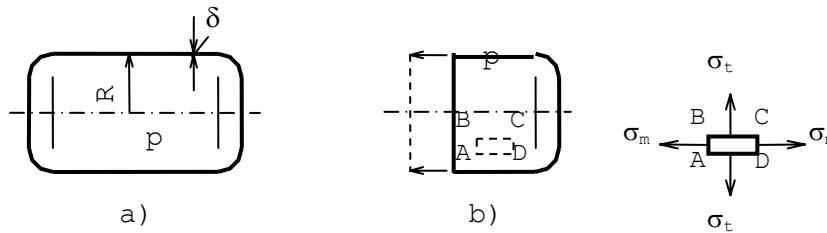
Điều kiện bền của vỏ là:

$$\frac{p \cdot R}{2\delta} \leq [\sigma]$$



Hình 21.29: Sơ đồ tính ứng suất vỏ cầu.

Ví dụ 6: Một bình chứa hình trụ (xem hình 21.30) chịu áp suất bên trong p. Bán kính hình trụ là R_1 và chiều dày của thành bình là δ . Xác định ứng suất trong thành bình.



Hình 21.30: Sơ đồ tính ứng suất của bình hình trụ chịu áp suất bên trong.

Bài giải : Ta tưởng tượng cắt hình với mặt cắt ngang (hình 21.30b) vớt bỏ một phần và xét sự cân bằng của phần còn lại. Ta có phương trình cân bằng:

$$\sigma_m \cdot 2\pi \cdot R \cdot \delta = P \tag{1}$$

Thành phần hình chiếu của áp lực lên đáy theo phương của trục bình là:

$$P = \pi R^2 p$$

Từ đó ta có : $P = \pi R^2 p = \sigma_m \cdot 2\pi \cdot R \cdot \delta$

Hay
$$\sigma_m = \frac{pR}{2\delta} \tag{2}$$

Vì thân bình là hình trụ, nên $\rho_m = \infty$; $\rho_t = R$.

Do đó từ phương trình Lapolatxơ ta tìm thấy:

$$\sigma_t = \frac{pR}{\delta} \quad (3)$$

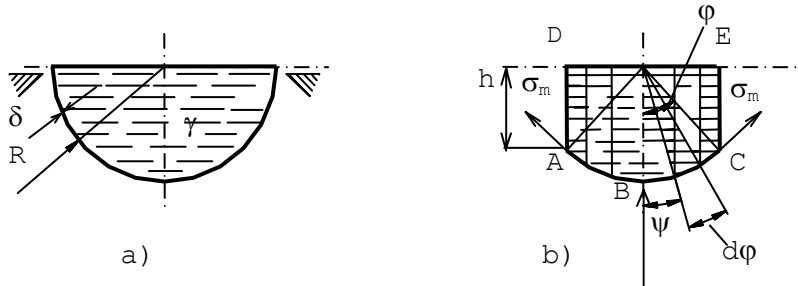
Vậy ứng suất vòng lớn gấp hai lần ứng suất kinh tuyến.

Thành phần ứng suất thứ ba xem như bằng không. Theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất, ta có điều kiện bền của vỏ trụ là:

$$\sigma_{td} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{p \cdot R}{\delta} \leq [\sigma]$$

So sánh với ví dụ 1, ta thấy bình chịu áp suất có dạng cầu là lợi hơn vì σ_{td} nhỏ hơn hai lần khi bình có độ dày như nhau.

Ví dụ 7: Thùng bán cầu bán kính R, chiều dày δ (hình 21.31) đựng đầy chất lỏng với trọng lượng riêng γ . Xác định ứng suất trong thành bình và vẽ các biểu đồ σ_m , σ_t , σ_{td} .



Hình 21.31: Sơ đồ tính ứng suất của thùng bán cầu đựng đầy chất lỏng

Bài giải : Ta dùng một mặt cắt hình nón chỏm cầu với góc 2γ (hình 21.31b) và thiết lập phương trình cân bằng cho chỏm cầu đó, thể tích ADECB được tính bởi biểu

thức:

$$V = \int_0^\varphi 2\pi R^3 \sin \psi \cos^2 \psi d\varphi$$

Từ đó :

$$V = \frac{2}{3} \pi R^3 (1 - \cos^3 \varphi)$$

Viết phương trình cân bằng tổng hình chiếu các lực lên phương thẳng đứng, ta tìm

thấy :

$$\sigma_m = \frac{\gamma R^2}{3\delta} \cdot \frac{1 - \cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi} \quad (1)$$

Sử dụng phương trình Lapolatxơ và chú ý $\rho_m = \rho_t = R$ với $p = \gamma R \cos \varphi$, ta được:

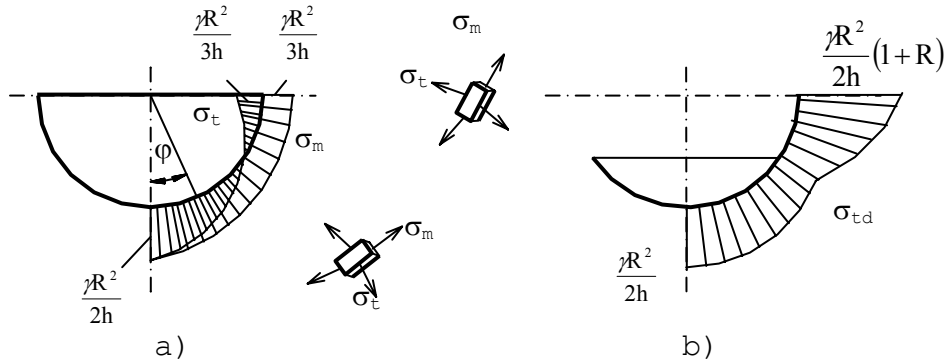
$$\sigma_t = \frac{\gamma R^2}{3h} \left[3 \cos \varphi - \frac{1 - \cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi} \right] \quad (2)$$

Các biểu đồ σ_m , σ_t được biểu diễn trên hình 21.32. Qua các biểu đồ ta thấy σ_m và σ_t ở điểm thấp nhất của bình có trị số bằng nhau. Ở điểm trên cùng có trị số tuyệt đối bằng nhau nhưng ngược dấu nhau.

Ứng suất tương đương tính theo thuyết bền của M_0 là:

$$\sigma_{td} = \sigma_1 - \alpha \sigma_3$$

Trong đó α là tỷ số giữa ứng suất nguy hiểm khi kéo và ứng suất nguy hiểm khi nén.



Hình 21.32: Biểu đồ ứng suất

- Xét ở hai miền khác nhau: miền σ_m và σ_t là ngược dấu, khi đó ở vùng phía trên ta có:

$$\sigma_{td} = \sigma_m - \alpha \sigma_t$$

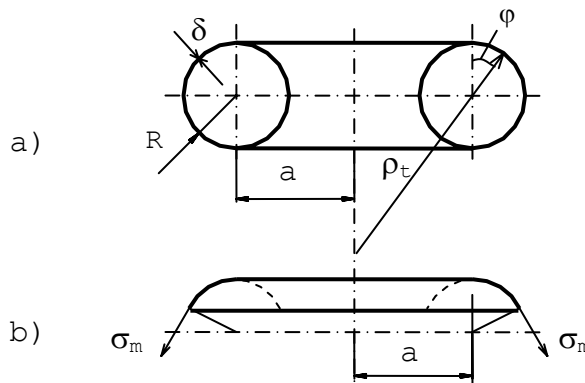
- Xét ở hai miền có σ_m và σ_t cùng dấu:

Ứng suất tương đương sẽ có trị số $\sigma_{td} = \sigma_m$

Do đó biểu đồ σ_{td} có điểm gãy khúc tại vị trí thay đổi dấu của σ_t như trên hình 21.32b. Trị số lớn nhất là:

$$\sigma_{td}^{\max} = \frac{\gamma R^2}{3h}(1 + \alpha)$$

Ví dụ 8: Xác định ứng suất trên thành ống hình xuyên bán kính \$R\$ chịu áp suất \$p\$ bên trong. Kích thước của hình xuyên được biểu diễn trên hình 21.33.



Bài giải. Sử dụng các mặt cắt vuông góc với bề mặt của hình xuyên, chia hình xuyên thành hai phần, tương tự như hình 21.33b và xét sự cân bằng của phần trên (hình 21.33b).

Thiết lập phương trình hình chiếu của các lực theo phương thẳng đứng, ta có:

$$\sigma_m \cdot 2\pi\delta(a + R \sin \varphi) \sin \varphi = p\pi[(a + R \sin \varphi)^2 - a^2]$$

$$\sigma_m = \frac{pR(2a + R \sin \varphi)}{2h(a + R \sin \varphi)}$$

Từ phương trình Lapolatxơ với $\rho_m=R$ và $\rho_t = \frac{a + R \sin \varphi}{\sin \varphi}$, ta tìm được:

$$\sigma_t = \frac{pR}{2\delta}$$

Ứng suất σ_m là cực đại khi $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$$\sigma_m^{\max} = \frac{pR}{2\delta} \cdot \frac{2a - R}{a - R}$$

Vì σ_m và σ_t có cùng dấu, vậy ứng suất tương đương theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất :

$$\sigma_{td} = \sigma_m^{\max} = \frac{pR}{2\delta} \cdot \frac{2a - R}{a - R}$$

Ví dụ 9: Thùng chứa hình nón đựng đầy chất lỏng (xem hình 21.34) có trọng lượng riêng là γ . Xác định ứng suất trên thành bình.

Bài giải: Dùng mặt cắt là mặt nón vuông góc với bề mặt của bình. Xét sự cân bằng của phần dưới. Viết phương trình cân bằng tổng hình chiếu lên phương thẳng đứng, ta có :

$$2\pi \cdot y \operatorname{tg}\alpha \cdot \delta \cdot \sigma_m \cos\alpha = Q + Q_1 \quad (1)$$

Q là trọng lượng của khối chất lỏng trong hình chóp và Q_1 là trọng lượng của cột chất lỏng phía trên hình chóp. Ta có :

$$Q = \frac{\pi \cdot y^3 \operatorname{tg}^2\alpha}{3} \gamma$$

$$\text{và } Q_1 = \gamma \cdot \pi \cdot y^2 \cdot \operatorname{tg}^2\alpha (h - y) \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta tìm thấy:

$$\sigma_m = \frac{\gamma \cdot y \cdot \operatorname{tg}\alpha (3h - 2y)}{6} \quad (3)$$

Sử dụng phương trình Lapoátxơ với chú ý

$\rho_m = \infty$, $\rho_t = \frac{y \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}$ và $p = \gamma(h - y)$, ta tìm thấy:

$$\sigma_t = \frac{\gamma(h - y)}{\delta} \cdot \frac{y \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha} \quad (4)$$

Lấy đạo hàm theo y , ta sẽ tìm thấy số cực đại của σ_t tại $y = \frac{h}{2}$. Trị số đó là:

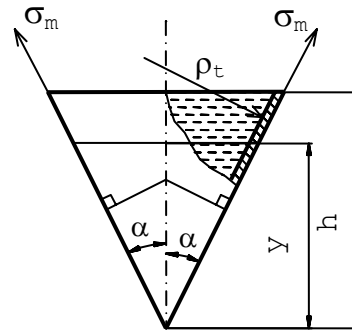
$$\sigma_t^{\max} = \frac{\gamma h^2}{4\delta} \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha} \quad (5)$$

Tương tự ta có thể tìm thấy σ_m^{\max} ở tại $y = \frac{3}{4}h$ và có trị số là:

$$\sigma_m^{\max} = \frac{3}{16} \cdot \frac{\gamma h^2}{\delta} \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha} \quad (6)$$

σ_m và σ_t tại đỉnh của hình chóp là bằng không.

Ví dụ 10: Để có thể thực hiện các công tác ở sâu dưới nước người ta đã sử dụng một vỏ mỏng hình parabolôit tròn xoay và thả xuống độ sâu như hình vẽ. Vẽ biểu đồ ứng suất bên trong thành vỏ. Cho biết $a=1\text{m}$, $b=2\text{m}$ và $\delta=3\text{mm}$.



Hình 21.34: Sơ đồ tính ứng suất của thùng hình nón chứa đầy chất lỏng

Bài giải: Xác định hệ trục tọa độ oxy như hình 21.35. Dạng kinh tuyến của mặt parabolôit được biểu diễn bởi phương trình:

$$y = \frac{b}{a}x^2 \quad (1)$$

Thể tích phần trên của vỏ tính đến mức y là:

$$V = \int_0^y \pi \cdot x^2 dy = \frac{\pi a^2}{2b} y^2 \quad (2)$$

Thể tích phía trong của vỏ là: $V_B = \frac{\pi}{2} a^2 \cdot b \quad (3)$

Bây giờ ta hãy xác định mức chất lỏng ở bên trong của vỏ. Nghĩa là ta phải xác định y_1 và H_1 (hình 21.35).

Áp suất p của không khí bên trong vỏ là bằng áp suất của chất lỏng ở độ sâu H_1 . Nghĩa là :

$$p = \gamma \cdot H_1 + P_a \quad (4)$$

p_a là áp suất khí quyển ở mặt thoáng bên trên của chất lỏng. Mặt khác p được tính theo định luật Bôi-Mariôt như sau:

$$p = p_a \cdot \frac{V_B}{V_1} \quad (5)$$

V_1 là thể tích tương ứng với y_1 , do đó ta có:

$$p = p_a \cdot \frac{b^2}{y_1^2} \quad (6)$$

Theo (4) ta có :

$$p_a \cdot \frac{b^2}{y_1^2} = \gamma(H - b + y_1) + p_a$$

Từ đó ta có :

$$y_1^3 + y_1^2 \left(\frac{p_a}{\gamma} + H - b \right) = \frac{p_a}{\gamma} b^2$$

Với $p_a = 1 \text{atm}$ và các kích thước đã cho như trên hình vẽ, ta có:

$$y_1^3 + 1500y_1^2 = 4 \cdot 10^7$$

Từ đó ta có:

$$y_1 = 155,5 \text{cm}$$

$$p = p_a \cdot \frac{b^2}{y_1^2} = 16,55 \text{N/cm}^2$$

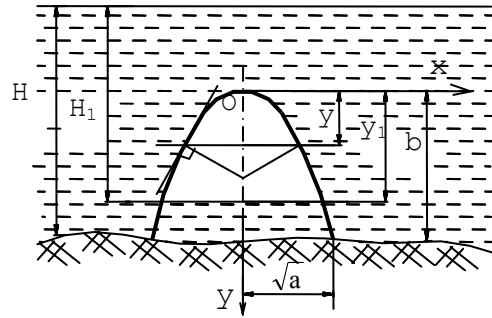
Sử dụng một mặt cắt hình nón vuông góc với mặt vỏ và xét sự cân bằng của phần trên (hình 21.35). Lực theo chiều trục đang tác dụng lên phần đang xét gồm có:

- Áp lực trong của vỏ. Trị số là: $p\pi x^2$
- Trọng lượng của cột chất lỏng ở phía trên của vỏ:

$$-\gamma \left[\pi x^2 (H - b + y) - \frac{\pi a^2}{2b} y^2 \right]$$

- Áp lực của khí quyển: $-p_a \pi x^2$

Từ đó ta có phương trình cân bằng:



Hình 21.35: Vỏ mỏng parabolôit thả sâu trong nước

$$\sigma_m \cdot 2\pi x \cdot \delta \sin \theta = (p - p_a) \cdot \pi \cdot x^2 - \gamma \cdot \left[\pi x^2 (H - b + y) - \frac{\pi a^2}{2b} y \right] \quad (7)$$

Ta phải xác định $\sin \theta$.

Để dàng nhận thấy rằng $\text{tg} \theta = y'$. Vậy $\sin \theta = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$

Do đó :

$$\sin \theta = \frac{2b}{a} \sqrt{\frac{y}{b} \left[1 + \frac{4b^2}{a^2} - \frac{y}{b} \right]}^{-\frac{1}{2}} \quad (8)$$

Để tính σ_t ta phải xác định các bán kính cong ρ_m và ρ_l

Ta có :

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Do đó :

$$\rho_m = \frac{a^2}{2b} \left[1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b} \right]^{\frac{3}{2}} \quad (9)$$

$$\rho_l = \frac{x}{\sin \theta} = \frac{a^2}{2b} \left[1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

Áp suất tác dụng lên vỏ tại điểm đang xét là:

$$p^* = p - [p_a + \gamma(H - b + y)] \quad (11)$$

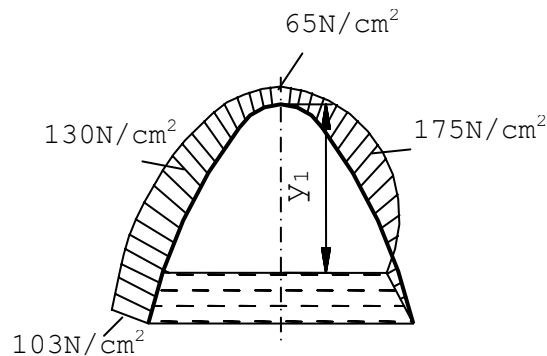
Sau khi thay (8) vào (7) rồi đưa vào phương trình Lapolatxơ cùng với (9), (10), (11), ta tìm thấy:

$$\sigma_m = \frac{a^2}{4b\delta} \left[p - p_a - \gamma b \left(\frac{H}{b} - 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{b} \right) \right] \left(1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_t = \frac{a^2}{4b\delta} \left\{ 2 \left[p - p_a - \gamma b \left(\frac{H}{b} - 1 + \frac{y}{b} \right) \right] - \frac{p - p_a - \gamma b \left(\frac{H}{b} - 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{b} \right)}{1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b}} \right\} \left(1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Các công thức đó chỉ dùng khi y biến thiên trong khoảng từ 0 đến y_1 .

Nếu $y > y_1$ thì $p^* = 0$ vì áp suất ở bên trong và bên ngoài là như nhau. Song các thành phần lực mà ta tính toán ở trên là không thay đổi. Trị số của σ_m và σ_t sẽ là:



Hình 21.36: Sơ đồ ứng suất

$$\sigma_m = \frac{a^2}{4b} \cdot \frac{y_1}{y} \left[p - p_a - \gamma b \left(\frac{H}{b} - 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_1}{b} \right) \right] \left(1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_t = -\frac{a^2}{4b\delta} \cdot \frac{y_1}{y} \left[p - p_a - \gamma b \left(\frac{H}{b} - 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_1}{b} \right) \right] \left(1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Biểu đồ ứng suất được biểu diễn như trên hình 21.36.

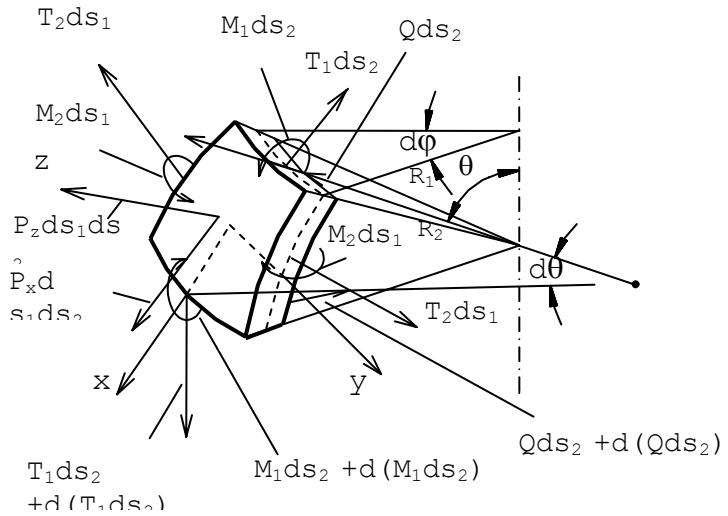
21.4. LÝ THUYẾT TỔNG QUÁT VỀ VỎ ĐỐI XỨNG

21.4.1. Phương trình cân bằng.

Trong trường hợp tổng quát, ta phải để ý đến sự phân bố không đều của σ_m và σ_t theo chiều dày của vỏ. Khi đó trên các mặt cắt của phân tố, ngoài các lực căng còn có các mô men uốn. Lí thuyết vỏ có tính đến các mô men này được gọi là lí thuyết mô men.

Phân tố được vẽ lại trên hình 21.37.

Trên hình vẽ đó ta dùng chỉ số 1 và 2 để chỉ các phương kinh tuyến và vĩ tuyến. Gọi T_1, T_2 và M_1, M_2 là các ứng lực và mô men uốn trên đơn vị độ dài của các cung. Vì lí do đối xứng T_2 và M_2 có trị số như nhau còn T_1 và M_1 có thể có những trị số khác nhau khi đi từ vĩ tuyến này sang vĩ tuyến khác. Do M_1 có sự biến thiên nên trên các mặt cắt phải có lực cắt Q và $Q+dQ$ (Q là lực cắt trên đơn vị chiều dài). Ta cũng giả thiết rằng phần tải trọng đặt trên vỏ là đối xứng qua trục vỏ. Một cách tổng quát có thể phân tải trọng đó thành hai thành phần: thành phần theo phương pháp tuyến p_z và thành phần theo phương tiếp tuyến của đường kinh tuyến đi qua điểm đang xét p_x . (Hệ trục oxy được xác định như hình vẽ).



Hình 21.37: Sơ đồ phân tố chịu lực tổng quát

Thiết lập các phương trình cân bằng.

Chiếu các lực lên phương trục z ta có phương trình:

$$T_2 \cdot ds_1 \cdot \frac{ds_2}{R_2} + T_1 \cdot ds_2 \cdot \frac{ds_1}{R_1} + d(Qds_2) = p_z \cdot ds_1 \cdot ds_2$$

Trong đó: R_1 và R_2 là bán kính cong của đường kinh tuyến và đường vĩ tuyến.

Vì $ds_1 = R_1 \cdot d\theta$ và $ds_2 = R_2 \cdot \sin \theta d\phi$

Chú ý góc $d\phi$ là góc của hai mặt cắt kinh tuyến của phân tố.

Nên phương trình được viết lại dưới dạng:

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + \frac{1}{R_1 R_2 \sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} (QR_2 \sin \theta) = p_z \quad (21-32)$$

Chiếu tất cả các lực xuống trục đối xứng của vỏ, ta có phương trình:

$$T_1 ds_2 \sin \theta - [T_1 ds_2 + d(T_1 ds_2)] \sin(\theta + d\theta) + Q ds_2 \cos \theta - [Q ds_2 + d(Q ds_2)] \cos(\theta + d\theta) + p_z ds_1 ds_2 \cos \theta - p_x ds_1 ds_2 \sin \theta = 0$$

Hay: $\frac{d}{d\theta} [R_2 \sin \theta (T_1 \sin \theta + Q \cos \theta)] = R_1 R_2 \sin \theta (p_z \cos \theta - p_x \sin \theta)$ (21-33)

Lấy tổng mô men của các lực đối với trục y ta được:

$$Q ds_1 ds_2 - d(M_1 ds_2) + M_2 ds_1 \cos \theta \cdot d\varphi = 0$$

Hay: $Q \cdot R_1 R_2 \sin \theta - \frac{d}{d\theta} (M_1 \cdot R_2 \sin \theta) + M_2 R_1 \cos \theta = 0$ (21-34)

Vì lí do đối xứng nên các phương trình khác hoàn toàn thoả mãn.

Lấy tích phân phương trình (21-33) ta được:

$$R_2 \sin \theta (T_1 \sin \theta + Q \cos \theta) = C + \int R_1 R_2 \sin \theta (p_z \cos \theta - p_x \sin \theta) d\theta$$
 (21-35)

Gọi r là khoảng cách từ điểm đang xét đến trục đối xứng, ta có các liên hệ sau đây:

$$R_1 d\theta = ds_1 \text{ và } R_2 \sin \theta = r$$
 (21-36)

Thay (21-36) vào (21-35) ta sẽ được biểu thức thể hiện sự cân bằng của một phần vỏ (xem hình 21.38). Hằng số C là tùy thuộc lực dọc trục đặt lên vỏ. Thật vậy, xét sự cân bằng của phần vỏ ta có:

$$(T_1 \sin \theta + Q \cos \theta) 2\pi r = P_0 + \int (p_z \cos \theta - p_x \sin \theta) 2\pi r ds_1$$

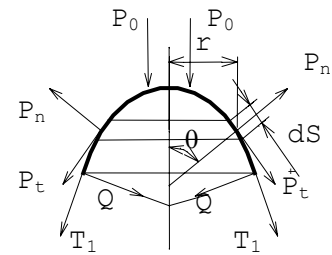
Trong đó $p_0 = 2\pi C$ là lực tập trung dọc theo trục của vỏ. Nếu thay (21-36) vào đây ta lại được biểu thức (21-35)

Để tiện trong quá trình tính toán sau này, chúng ta sử dụng các biểu thức sau đây:

$$F(\theta) = R_2 \sin \theta (T_1 \sin \theta + Q \cos \theta)$$

hay
(21-37)

$$F(\theta) = C + \int R_1 R_2 \sin \theta (p_z \cos \theta - p_x \sin \theta) d\theta$$



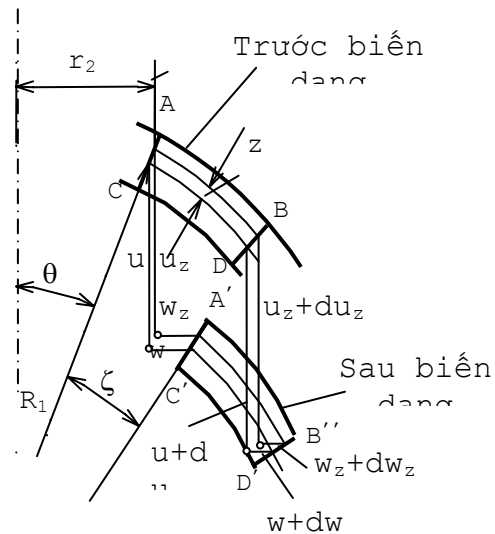
Hình 21.38: Trạng thái chịu lực của phần vỏ

Trong các trường hợp thường gặp hàm $F(\theta)$ có thể xác định từ điều kiện cân bằng, vì vậy hàm đó được gọi là hàm tải trọng.

21.4.2. Phương trình tương thích giữa chuyển vị và biến dạng.

Khảo sát đoạn cong AB nằm trên mặt kinh tuyến của vỏ và cách mặt trung gian một khoảng cách z. Do sự biến dạng của vỏ, đoạn cong đó có các chuyển vị. Gọi A'B' là vị trí mới của AB sau biến dạng xem hình 21.39.

Kí hiệu u_z và w_z là các thành phần chuyển vị của một điểm nào đó trên AB theo chiều trục và chiều vuông góc với trục trên mặt kinh tuyến. Gọi C và D là chân các pháp tuyến của một mặt trung gian đi qua A và B, u và w là thành phần chuyển vị của các điểm trên CD và ζ



là góc xoay của các pháp tuyến sau biến dạng, ta có các biểu thức tương quan $A'B'$, $C'D'$; và AB , CD như sau:

$$A'B' = AB(1 + \varepsilon_{1z})$$

$$C'D' = CD(1 + \varepsilon_1)$$

Trong đó ε_{1z} và ε_1 là các biến dạng của AB và CD .

Xét đa giác $CDC'D'$ (hình 21.39), chiếu đa giác đó xuống phương ngang và phương thẳng đứng. Ta có:

$$w + CD(1 + \varepsilon_1)\cos(\theta + \zeta) - w + dw - CD\cos\theta = 0$$

$$u + CD(1 + \varepsilon_1)\sin(\theta + \zeta) - u - du - CD\sin\theta = 0$$

Chú ý ζ là nhỏ so với θ và $CD = R_1 d\theta$, ta sẽ được:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw}{R_1 d\theta} &= -\zeta \sin\theta + \varepsilon_1 \cos\theta \\ \frac{du}{R_1 d\theta} &= \zeta \cos\theta + \varepsilon_1 \sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (21-38)$$

Tương tự ta có thể viết:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw_z}{(R_1 + z)d\theta} &= -\zeta \sin\theta + \varepsilon_{1z} \sin\theta \\ \frac{du_z}{(R_1 + z)d\theta} &= \zeta \cos\theta + \varepsilon_{1z} \sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (21-39)$$

Bây giờ chiếu đa giác $AA'CC'$ lên phương ngang và phương thẳng đứng. Ta được:

$$\left. \begin{aligned} w_z &= w + z\zeta \cos\theta \\ u_z &= u + z\zeta \sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (21-40)$$

Thay w_z vào (21-39) sẽ được:

$$\frac{dw}{(R_1 + z)d\theta} + \frac{z}{R_1 + z} \cdot \frac{d(\theta \cos\theta)}{d\theta} = \zeta \sin\theta + \varepsilon_{1z} \cos\theta$$

Dựa vào biểu thức đầu của (21-38) ta có thể khử w trong biểu thức này và sẽ được:

$$\varepsilon_{1z} = \varepsilon_1 + \frac{z}{R_1 + z} \cdot \frac{d\zeta}{d\theta}$$

Vì z là vô cùng bé, nên có thể viết lại:

$$\varepsilon_{1z} = \varepsilon_1 + \frac{z}{R_1} \cdot \frac{d\zeta}{d\theta} \quad (21-41)$$

Như vậy ta có được biến dạng theo phương kính tuyến.

Biến dạng theo phương vĩ tuyến ε_{2z} được xác định bằng độ giãn của một đường tròn qua A bán kính r :

$$\varepsilon_{2z} = \frac{w_z}{(R_2 + z)\sin\theta}$$

Đối với điểm $\varepsilon_2 = \frac{w}{R_2 \sin\theta} \quad (21-42)$

Với biểu thức (21-40) có thể viết lại:

$$\varepsilon_{2z} = \varepsilon_2 + z \frac{\zeta}{R_2} \operatorname{ctg}\theta \quad (21-43)$$

Thay trị số w từ (21-42) và biểu thức đầu (21-38) ta có:

$$R_1 \zeta = \operatorname{ctg}\theta (R_1 \varepsilon_1 - R_2 \varepsilon_2) - \frac{d}{d\theta} (R_2 \varepsilon_2) \quad (21-44)$$

21.4.3. Tương quan giữa ứng lực và biến dạng.

Theo định luật Hooke các tương quan giữa ứng suất và biến dạng là như sau:

$$\sigma_{1z} = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{1z} + \mu \varepsilon_{2z})$$

$$\sigma_{2z} = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{2z} + \mu \varepsilon_{1z})$$

Thay các biểu thức (21-41) và (21.43) vào ta được:

$$\sigma_{1z} = \frac{E}{1-\mu^2} \left[(\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2) + z \left(\frac{1}{R_1} \frac{d\zeta}{d\theta} + \mu \frac{\zeta}{R_2} \operatorname{ctg}\theta \right) \right]$$

$$\sigma_{2z} = \frac{E}{1-\mu^2} \left[(\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1) + z \left(\frac{\zeta}{R_2} \operatorname{ctg}\theta + \mu \frac{1}{R_1} \frac{d\zeta}{d\theta} \right) \right]$$

Từ đó dễ dàng xác định được các thành phần ứng lực và mô men nội lực:

$$T_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{1z} dz ; \quad T_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{2z} dz$$

$$M_1 = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{1z} \cdot z \cdot dz ; \quad M_{21} = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{2z} \cdot z \cdot dz$$

Dấu trừ để chỉ mô men uốn làm căng thớ ngoài.

Sau khi tính các tích phân, chúng ta có:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2) \\ T_2 &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1) \end{aligned} \right\} \quad (21-45)$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -D \left[\frac{1}{R_1} \frac{d\zeta}{d\theta} + \mu \frac{\zeta}{R_2} \operatorname{ctg}\theta \right] \\ M_2 &= -D \left[\frac{\zeta}{R_2} \operatorname{ctg}\theta + \mu \frac{1}{R_1} \frac{d\zeta}{d\theta} \right] \end{aligned} \right\} \quad (21-46)$$

Trong đó :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

Từ các phương trình (21-45), ta tìm thấy:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{Eh}(T_1 - \mu T_2) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{Eh}(T_2 - \mu T_1) \end{aligned} \right\} \quad (21-47)$$

Nói tóm lại ta được tám phương trình (21-32); (21-33); (21-34); (21-44); (21-46); (21-47) với tám ẩn số T_1 ; T_2 ; M_1 ; M_2 ; Q ; ζ ; ε_1 và ε_2 . Để giải phương trình trên ta tìm cách đưa hệ về dạng đối xứng.

21.4.4. Đưa hệ phương trình về dạng đối xứng.

Thay trị số ε_1 và ε_2 từ (21-47) vào (21-44), ta có:

$$ER_1\zeta = \text{ctg}\theta \left[\frac{T_1}{h}(R_1 + \mu R_2) - \frac{T_2}{h}(R_2 + \mu R_1) \right] - \frac{d}{d\theta} \left[\frac{R_2}{h}(T_2 - \mu T_1) \right] \quad (21-48)$$

Bây giờ quay trở về hệ phương trình cân bằng. Sử dụng biểu thức thứ hai (21-37), phương trình (21-35) được viết lại dưới dạng:

$$T_1 = \frac{F(\theta)}{R_2 \sin^2 \theta} - Q \text{ctg}\theta$$

Thay biểu thức đó vào (21-32), ta được:

$$T_2 = p_z R_2 - \frac{F(\theta)}{R_1 \sin^2 \theta} - \frac{1}{R_1} \cdot \frac{d}{d\theta} (Q \cdot R_2)$$

Sử dụng các kí hiệu:

$$\frac{d}{d\theta} (*) = (*)' ; QR_2 = V \quad (21-49)$$

Sau khi thay T_1 và T_2 vào (21-48), ta có:

$$\begin{aligned} EhR_1\zeta &= \frac{R_2}{R_1} V'' + \left[\frac{R_2}{R_1} \text{ctg}\theta + \left(\frac{R_2}{R_1} \right)' \right] \cdot V' - \frac{R_1}{R_2} \text{ctg}'\theta - \frac{h'}{h} \frac{R_2}{R_1} \cdot V' - \\ &- \mu V \left[\text{ctg}^2\theta + h \left(\frac{\text{ctg}\theta}{h} \right)' \right] + \frac{F(\theta)}{\sin^2 \theta} \left\{ \left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{R_2}{R_1} \right) \cdot \text{ctg}\theta + h \left(\frac{R_2}{hR_1} + \frac{\mu}{h} \right)' \right\} - \\ &- h \left(\frac{R_2^2 \cdot p_z}{h} \right) - (R_2 + \mu R_1) \cdot R_2 p_x \end{aligned}$$

Thay trị số của M_1, M_2 từ (21-46) vào (21-34), ta được:

$$\begin{aligned} \frac{R_2}{R_1} \theta'' + \left[\frac{R_2}{R_1} \text{ctg}\theta + \left(\frac{R_2}{R_1} \right)' \right] \cdot \zeta - \frac{R_1}{R_2} \zeta \cdot \text{ctg}^2\theta + 3 \frac{h'}{h} \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot \zeta' + \\ + \frac{\mu}{h} (3h' \text{ctg}\theta - h) \zeta = - \frac{R_1}{D} \cdot V \end{aligned}$$

Hai phương trình cuối cùng chỉ chứa hai ẩn số V và ζ .

$$\text{Kí hiệu : } L(*) = \frac{R_2}{R_1} (*)'' + \left[\frac{R_2}{R_1} \text{ctg}\theta + \left(\frac{R_2}{R_1} \right)' \right] (*)' - \frac{R_1}{R_2} \text{ctg}^2\theta (*) \quad (21-50)$$

Ta có thể viết chúng gọn lại như sau:

$$\left. \begin{aligned} L(V) + \mu V + \frac{h'}{h} \left(\mu V \operatorname{ctg} \theta - \frac{R_2}{R_1} V' \right) &= EhR \cdot \zeta + \phi(\theta) \\ L(\zeta) - \mu \zeta + \frac{3h'}{h} \left(\mu \zeta \operatorname{ctg} \theta + \frac{R_2}{R_1} \zeta' \right) &= -\frac{R_1}{R} \end{aligned} \right\} \quad (21-51)$$

$$\text{Trong đó : } \phi(\theta) = h \left(\frac{R_2^2 p_z}{h} \right)' + (R_2 + \mu R_1) R_2 p_x - \frac{F(\theta)}{\sin^2 \theta} \left\{ \left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{R_2}{R_1} \right) \operatorname{ctg} \theta + h \left(\frac{R_2}{h R_1} + \frac{\mu}{h} \right) \right\}' \quad (21-52)$$

Đó là dạng tổng quát của vỏ mỏng tròn xoay tính với lý thuyết có mô men. Đôi khi θ được thay bằng biến số r (r là khoảng cách từ điểm trên mặt trung gian đến trục đối xứng), các phương trình sẽ có dạng đơn giản hơn một ít vì toán tử $L(*)$ viết gọn hơn, song viết dưới dạng đó phương trình sẽ rất khó giải với những điểm đặc biệt khi $\theta = \pi/2$. Giải hệ trên ta sẽ tìm thấy ζ và V , do đó nội lực, biến dạng và các chuyển vị u và w được xác định. Thực vậy:

$$\begin{aligned} M_1 &= -D \left[\frac{1}{R_1} \frac{d\zeta}{d\theta} + \mu \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_2} \cdot \zeta \right] \\ M_2 &= -D \left[\frac{1}{R_2} \operatorname{ctg} \theta + \mu \frac{1}{R_1} \cdot \frac{d\zeta}{d\theta} \right] \\ Q &= \frac{V}{R_2} \end{aligned}$$

Và như ở trên ta đã có:

$$T_1 = \frac{F(\theta)}{R_2 \sin^2 \theta} - \frac{V}{R_2} \operatorname{ctg} \theta$$

$$\text{và} \quad T_2 = p_z R_z - \frac{F(\theta)}{R_1 \sin^2 \theta} - \frac{V}{R_1} \cdot \frac{dV}{d\theta}$$

Cuối cùng từ (21-47) nhận được:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{Eh} \left[\frac{F(\theta)}{R_2 \sin^2 \theta} - \frac{V}{R_2} \operatorname{ctg} \theta - \mu \left(p_z R_z - \frac{F(\theta)}{R_1 \sin^2 \theta} - \frac{1}{R_1} \cdot \frac{dV}{d\theta} \right) \right] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{Eh} \left[p_z R_z - \frac{F(\theta)}{R_1 \sin^2 \theta} - \frac{1}{R_1} \cdot \frac{dV}{d\theta} - \mu \left(\frac{F(\theta)}{R_2 \sin^2 \theta} - \frac{V}{R_2} \operatorname{ctg} \theta \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (21-53)$$

Các thành phần chuyển vị u và w được xác định từ (21-39) như sau:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw}{d\theta} &= R_1 (\varepsilon_1 \cos \theta - \zeta \sin \theta) \\ \frac{du}{d\theta} &= R_1 (\varepsilon_1 \sin \theta + \zeta \cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (21-54)$$

Các thành phần ứng suất sẽ có trị số là:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1z} &= \frac{T_1}{h} + z \cdot \frac{12M_1}{h^3} \\ \sigma_{2z} &= \frac{T_2}{h} + z \cdot \frac{12M_2}{h^3} \end{aligned} \right\} \quad (21-55)$$

Khi độ dày h là hằng số thì các phương trình (21-51) và (21-52) sẽ có dạng đơn giản như sau:

$$\left. \begin{aligned} L(V) + \mu V &= Eh \cdot R_1 \zeta + \phi(\theta) \\ L(\zeta) - \mu \zeta &= -\frac{R_1}{D} V \end{aligned} \right\}$$

Trong đó:

$$\phi(\theta) = h \left(\frac{R_2^2 p_z}{h} \right)' + (R_2 + \mu R_1) R_2 p_x - \frac{F(\theta)}{\sin^2 \theta} \left\{ \left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{R_2}{R_1} \right) \text{ctg} \theta + \left(\frac{R_2}{R_1} \right)' \right\}$$

21.4.5. Điều kiện biên.

Tích phân hệ phương trình (21-51) ta có bốn hằng số tích phân. Các hằng số đó đều xác định từ các điều kiện biên của bài toán. Nghĩa là phụ thuộc vào điều kiện cố định ở biên cũng như cách chịu lực hoặc chuyển vị ở biên.

Ta xét một số trường hợp cụ thể sau đây:

a. Ở biên của vỏ chịu ngàm cứng, (hình 21.40):

Ta có hai điều kiện sau đây:

- Góc xoay của pháp tuyến của mặt trung gian là bằng không $\zeta=0$.
- Chuyển vị theo phương hướng kính là bằng không $w=0$.

Điều đó dẫn đến điều kiện (công thức 21-42):

$$\varepsilon_2 = \frac{w}{R_2 \sin \theta} = 0$$

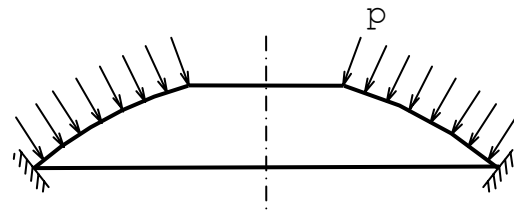
Hai điều kiện khác được xác định từ biên thứ hai của vỏ.

Chúng ta cũng chú ý rằng, với liên kết ngàm chuyển vị ζ theo chiều trục cũng bằng không. Để có được trị số ζ chúng ta phải tích phân phương trình thứ hai của 21-54, như vậy trong phương trình:

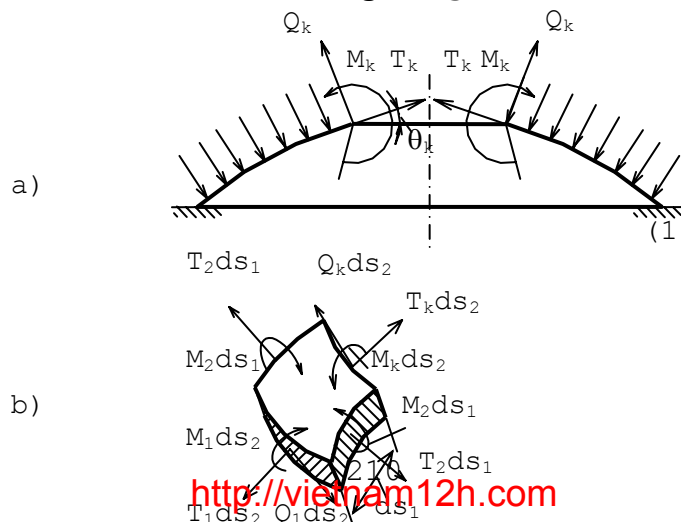
$$u=0$$

Ta có thêm hằng số tích phân mới và sẽ trở thành hệ 5 phương trình với 5 ẩn số.

b. Ở các biên của vỏ chịu tải trọng T_k , Q_k và mô men M_k (hình 21.41).



Hình 21.40:
Vỏ chịu ngàm cứng ở biên



Xét sự cân bằng của một phân tử ngay sát biên ta được:

$$T_1 = T_k, \quad Q = Q_k, \quad M_1 = M_k$$

Song hai điều kiện đầu không phải là các phương trình độc lập. Nếu một điều kiện được thoả mãn thì điều kiện thứ hai cũng thoả mãn và hàm $F(\theta)$ từ biểu thức (21-37) sẽ được xác định. Thực vậy, với phân tử mà ta đã xét trước đây bây giờ được viết lại như sau:

$$T_1 \sin \theta_k + Q \cos \theta_k = T_k \sin \theta_k + Q_k \cos \theta_k$$

Vậy nếu $T_1 = T_k$ thì $Q = Q_k$, do đó điều kiện biên chỉ còn lại hai điều kiện:

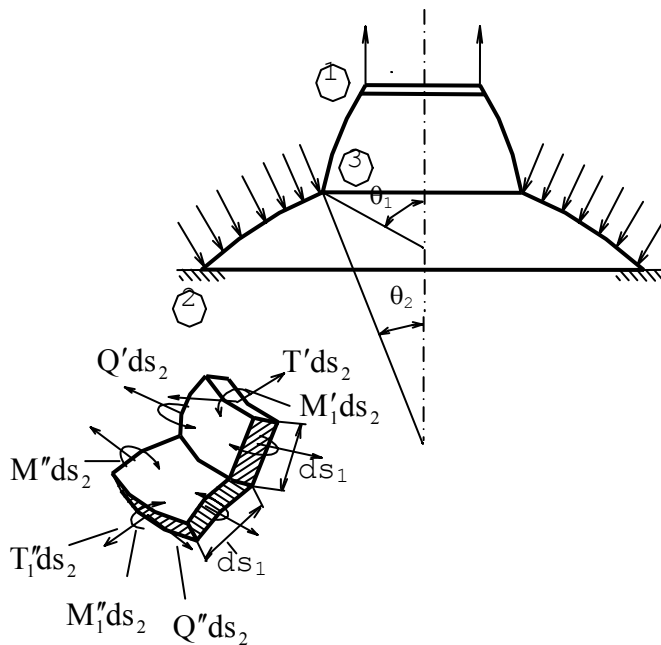
$$Q = Q_k \text{ và } M_1 = M_k$$

Nếu biên giới của vỏ là tự do thì điều kiện biên sẽ là:

$$Q_1 = 0 \text{ và } M_1 = 0$$

c. Trường hợp hai vỏ tiếp nối nhau, hình 21.42a.

Khi có hai vỏ nối nhau, số hằng số tích phân phải xác định là tám. Ta phải xác



Hình 21.42: hai vỏ nối tiếp nhau (a) và phân tử chịu lực được tách ra từ điểm tiếp giáp (b)

định tám phương trình để xác định tám hằng số đó. Bốn phương trình được thiết lập từ các điều kiện ở các biên riêng biệt, còn bốn phương trình khác được thiết lập từ điều kiện tiếp giáp giữa hai vỏ. Xét phân tử được tách ra từ điểm tiếp giáp (hình 21.42b).

Giả sử $ds'_1 \rightarrow 0$, đồng thời với ds''_1 , từ điều kiện cân bằng ta được:

$$M'_1 = M''_1$$

Nếu chiếu các lực xuống trục của vỏ ta được điều kiện để chọn hàm $F(\theta)$. Điều kiện thứ hai có được khi chiếu tất cả các lực xuống một phương nào

đó, ví dụ theo phương của Q' chẳng hạn.

Khi đó:
$$Q' = Q'' \sin(\theta_1 - \theta_2) - T'' \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

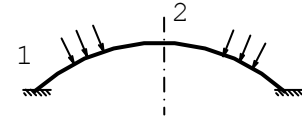
Như vậy ta đã có hai phương trình. Hai phương trình khác được xác định từ điều kiện chuyển vị hoặc biến dạng của vỏ. Tại điểm tiếp giáp ta phải có:

$$\zeta' = \zeta''; \quad w' = w''; \quad (\varepsilon'_2 = \varepsilon''_2)$$

Thành phần chuyển vị u như trên đã nói là không cần xét đến.

d. Vỏ trụ kín.

Ví dụ có vỏ trụ kín như hình 21.43, khi đó biên thứ hai có bán kính bằng không. Như vậy các hằng số tích phân có trị số tiến tới vô cùng, điều đó không đúng với thực tế, vì ứng suất và biến dạng tại đó có trị số giới nội, do đó điều kiện biên tại đỉnh (điểm 2) là: $\zeta \neq \infty; T_1 \neq \infty$



Hình 21.43:
Vỏ trụ kín

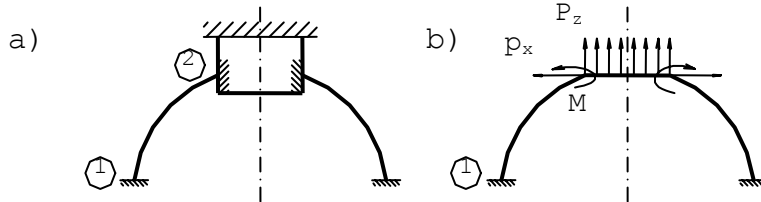
e. Vỏ trụ được cố định cả hai biên.

Khi đó nếu biết các phản lực ở một biên thì mới xác định được hàm $F(\theta)$ từ điều

kiện cân bằng. Trong nhiều trường hợp như các ví dụ trên hình 21.44 ta chưa có các phản lực tại các biên, do đó để xác định $F(\theta)$ ta phải có các điều kiện khác.

Ta cũng gọi loại bài toán đó là bài toán siêu tĩnh.

Việc xác định điều kiện biên của bài toán siêu tĩnh cũng tiến hành tương tự như hệ siêu tĩnh. Trên một biên nào đó của vỏ, ta đặt các lực p thay cho phản lực của gối tựa và tính $F(\theta)$ theo p (xem hình 21.44b).



Hình 21.44: a) Vỏ trụ được cố định cả hai biên
b) Sơ đồ tương đương

Sau đó p được xác định từ điều kiện chuyển

vị u theo chiều trục tại các điểm trên biên là bằng không. Như vậy ta có sáu hằng số tích phân phải xác định: [bốn hằng số tích phân của hệ phương trình (21-51), một hằng số tích phân khi lấy tích phân phương trình thứ hai của (21-54) và trị số của p], song ta có sáu điều kiện biên như sau. Ví dụ vỏ trên hình 21.45.

Trên biên 1 ta phải có:

$$\zeta = 0; \varepsilon_2 = 0; u = 0$$

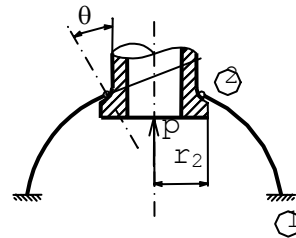
Trên biên 2:

$$M_1 = 0; Q = \frac{p}{2\pi r_2} \cos \theta; u = 0$$

Vỏ trên hình 21.45.

Trên biên 1: $\zeta = 0; \varepsilon_2 = 0; u = 0$

Trên biên 2: $\zeta = 0; \varepsilon_2 = 0; u = 0$



Hình 21.45:
Sơ đồ tính toán

21.5. ỨNG SUẤT UỐN TRONG VỎ TRỤ CHỊU SUẤT BÊN TRONG.

ÁP

Ở phần trên chúng ta đã thiết lập các công thức tổng quát để tính vỏ khi kể đến các mô men uốn. Khi tính toán cho những trường hợp cụ thể như vỏ là hình chóp hay một hình cầu với chiều dày không đổi, các công thức sẽ được rút gọn hơn, song sự tính toán vẫn còn phức tạp. Với phạm vi của giáo trình không cho phép ta đưa tất cả những điều đó vào mà ở đây ta chỉ đề cập một trường hợp đơn giản nhất là vỏ trụ chịu áp lực bên trong.

Ví dụ với vỏ trụ như hình 21.46a, xét phân tố được tách ra bởi các mặt cắt qua kinh tuyến và vĩ tuyến (xem hình 21.46b).

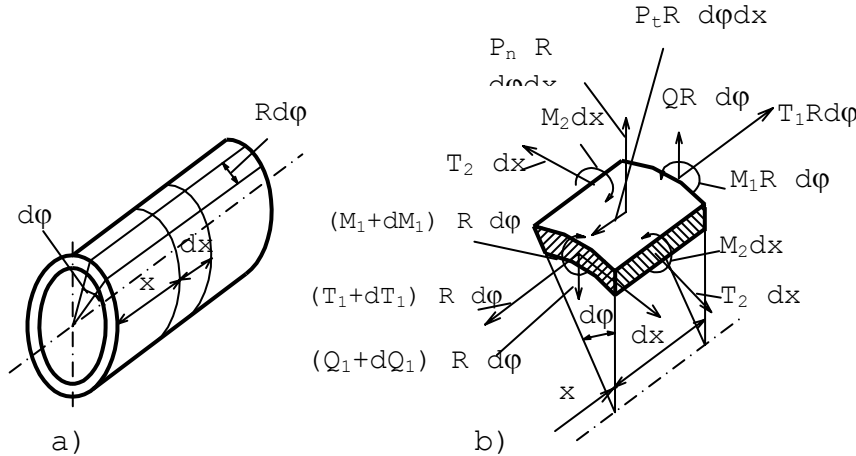
Các phương trình được rút gọn lại như sau:

- Chiều tất cả các lực xuống trục của vỏ, ta có:

$$dT_1 R d\varphi + p_1 R d\varphi dx = 0$$

- Chiều các lực xuống phương pháp tuyến:

$$-T_2 dx \cdot d\varphi + dQ \cdot R \cdot d\varphi + p_n \cdot R d\varphi \cdot dx = 0$$



Hình 21.46: Vỏ trụ chịu áp suất bên trong (a) và ứng suất uốn khi vỏ lực chịu

- Lấy tổng mô men của các lực với trục y:

$$Qdx + dM_1$$

Từ phương trình đầu ta có: $T_1 = C - \int p_1 dx$

Nếu $p_i=0$ thì T_1 là hằng số.

Từ phương trình thứ hai ta có:

$$\frac{dQ_1}{dx} = p_n - \frac{T_2}{R} \quad (21-56)$$

Phương trình thứ ba cho ta liên hệ: $\frac{dM_1}{dx} = \zeta \quad (21-57)$

Vì tính chất đối xứng nên những phương trình cân bằng khác luôn luôn thỏa mãn.

Kí hiệu w là chuyển vị theo phương bán kính và ζ là góc xoay của pháp tuyến mặt trung gian (hình 21.47), ta dễ dàng tìm thấy tương quan:

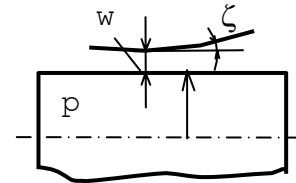
$$\frac{dw}{dx} = \zeta \quad (21-58)$$

Độ giãn dài tỉ đối của một thớ AB cách mặt trung gian một khoảng cách z do uốn gây nên là:

$$\frac{zd\zeta}{dx}$$

Độ giãn dài toàn phần của AB phải tính đến độ giãn do lực dọc trục gây ra:

$$\varepsilon_{1z} = \varepsilon_1 + z \frac{d\zeta}{dx} \quad (21-59)$$



Hình 21.47: Sơ đồ tính chuyển vị w

Trong đó: ε_1 là độ giãn tương đối tương ứng của mặt trung gian.
Biến dạng dài tỉ đối theo hướng tiếp tuyến vòng sẽ là:

$$\varepsilon_{2z} = \frac{w}{R} \quad (21-60)$$

Các biểu thức (21-59) và (21-60) thay thế cho các biểu thức (21-41) và (21-43).
Từ định luật Hooke tổng quát ta có:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{1z} + \mu\varepsilon_{2z}) = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\varepsilon_1 + \mu \frac{w}{R} + z \cdot \frac{d\zeta}{dx} \right] \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{2z} + \mu\varepsilon_{1z}) = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\mu\varepsilon_1 + \frac{w}{R} + \mu z \frac{d\zeta}{dx} \right] \end{aligned} \right\} \quad (21-61)$$

Từ đó ta dễ dàng xác định các thành phần mô men uốn và lực kéo với các biểu thức:

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 z dz ; & M_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 z dz \\ T_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 dz ; & T_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 dz \end{aligned}$$

Thay các trị số σ_1 và σ_2 vào ta có:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\left(\varepsilon_1 + \mu \frac{w}{R} \right) z + z^2 \cdot \frac{d\zeta}{dx} \right] dz \\ M_2 &= \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\left(\mu\varepsilon_1 + \frac{w}{R} \right) z + \mu z^2 \cdot \frac{d\zeta}{dx} \right] dz \\ T_1 &= \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\left(\varepsilon_1 + \mu \frac{w}{R} \right) + z \cdot \frac{d\zeta}{dx} \right] dz \\ T_2 &= \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\left(\mu\varepsilon_1 + \frac{w}{R} \right) + \mu z \cdot \frac{d\zeta}{dx} \right] dz \end{aligned}$$

Vì ε_1 , w và $\frac{d\zeta}{dx}$ không phụ thuộc vào z nên:

$$\int_{-h/2}^{h/2} dz = h ; \quad \int_{-h/2}^{h/2} z dz = 0 ; \quad \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{h^3}{12}$$

Do đó ta có:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{d\zeta}{dx} = D \cdot \frac{d\zeta}{dx} \\ M_2 &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \cdot \mu \frac{d\zeta}{dx} = \mu \cdot D \cdot \frac{d\zeta}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (21-62)$$

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\varepsilon_1 + \mu \cdot \frac{w}{R} \right) \\ T_2 &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{w}{R} + \mu\varepsilon_1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (21-63)$$

Khử ε_1 trong hai phương trình (21-63) ta tìm thấy liên hệ:

$$T_2 = \frac{Eh}{R} w + \mu \cdot T_1 \quad (21-64)$$

Từ phương trình đầu của (21-62) và từ (21-58), ta có:

$$M_1 = D \cdot \frac{d^2 w}{dx^2}$$

Thay vào các phương trình vi phân (21-57) và (21-56), ta được:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{T_2}{R} = p_n$$

Tính T_2 từ (21-64) và thay vào phương trình cuối cùng này, ta được:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2 D} w = \frac{p_n}{D} - \mu \frac{T_1}{RD}$$

Sử dụng các kí hiệu:

$$\begin{aligned} \frac{Eh}{R^2 D} &= \frac{12(1-\mu^2)}{R^2 h^2} = 4k^4 \\ k &= \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2 h^2}} \end{aligned} \quad (21-65)$$

Phương trình vi phân trên được viết dưới dạng:

$$w^{(IV)} + 4k^4 w = \frac{p_n}{D} - \frac{\mu T_1}{RD} \quad (21-66)$$

Trong đó T_1 xem như đã biết, vì đó là hai ứng lực theo chiều trục. Nếu $p_n=0$ thì T_1 được xác định từ điều kiện chịu lực ở hai gối đầu.

Khi phương trình (21.65) đã được giải, nghĩa là ta đã có w thì các thành phần mô men và nội lực khác đều được xác định. Thực vậy ta sẽ có:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= Dw'' \\ M_2 &= \mu Dw'' \\ Q &= Dw''' \end{aligned} \right\} \quad (21-67)$$

Ta dễ dàng tìm thấy các thành phần ứng suất như sau:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{T_1}{h_1} \pm \frac{6M_1}{h^2} \\ \sigma_2 &= \frac{T_2}{h} \pm \frac{6M_2}{h^2} \end{aligned} \right\} \quad (21-68)$$

Bây giờ ta đi sâu vào cách giải phương trình vi phân (21-67). Đó là phương trình vi phân tuyến tính với các hệ số là hằng số, do đó nghiệm sẽ có dạng hàm số vòng và hàm số hypecbôlich. Nghiệm của phương trình vi phân thuần nhất:

$$w^{(IV)} + 4k^4 \cdot w = 0 \quad (21-69)$$

có dạng : $w = e^{-kx} (C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + e^{kx} (C_3 \sin kx + C_4 \cos kx)$

Trong nghiệm đó ta có hai số hạng, một tắt nhanh theo x và một số hạng lại tăng lên theo x . Điều đó cho phép ta bỏ qua một số hạng và bài toán sẽ được đơn giản hơn rất

hiều. Kí hiệu w^* là một nghiệm riêng của (21-66) thì nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đó sẽ là :

$$w = e^{-kx}(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + e^{kx}(C_3 \sin kx + C_4 \cos kx) + w^* \quad (21-70)$$

Ta sẽ làm rõ cách giải bằng những ví dụ cụ thể sau đây:

Ví dụ 1: Tính ứng suất thành trên thành bình vỏ trụ đựng đầy chất lỏng như hình vẽ 21.47. Gọi trọng lượng riêng của chất lỏng là γ .

Kích thước cho như sau: $R=1m$, $h=5mm$, $H=5m$, vật liệu của vỏ bằng thép $E = 2 \cdot 10^5 N/mm^2$, $\mu = 0,3$, $\gamma = 0,01N/cm^3$

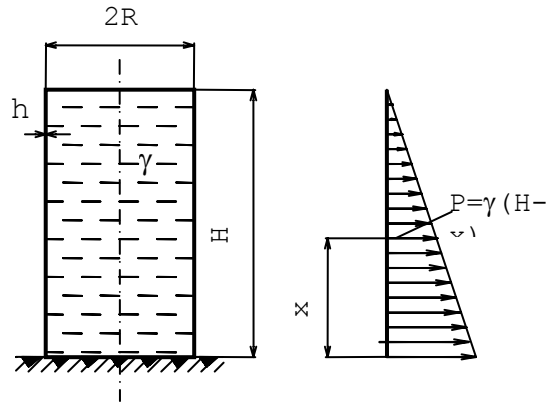
Bài giải: Gọi x là khoảng cách từ đáy đến điểm đang xét ở trên thành bình. Áp suất tại đó là :

$$p = \gamma(H - x) \quad (1)$$

Ứng lực theo phương dọc trục $T_1=0$, vì vậy có thể chọn nghiệm riêng của (21-66) dưới dạng :

$$w^* = \frac{\gamma(H - x)}{4k^4 D} \quad (2)$$

Nghiem tổng quát sẽ là:



Hình 21.47: Sơ đồ tính ứng suất trên thành bình vỏ trụ đựng đầy chất lỏng

$$w = e^{-kx}(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + e^{kx}(C_3 \sin kx + C_4 \cos kx) + \frac{\gamma(H - x)}{4k^4 D}$$

(3)

Các điều kiện biên sẽ như sau:

$$\text{Với } x=0, w=0 \text{ và } \frac{dw}{dx} = 0$$

$$\text{Với } x=H, M_1=0 \text{ và } Q=0$$

Từ (21-67) và (19-68) suy ra:

$$\text{Với } x=H \text{ thì } \frac{d^2 w}{dx^2} \text{ và } \frac{d^3 w}{dx^3} = 0$$

Từ các điều kiện đó ta có hệ thống bốn phương trình để xác định bốn hằng số C_1, C_2, C_3, C_4 như sau:

$$C_2 + C_4 = -\frac{\gamma H}{4k^4 D}$$

$$C_1 - C_2 + C_3 + C_4 = \frac{\gamma}{4k^5 D}$$

$$-C_1 e^{-kH} \cos kH + C_2 e^{-kH} \sin kH + C_3 e^{kH} \cos kH - C_4 e^{kH} \sin kH = 0$$

$$C_1 e^{-kH} (\sin kH + \cos kH) + C_2 e^{-kH} (\cos kH - \sin kH) +$$

$$+ C_3 e^{kH} (\cos kH - \sin kH) - C_4 e^{kH} (\cos kH + \sin kH) = 0 \quad (4)$$

Khử C_3 và C_4 ta nhận được:

$$-C_1 [e^{-kH} \cos kH + e^{kH} \cos kH] + C_2 [e^{-kH} \sin kH + e^{kH} (2 \cos kH + \sin kH)] =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\gamma}{4k^5} e^{kH} \cos kH - \frac{\gamma H}{4k^4 D} e^{kH} (\sin kH - \cos kH) \\
 &- C_1 [e^{-kH} (\sin kH + \cos kH) - e^{kH} (\cos kH - \sin kH)] + \\
 &+ C_2 [e^{-kH} (\cos kH - \sin kH)] + e^{kH} (3 \cos kH - \sin kH) = \\
 &= \frac{\gamma}{4k^5 D} e^{kH} (\cos kH - \sin kH) - \frac{\gamma H}{4k^4 D} \cdot 2e^{kH} \cos kH \quad (5)
 \end{aligned}$$

Từ (21-65) ta có :

$$k = \sqrt[4]{\frac{3(1-0,09)}{100^2 \cdot 0,5^2}} = 0,18178 \text{cm}^{-1}$$

$$kH = 91$$

Rõ ràng trị số $e^{-kH} = e^{-91}$ là quá nhỏ so với $e^{kH} = e^{91}$, vì vậy ta có thể bỏ qua trị số e^{-kH} trong hai phương trình cuối cùng này. Từ đó ta có:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{\gamma}{4k^4 D} \left(\frac{1}{k} - H \right); \quad C_2 = -\frac{\gamma}{4k^4 D} \\
 C_3 &= C_4 = 0
 \end{aligned}$$

Thực ra phải nói rằng C_3 và C_4 không phải là bằng không mà có một trị số nào đó song rất bé so với C_1, C_2 . Sự bé đó giống với sự tương quan giữa e^{-kH} và e^{kH}

Nếu phải tính cụ thể thì chúng ta có thể thực hiện phương pháp đúng dần để giải hệ phương trình (5) trên đây.

Ta hãy quay lại biểu thức (3). Chú ý rằng C_3 và C_4 là rất nhỏ nên số hạng thứ hai:

$$e^{-kx} (C_3 \sin kx + C_4 \cos kx)$$

có thể bỏ qua so với số hạng thứ nhất:

$$e^{-kx} (C_1 \sin kx + C_2 \cos kx)$$

Sai số do sự bỏ qua đó gây ra càng nhỏ khi x càng nhỏ. Với x lớn, giả dụ $x \approx H$, sự bỏ qua đó không còn đúng vì lí do C_3 và C_4 có trị số tương đối lớn. Thực vậy lúc đó e^{-kx} lại trở nên cực kì lớn và haisố hạng trên trở nên cùng hạng. Song ngay trong trường hợp đó sự bỏ qua trên đây không đưa đến những sai số đáng kể, vì rằng như chúng ta đã thấy, trị số mô men uốn và ứng suất lớn nhất lại nằm ở vùng bị ngàm, nghĩa là tại nơi mà sự bỏ qua đó cho ta công thức đúng nhất.

Với điều nhận xét đó, nếu phải khảo sát chính các hàm w ở miền $w \approx H$, thì ta có nên chuyển gốc hệ trục tọa độ và như vậy sẽ thay đổi điều kiện biên và do đó cũng bỏ qua C_3 và C_4 . Với cách đó hàm số tắt dần với hệ số e^{-kx} sẽ cho phép ta xác định chính xác ứng suất trong vỏ trụ ở tại biên thứ hai.

Lập luận bỏ qua phần tăng của hàm w và khảo sát phần hàm số tắt dần còn lại trong vùng biên của vỏ một cách độc lập với nhau (ta gọi là hiệu ứng biên).

Rõ ràng rằng phương pháp đó chỉ có thể ứng dụng cho trường hợp H khá lớn để trị số e^{-kH} có thể bỏ qua so với e^{+kH} . Giả sử sai số cho phép đó là 5%, khi đó ta có:

$$0,05e^{kH} < e^{-kH}$$

$$\text{Do đó :} \quad kH > -\frac{1}{2} \ln 0,05 = 1,5$$

Trong trường hợp đang xét, từ công thức (21-65)

$$\frac{H}{\sqrt{Rh}} > \frac{1,5}{\sqrt[3]{3(1-\mu^2)}} = 1,16 \approx 1$$

Tóm lại, khả năng xét hiệu ứng ở các biên khác nhau là tùy thuộc vào trị số $\frac{H}{\sqrt{Rh}}$.

Nói cách khác, sự bỏ qua trên đây là cho phép trong trường hợp chiều cao của trụ không bé hơn trị số bình quân giữa bán kính và chiều dày.

$$H > \sqrt{Rh}$$

Ta tính tiếp cho bài toán:

Thay C_1 và C_2 vào biểu thức (3) và tính các đạo hàm ta có:

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{\gamma}{4k^4 D} \left\{ e^{-kx} \left[\left(\frac{1}{k} - H \right) \sin kx - H \cos kx \right] + H - x \right\} \\ \zeta &= -\frac{\gamma}{4k^4 D} \left\{ e^{-kx} [(2kH - 1) \sin kx + \cos kx] - 1 \right\} \\ M_1 &= -\frac{\gamma}{2k^2} \cdot e^{-kx} \left[H \sin kx + \left(\frac{1}{k} - H \right) \cos kx \right] \\ M_2 &= \mu M_1, T_2 = \frac{Eh}{R} w \\ Q &= \frac{\gamma}{4k^2} \cdot e^{-kx} [\sin kx + (1 - 2H) \cos kx] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Để xác định ứng suất lớn nhất ta vẽ biểu đồ T_2 và M_1 (xem hình 21.48). Qua biểu đồ đó ta thấy trị số mô men uốn lớn nhất tại ngàm và trị số đó giảm rất nhanh khi đi xa khỏi ngàm. Ứng lực T_2 tại ngàm là lớn nhất và giảm nhanh chóng khi càng cách xa ngàm, và đồ thị biểu diễn T_2 là một đường thẳng. Phương trình của đường thẳng đó dễ dàng được xác định từ biểu thức (6) và (21-64). Với trị số x khá lớn:

$$w = \frac{\gamma}{4k^4 D} (H - x)$$

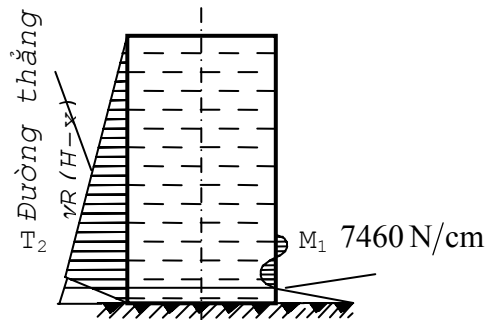
$$T_2 = \gamma R (H - x)$$

Các biểu thức này trùng với các biểu thức được tính với lý thuyết mô men. Quả vậy, từ điều kiện cân bằng của một nửa vòng hình trụ (hình 21.49) ta có:

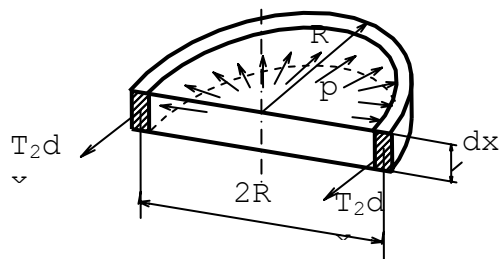
$$2pR \cdot dx = 2T_2 dx$$

$$T_2 = pR = \gamma \cdot R(H - x)$$

Như vậy, với những điểm xa ngàm sự tính toán ứng suất theo lý thuyết có mô men có thể thay bằng lý thuyết không mô men vì mô men uốn tại những nơi đó không còn ý nghĩa.



Hình 21.48: Sơ đồ tính ứng suất



Hình 21.49: Sơ đồ tính ứng suất

Ứng suất cực đại là ứng suất tại các điểm bên trong và bên ngoài của vỏ tại ngàm. Theo công thức (21-68) trị số các ứng suất chính tại mặt trong của vỏ là:

$$\sigma_1 = \frac{0}{0,5} + \frac{6 \cdot 74,6}{0,5^2} = 1790 \text{ N/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{0}{0,5} + 0,3 \cdot \frac{6 \cdot 74,6}{0,5^2} = 537 \text{ N/cm}^2$$

$$\sigma_3 = 0$$

Ứng suất tương đương theo thuyết bền ứng suất lớn nhất là:

$$\sigma_{td} = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} = 1790 \text{ N/cm}^2$$

Ở mặt ngoài của vỏ ta có:

$$\sigma_1 = -1790 \text{ N/cm}^2, \sigma_2 = -540 \text{ N/cm}^2, \sigma_3 = 0, \sigma_{td} = 1790 \text{ N/cm}^2.$$

Nếu ta tính ứng suất lớn nhất theo lý thuyết không mô men và tính với ứng lực kéo lớn nhất tại ngàm:

$$T_2 = \gamma R \cdot H$$

Ta sẽ có:
$$\sigma = \frac{T_2}{h} = \frac{10^{-2} \cdot 100 \cdot 500}{0,5} = 1000 \text{ N/cm}^2$$

Như vậy sai số gần gấp hai lần tại ngàm, do đó trong trường hợp này không thể tính theo lý thuyết không mô men được.

Ví dụ 2: Ống mỏng được cố định bởi hai mặt côn như hình vẽ 21.50. Xác định luật phân bố của ứng lực và mô men uốn trong ống. Cho biết $l=30\text{cm}$, $R=5\text{cm}$, $\mu = 0,3$. Giả sử $p_n=p_t=0$.

Bài giải: Ứng lực theo trục là:
$$T_1 = \frac{P}{2\pi R}$$

Bỏ qua lực ma sát trên mặt côn, trị số lực cắt Q được chỉ dẫn trên hình 21.51 và xác định bởi biểu thức:

$$Q = \frac{p\sqrt{3}}{2\pi R}$$

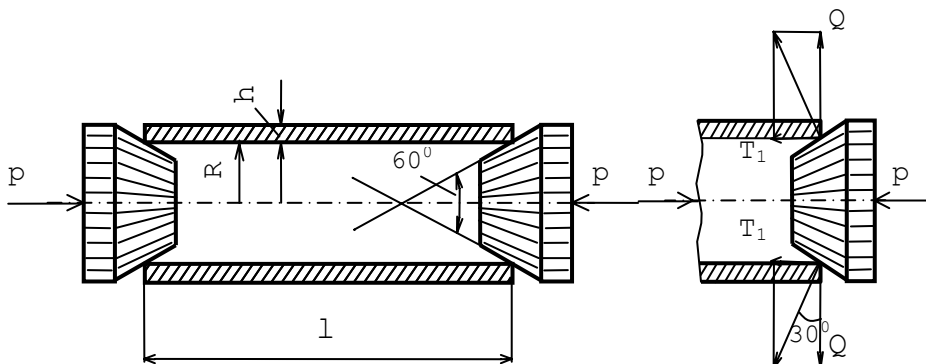
Nghiệm riêng của (21-56) được chọn dưới dạng:

$$w^* = \frac{\mu T}{4k^4 D \cdot R} = \frac{\mu \cdot P}{2\pi E \cdot h}$$

Nghiệm tổng quát của hàm chuyển vị theo (21-70) có dạng:

$$w = e^{-kx} (C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + e^{kx} (C_3 \sin kx + C_4 \cos kx) + \frac{\mu p}{2\pi E h}$$

Chọn gốc hệ trục tọa độ là một đầu góc.



Hình 21.50: Ống mỏng

Hình 21.51: Sơ đồ tính ứng suất và mô men

Lập lại tất cả các lập luận như trên ta thấy có thể bỏ qua C_3 và C_4 khi tính ứng suất với điều kiện e^{-kx} có thể bỏ qua so với e^{kl} .

Ta tính
$$kl = \sqrt[4]{\frac{3(1-0,09)}{5^2 \cdot 0,5^2}} \cdot 30 = 24,4$$

Vậy việc bỏ qua C_3 và C_4 là cho phép, biểu thức của chuyển vị có thể viết lại dưới dạng:

$$w = e^{-kx} (C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + \frac{\mu p}{2\pi Eh}$$

Các đạo hàm của w là :

$$w' = ke^{-kx} [-(C_1 + C_2) \sin kx + (C_1 - C_2) \cos kx]$$

$$w'' = 2k^2 e^{-kx} (C_2 \sin kx + C_1 \cos kx)$$

$$w''' = 2k^3 e^{-kx} [(C_1 - C_2) \sin kx + (C_1 + C_2) \cos kx]$$

Thiết lập các điều kiện biên:

Với $x=0$, $M_1=0$ ($w' = 0$) và $Q = Dw''' = \frac{p\sqrt{3}}{2\pi R}$

Từ điều kiện thứ nhất ta rút ra được $C_1=0$ và từ điều kiện thứ hai $C_2 = \frac{p\sqrt{3}}{2\pi R}$

Từ đó:

$$w = \frac{p}{\pi Eh} \left[kR\sqrt{3}e^{-kx} \cos kx + \frac{\mu}{2} \right]$$

Các ứng lực có trị số là: $T_1 = -\frac{p}{2\pi R}$

$$T_2 = \frac{p}{\pi} k\sqrt{3}e^{-kx} \cos kx$$

Và trị số mô men uốn là:

$$M_1 = \frac{p\sqrt{3}}{2\pi kR} e^{-kx} \sin kx$$

$$M_2 = \mu M_1$$

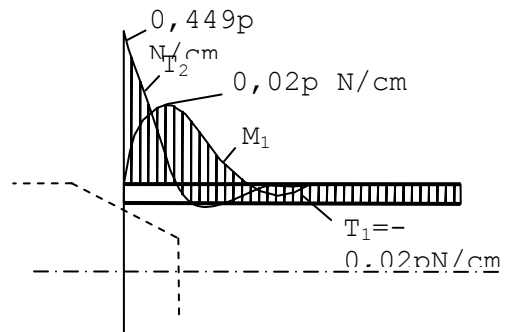
Từ các phương trình đó ta có thể vẽ các biểu đồ của mô men uốn và ứng lực T_1, T_2 như trên hình 21.52.

Các ứng suất lớn nhất là tại điểm gần vị trí cố định của ống, trị số của chúng là:

$$\sigma_2 = -\frac{0,449P}{0,5} = +0,898 \text{ N/cm}^2$$

Ứng suất tương đương là:

$$\sigma_{td} = \sigma_1 - \sigma_3 = 0,952 \text{ N/cm}^2$$



Hình 21.52:
Biểu đồ mô men và ứng lực

CÂU HỎI TỰ HỌC.

21.1. Thế nào là tấm và vỏ, phân biệt chúng ?

21.2. Phương hướng tính ứng suất đối với tấm tròn chịu lực phân bố đối xứng ?

- 21.3. Các công thức tính ứng suất của tấm tròn ?
- 21.4. Sự khác nhau khi tính toán tấm tròn và tấm chữ nhật ?
- 21.5. Các công thức tính ứng suất trong tấm chữ nhật ?
- 21.6. Cách xét các biến dạng và ứng suất đối với vỏ ?
- 21.7. Các biểu thức tính ứng suất đối với vỏ trụ ?
- 21.8. Các phương trình cân bằng đối với vỏ đối xứng ?
- 21.9. Phương trình tương thích giữa chuyển vị và biến dạng.
- 21.10. Tương quan giữa biến dạng và ứng lực ?
- 21.11. Ứng suất uốn trong vỏ trụ chịu áp suất bên trong ?

