

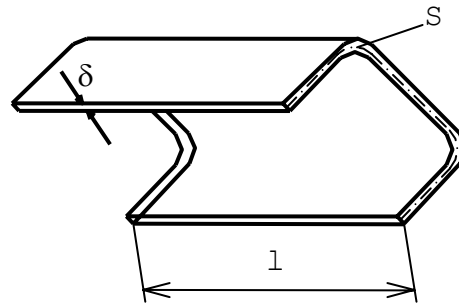
Chương 22

KẾT CẤU THANH THÀNH MỎNG

22.1.KHÁI NIỆM.

Kết cấu thanh thành mỏng là một dạng thanh theo định nghĩa trước đây, tức là nó cũng là một vật thể có kích thước theo một phương lớn hơn rất nhiều so với kích thước theo hai phương kia. Thế nhưng kích thước theo một phương trong hai phương còn lại rất nhỏ. Và thường chu vi của nó là hở, chúng ta sẽ rõ điều này khi đi vào nội dung nghiên cứu. Và kết cấu thanh thành mỏng có thể xem là một kết cấu đặc biệt. Kết cấu này cũng thường gặp trong ngành cơ khí, xây dựng, đặc biệt được ứng dụng trong kết cấu máy bay, tàu thủy, toa xe... Vì vậy chúng tôi cho rằng việc giới thiệu những vấn đề cơ bản của tính toán của kết cấu thanh thành mỏng dưới đây là cần thiết.

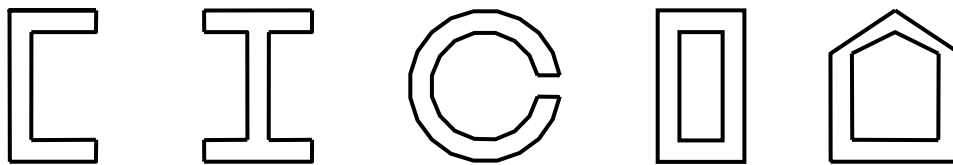
Ở hình 22.1 biểu diễn một thanh thành mỏng, thanh này có bề dày δ rất bé so với chu tuyến S (đường trung bình của mặt cắt ngang) và S này lại rất bé so với chiều dài l của thanh. Loại kết cấu thanh thành mỏng này có ưu việt ở chỗ là trọng lượng nhỏ nhưng chịu lực lớn cho nên nó được sử dụng trong kết cấu máy bay, tàu thủy, ô tô, tàu hoả, một số công trình xây dựng và cầu....



Hình 22.1: Kết cấu một thanh thành mỏng

Tính toán về kết cấu thanh thành mỏng cũng là một chuyên đề lớn đã được một số nhà bác học như Timôsenko, Vlasôp... nghiên cứu. Đặc biệt Vlasôp không những nghiên cứu về tính toán độ bền mà còn nghiên cứu về ổn định, về dao động của các kết cấu thanh thành mỏng, vì vậy đôi khi người ta còn gọi là lý thuyết của Vlasôp. Chúng ta làm quen với một số định nghĩa sau:

- Mặt cách đều hai mặt bên của một thanh được gọi là mặt trung gian. Giao tuyến của mặt trung gian với mặt cắt ngang gọi là đường trung gian. Hình dáng của đường trung gian còn được gọi là chu tuyến của mặt cắt ngang.
- Thanh có mặt cắt ngang hở thì chu tuyến của nó là một đường hở và thanh có mặt cắt ngang là kín thì chu tuyến của nó là một đường kín.
- Bề dày δ của thanh cũng có thể không đổi hoặc thay đổi (xem hình 22.2).

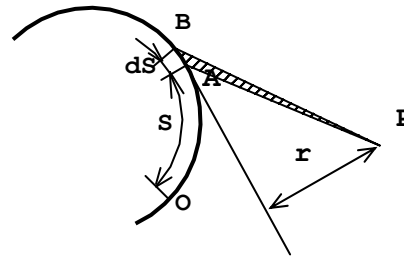


Hình 22.2: Bề dày của thanh thành mỏng

22.2. ĐẶC TRƯNG QUẠT CỦA MẶT CẮT NGANG CỦA MỘT THANH THÀNH MỎNG HỞ.

22.2.1. Tọa độ quạt (trong hệ độc cực).

Giả sử có một đường chu tuyến như trên hình 22.3. Ta chọn một điểm O bất kì trên đường đó làm gốc tọa độ và lấy một điểm P bất kì trên mặt phẳng chứa mặt cắt ngang gọi là điểm cực. Có một điểm A trên đường chu tuyến cách O theo đường chu tuyến là S, ta xét phân tố AB có độ dài theo đường chu tuyến là dS (xem hình 22.3), ta có:



Hình 22.3: Tính diện tích quạt trong hệ tọa độ độc cực

- Hai lần diện tích tam giác PAB là:
 $d\omega = r \cdot dS$

Trong đó r là khoảng cách từ P đến đường tiếp tuyến tại A.

- Ta gọi tích phân dưới đây là tọa độ quạt của A:

$$\omega = \int_s^S d\omega = \int_0^S r dS \quad \text{cm}^2 \quad (22-1)$$

- Tọa độ quạt này về trị số bằng 2 lần diện tích của tia PA quét trong mặt cắt khi A chạy từ O đến điểm đang xét. Dấu của tọa độ quạt được xem là (+) khi tia A quanh điểm P theo chiều kim đồng hồ và là (-) khi tia PA quay ngược chiều kim đồng hồ. Vậy tọa độ quạt phụ thuộc vào vị trí của cực P và gốc tọa độ O đã chọn.

Dưới đây chúng ta trình bày cách tính và vẽ các biểu đồ quạt.

Ví dụ 1: Cho một đường trung gian và chọn gốc tọa độ O và cực P như trên hình vẽ 22.4.

Bài giải: Tọa độ A là 2 lần diện tích của tam giác POA:

$$\omega_A = -PO \times OA = -a \cdot S$$

Đại lượng này mang dấu (-) vì tia PA quét từ O→A quay ngược chiều kim đồng hồ.

Giá trị của tọa độ quạt tại một điểm trên đường chu tuyến được vẽ ứng với tung độ của nó kể từ đường trung tuyến (xem hình vẽ 22.4). Với cách làm như vậy:

Tại điểm (1) sẽ có : $\omega_1 = -a^2$

Tại điểm (2) sẽ có : $\omega_2 = -2a^2$

Tại điểm (3) sẽ có : $\omega_3 = +a^2$

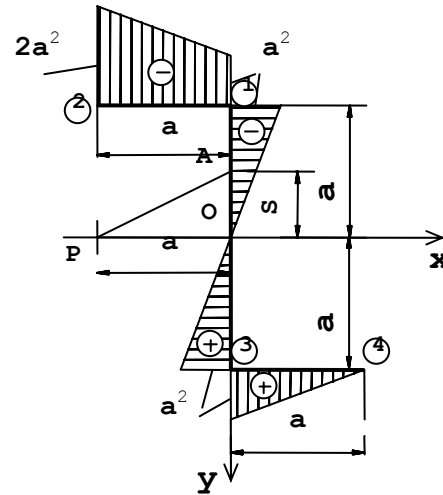
Tại điểm (4) sẽ có : $\omega_4 = 0$

(Tại điểm 4 có hai giá trị từ O đến (3) và từ (3)-(4) bằng nhau nhưng ngược dấu)

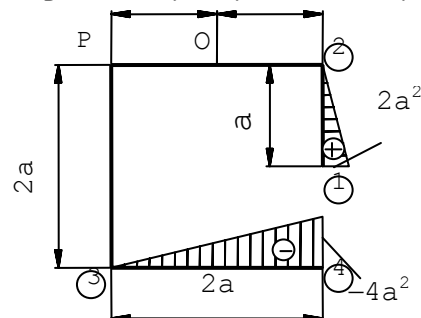
Ví dụ 2: Hãy vẽ biểu đồ tọa độ quạt của đường chu tuyến của mặt cắt ngang được biểu diễn trên hình 22.5.

Bài giải: Với cách chọn gốc O và cực P như trên hình vẽ thì khi A chạy trên đường PO2 hay P-3, giá trị của tọa độ quạt bằng không.

Tại điểm (1) : $\omega_1 = 2a^2$



Hình 22.4: Sơ đồ chọn gốc tọa độ aO và cực P



Hình 22.5: Biểu đồ tọa độ quạt

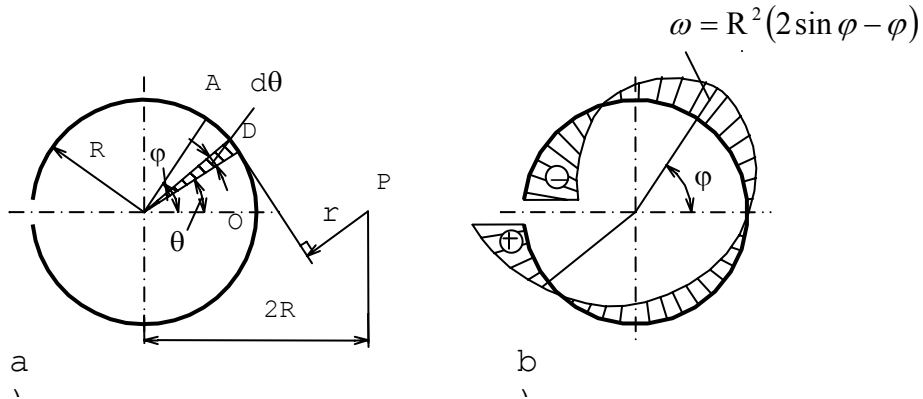
Tại điểm (2) : $\omega_1 = -4a^2$

Biểu đồ tọa độ quạt được biểu diễn trên hình 22.5.

Ví dụ 3: Trên hình 22.6 biểu diễn một đường chu tuyến tròn hở với vị trí cực và góc như hình vẽ. Hãy vẽ biểu đồ tọa độ của nó.

Bài giải: Gọi θ là góc ở tâm của cung $OD=S$ và r là khoảng cách từ P đến đường tiếp tuyến của vòng tròn tại D , r được xác định:

$$r = 2R \cdot \cos\theta - R \quad (1)$$



Hình 22.6:
Đường chu tuyến hở (a) và biểu đồ tọa độ quạt của nó (b)

Vậy tọa độ quạt tại A là diện tích quạt do tia PD quét khi D chạy từ $O \rightarrow A$.

$$\omega_A = \int_S r dS = R^2 \int_0^\varphi (2 \cos\theta - 1) d\varphi$$

Hay
$$\omega_A = R^2(2 \sin\varphi - \varphi) \quad (2)$$

Căn cứ vào (2) ta vẽ được biểu đồ tọa độ quạt như trên hình 22.6b

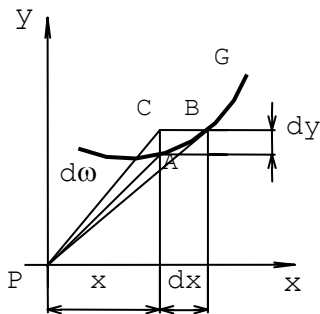
22.2.2. Tọa độ quạt trong hệ trục vuông góc.

Trong hệ tọa độ vuông góc Pxy có một đường cong G biểu diễn một đoạn của đường trung gian của một mặt cắt ngang nào đó (xem hình 22.7).

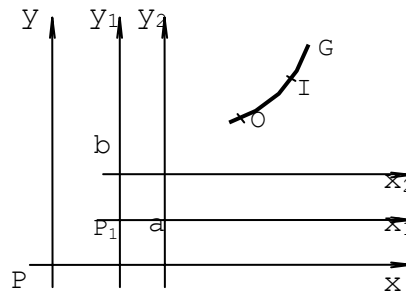
Một cách gần đúng, ta xem diện tích vi phân $d\omega$ là bằng hai lần hiệu của hai diện tích của hai tam giác PBC và PAC_1 , nên ta có:

$$d\omega = ydx - xdy \quad (22-2)$$

Trong đó x, y là tọa độ của điểm A và $(x+dx), (y+dy)$ là tọa độ của điểm B.



Hình 22.7: Tọa độ quạt trong hệ trục vuông góc



Hình 22.8: Quan hệ tọa độ quạt khi đường cong có hai cực

Chúng ta cũng có thể thiết lập tương quan giữa các tọa độ quạt đối với 2 cực bất kì.

Thật vậy: trong mặt phẳng chứa đường cong G lấy hai cực P_1 và P_2 với hai trục song song $P_1x_1y_1$ và $P_2x_2y_2$ như trên hình vẽ 22.8. Tọa độ của cực P_2 trong hệ trục $P_1x_1y_1$ là a, b . Giả sử đã xác định được tọa độ quạt trên cung $OI=S$ tương ứng với cực P_1 , bây giờ hãy xác định tọa độ quạt của đoạn cung đó với cực mới là P_2 .

Tương tự như trên ta có:

$$d\omega_2 = y_2 dx_2 - x_2 dy_2$$

Theo hình 22.8 ta có được quan hệ sau:

$$x_2 = x_1 - a; y_2 = y_1 - b$$

Vậy:
$$d\omega_2 = (y_1 - b)dx_1 - (x_1 - a)dy_1$$

Lấy tích phân hai vế dọc theo \widehat{OI} , ta có:

$$\omega_2(S) = \omega_1(S) - b(x_1 - x_{10}) + a(y_1 - y_{10})$$

Trong đó x_1 và y_1 là tọa độ của điểm I và x_{10}, y_{10} là tọa độ của điểm O trong hệ tọa độ $P_1x_1y_1$. Nếu có một hệ trục bất kì song song với chúng là Pxy chẳng hạn (xem hình 22.8) thì ta có thể viết ω_2 dưới dạng mới:

$$\omega_2(S) = \omega_1(S) - b(x - x_0) + a(y - y_0) \quad (22-3)$$

Từ biểu thức (22-3) ta có nhận xét sau đây: Khi thay đổi vị trí cực P, nghĩa là giá trị a, b thay đổi thì tọa độ quạt sẽ thay đổi một trị số tỉ lệ bậc nhất đối với các tọa độ x, y . Khi thay đổi vị trí gốc O trên cung, nghĩa là thay đổi vị trí tọa độ x_0, y_0 thì tọa độ quạt thay đổi một hằng số.

22.2.3. Đặc trưng quạt và cách xác định chúng.

Cũng như trong chương đặc trưng hình học trước đây, ta có các định nghĩa sau đây:

- Gọi mô men tĩnh quạt là biểu thức sau:

$$S_\omega = \iint_F \omega dF \quad (\text{cm}^4) \quad (22-4)$$

- Gọi mô men quạt đường là:

$$\left. \begin{aligned} J_{\omega_x} &= \iint_F \omega y dF (\text{cm}^5) \\ J_{\omega_y} &= \iint_F \omega x dF (\text{cm}^5) \end{aligned} \right\} \quad (22-5)$$

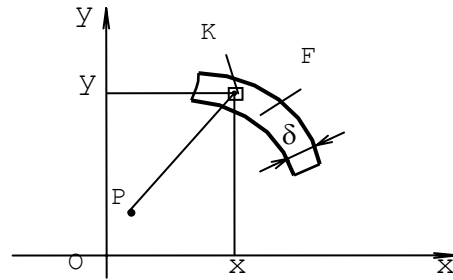
- Gọi mô men tĩnh quạt là tích phân sau:

$$J_\omega = \iint_F \omega^2 dF \quad (\text{cm}^6) \quad (22-6)$$

Với F là diện tích của mặt cắt ngang; x, y là tọa độ của điểm K nào đó trên mặt cắt ngang và ω là tọa độ quạt tương ứng của điểm K đó đối với cực P đã chọn (hình 22.9).

Trong trường hợp bề dày δ không đổi thì các biểu thức tích phân trên có dạng như sau :

$$\left. \begin{aligned} S_{\omega} &= \delta \int_S \omega dS \\ J_{\omega_x} &= \delta \int_S \omega y dS \\ J_{\omega_y} &= \delta \int_S \omega x dS \\ J_{\omega} &= \delta \int_S \omega^2 dS \end{aligned} \right\} (22-7)$$



Hình 22.9: Cách xác định các đặc trưng của quạt

Rõ ràng nếu biểu đồ tọa độ quạt ω đã được xác định thì các tích phân (22-7) có thể tính dễ dàng. Nếu các đường chu tuyến có những đoạn thẳng thì các tích phân (22-7) có thể xác định bằng phương pháp nhân biểu đồ VêrêSaghin như trong chương tính chuyển vị.

Ví dụ 4: Hãy tính các đặc trưng quạt cho hình 22.6a (trong ví dụ 3).

Bài giải: Ta đã xác định được tọa độ quạt tại điểm A bất kỳ trên chu tuyến ở ví dụ 3 là:

$$\omega_A = R^2(2 \sin \varphi - \varphi)$$

Vậy các đặc trưng quạt theo (22-7) được tính như sau:

$$S_{\omega} = \iint_F \omega dF = R^3 \delta \int_{-\pi}^{\pi} (2 \sin \varphi - \varphi) d\varphi = 0$$

$$J_{\omega_y} = \iint_F x \omega dF = R^4 \delta \int_{-\pi}^{\pi} \cos \varphi (2 \sin \varphi - \varphi) d\varphi$$

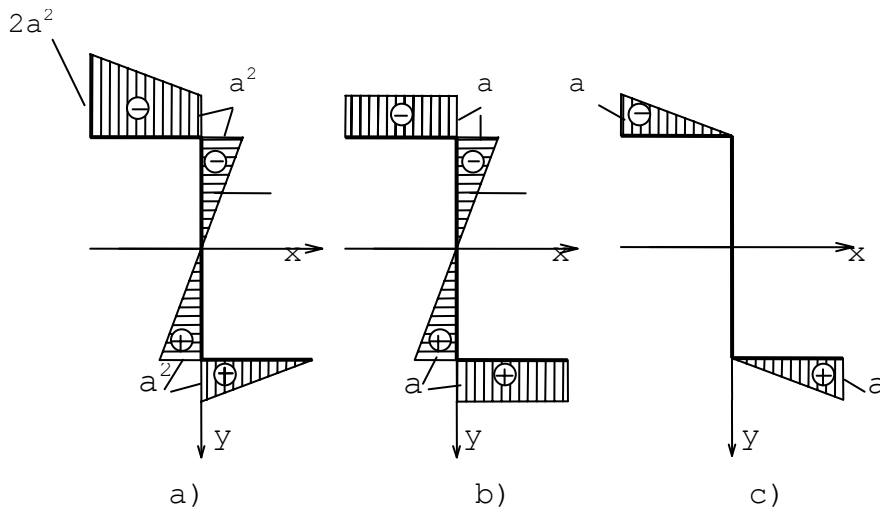
$$J_{\omega_x} = \iint_F y \omega dF = R^4 \delta \int_{-\pi}^{\pi} \sin \varphi (2 \sin \varphi - \varphi) d\varphi$$

$$J_{\omega} = \iint_F \omega^2 dF = R^5 \delta \int_{-\pi}^{\pi} (2 \sin \varphi - \varphi)^2 d\varphi = 2\pi \left(\frac{\pi^2}{3} - 2 \right) R^5 \delta$$

Chú ý : $dF = \delta \times d\varphi$

Ví dụ 5: Hãy xác định các đặc trưng của quạt của mặt cắt với chu tuyến của nó được biểu diễn trên hình 22.10.

Bài giải : Ngoài biểu đồ tọa độ quạt đã được vẽ ở ví dụ 1 (hình 22.10a). Để có



Hình 22.10. 228 <http://vietnam12h.com> Biểu đồ tọa độ quạt (a) và biểu đồ về giá trị y và x ở đường chu tuyến (b), (c)

được các đặc trưng quạt ta vẽ thêm về giá trị của y và x ở các vị trí của đường chu tuyến (xem hình 22.10b, 20.10c).

Bây giờ chúng ta lần lượt tính các đặc trưng quạt bằng cách nhân biểu đồ VêrêSaghin:

$$S_{\omega} = \iint_F \omega dF = \delta \int_S \omega dF = -\delta \frac{a^3}{2}$$

$$J_{\omega_x} = \iint_F \omega y dF = \frac{\delta a^4}{3}$$

$$J_{\omega_y} = \iint_F \omega x dF = \delta a^4$$

$$J_{\omega} = \iint_F \omega^2 dF = \frac{7}{3} \delta a^5$$

Chúng ta có một số định nghĩa cần lưu ý như sau:

- Nếu $J_{\omega_x} = J_{\omega_y} = 0$ thì cực P lúc này sẽ là cực chính.
- Nếu $S_{\omega} = 0$ thì gốc O tương ứng gọi là gốc chính.
- Biểu đồ tọa độ quạt tương ứng với cực chính và gốc chính được gọi là biểu đồ tọa độ quạt chính. Mô men quán tính quạt tương ứng với biểu đồ đó được gọi là mô men quán tính quạt chính. Như ở ví dụ 4 thì P và O là các cực chính và gốc chính và trị số J_{ω} được gọi là mô men quán tính quạt chính.

Với các định nghĩa đó việc xác định cực chính, gốc chính là rất quan trọng. Dưới đây chúng ta trình bày cách xác định cực và gốc chính đó.

Ta có một chu tuyến của mặt cắt ngang như trên hình vẽ 22.11. Giả sử có hệ tọa độ Oxy là hệ trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt đó. Ta chọn cực P_1 bất kì, mà với nó ta đã tính được tọa độ quạt ω_1 và các đặc trưng khác đối với hệ trục tọa độ $P_1x_1y_1$.

Gọi P_2 là cực chính phải tìm thì theo định nghĩa là:

$$J_{\omega_{2y}} = \iint_F \omega_2 x dF = 0$$

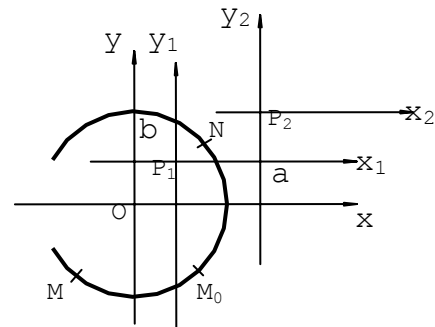
và
$$J_{\omega_{2x}} = \iint_F \omega_2 y dF = 0$$

Từ biểu thức (22-3), ta có:

$$J_{\omega_{2y}} = \iint_F [\omega_1 - b(x - x_0) + a(y - y_0)] x dF = 0$$

$$J_{\omega_{2x}} = \iint_F [\omega_1 - b(x - x_0) + a(y - y_0)] y dF = 0$$

Cũng như ở trên a và b là tọa độ của cực P_2 trong hệ tọa độ $P_1x_1y_1$. Nếu có một hệ trục song song thì cực P_2 và P_1 trong hệ này có tọa độ là (x_2, y_2) và (x_1, y_1) thì trị số a và b lúc này là hiệu số của tọa độ x_2, x_1 và y_2, y_1 . Chú ý như giả thiết ở trên Oxy là hệ trục quán tính chính trung tâm, thì ta sẽ có:



Hình 22.11: Sơ đồ xác định cực và gốc chính

$$\left. \begin{aligned} a &= x_2 - x_1 = \frac{-J_{\omega_{1x}}}{J_x} \\ b &= y_2 - y_1 = \frac{J_{\omega_{1y}}}{J_y} \end{aligned} \right\} \quad (22-8)$$

Đây là công thức để xác định tọa độ của P_2 từ vị trí P_1 bất kì.

Vị trí của điểm gốc chính được xác định từ điều kiện: $S_{\omega}=0$

Trên hình vẽ 22.11 lúc đầu ta chọn một điểm bất kì là M làm gốc, tọa độ quạt của N đối với điểm gốc M được kí hiệu là ω_M . Nếu chọn một điểm M_0 khác làm gốc thì ta sẽ có mối quan hệ trên hình 22.11 sẽ là:

$$\omega_M^N = \omega_{M_0}^N + \omega_M^{M_0}$$

Vậy:

$$\omega_{M_0}^N = \omega_M^N - \omega_M^{M_0}$$

Nếu xem M_0 là điểm gốc chính thì:

$$S_{\omega_{M_0}^N} = \iint_F \omega_{M_0}^N dF = 0$$

Hay

$$S_{\omega_{M_0}^N} = \iint_F (\omega_M^N - \omega_M^{M_0}) dF = 0$$

Suy ra:

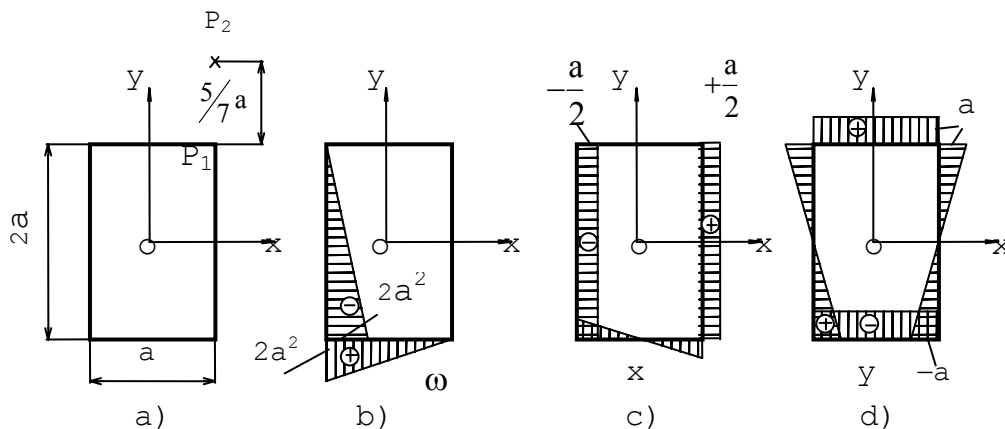
$$\iint_F \omega_M^N dF - \omega_M^{M_0} \iint_F dF = 0$$

Cuối cùng ta tính được $\omega_M^{M_0}$ như sau:

$$\omega_M^{M_0} = \frac{\iint_F \omega_M^N dF}{F} \quad (22-9)$$

Công thức (22-8) cho phép ta xác định được tọa độ quạt của điểm M_0 từ điểm gốc M bất kì đã chọn ban đầu.

Ví dụ 6: Hãy xác định cực chính và góc chính của chu tuyến hình chữ nhật với bề dày δ không đổi như trên hình 22.12.



Hình 22.12: Xác định cực chính và góc chính của chu tuyến hình chữ nhật với chiều dày δ không đổi

Bài giải: Đầu tiên ta phải xác định hệ trục tọa độ quán tính chính trung tâm của mặt cắt này, do bề dày δ không đổi nên hệ trục quán tính trung tâm cũng là Oxy (xem hình 22.12a). Như trong chương đặc trưng hình học ta xác định dễ dàng các đại lượng sau đây:

Lúc đầu ta chọn P_1 là ở góc hình chữ nhật (xem hình 22.12a). Từ đây ta tính được tọa độ quạt ω_1 (xem hình 22.12b). Để tính các mô men quạt ta phải vẽ thêm các biểu đồ x và y (hình 22.12c và 22.12d). Sau đó ta dùng phương pháp nhân biểu đồ VêrêSaghin, ta được:

$$J_{\omega_1 y} = \iint_F x \cdot \omega_1 dF = \frac{5}{6} a^4 \cdot \delta$$

và
$$J_{\omega_1 x} = \iint_F y \cdot \omega_1 dF = -\frac{1}{3} a^4 \cdot \delta$$

$$J_x = \frac{10}{3} a^3 \delta$$

$$J_y = \frac{7}{6} a^3 \delta$$

Cực P_2 được xác định nhờ công thức (22-8):

$$x_2 = \frac{1}{10} a + x_1; \quad y_2 = \frac{5}{7} a + y_1$$

Ứng với cực P_2 và góc O ta vẽ được biểu đồ quạt như trên hình 22.13.

Mô men tĩnh quạt đối với góc O là:

$$\iint_F \omega_0^N dF = \frac{38}{70} a^3 \delta$$

Từ công thức (22-9) ta xác định được tọa độ quạt đối với góc chính O:

$$\omega^* = \frac{\iint_F \omega_0^N dF}{F} = \frac{\frac{38}{70} a^3 \delta}{6a\delta} = 0,09a^2$$

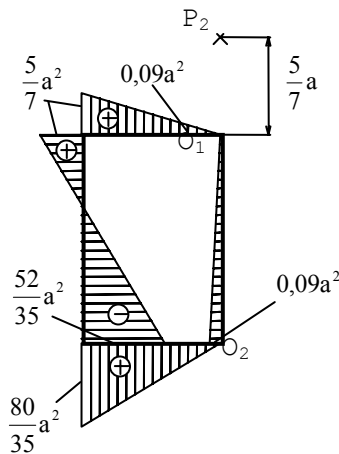
Trên hình 22.13 có hai điểm O_1 và O_2 có góc tọa độ quạt bằng $0,09a^2$. Ta chọn O_1 gần cực P_2 là điểm góc chính.

22.3. ỨNG SUẤT TIẾP TRONG THÀNH MỎNG KHI CHỊU UỐN NGANG.

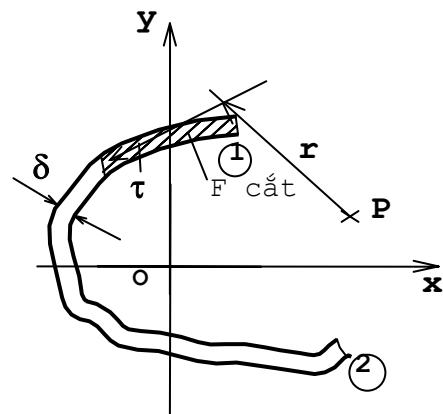
Ứng với bài toán uốn ngang thì trên mặt cắt ngang của thanh phải có hai thành phần nội lực là mô men uốn M_x và lực cắt Q_y . Như vậy chúng ta đã biết để tính giá trị ứng suất pháp ta vẫn sử dụng công thức đã được xây dựng trong phần uốn thuần tuý:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} \cdot y \quad (22-10)$$

Đối với kết cấu thanh thành mỏng ta có thể sử dụng khá chính xác công thức Durapski để tính ứng



Hình 22.13: Biểu đồ quạt



Hình 22.14: Sơ đồ tính ứng suất tiếp τ

suất tiếp mà ta đã thiết lập phần tính ứng suất trong chương uốn ngang phẳng:

$$\tau = \frac{Q_y S_x^c}{J_x \cdot \delta} \quad (22-11)$$

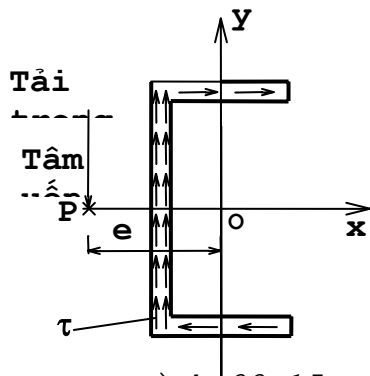
Trong đó S_x^c là mô men tĩnh của phần diện tích bị cắt lấy đối với trục quán tính trung tâm x, δ là bề dày (xem hình 22.14) và xem ứng suất phân bố đều trên δ .

Nếu trên mặt cắt có xuất hiện thêm lực cắt theo phương x (Q_x) thì giá trị ứng suất tiếp do Q_x sinh ra cũng được tính tương tự:

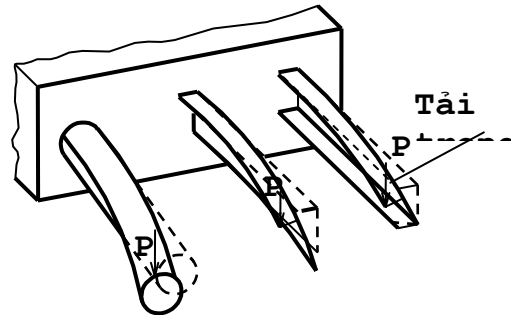
$$\tau = \frac{Q_x S_y^c}{J_y \cdot \delta} \quad (22-12)$$

Ứng suất tiếp τ này có một tính chất quan trọng là: Ứng suất tiếp này tạo thành một luồng trên mặt cắt. Rõ ràng hợp lực của nó trên toàn bộ mặt cắt sẽ là các lực cắt Q_y và Q_x . Nếu thu gọn hợp lực của các ứng suất tiếp đó về trọng tâm của mặt cắt, nó sẽ gây ra một mô men xoắn phụ quanh trọng tâm O của mặt cắt (xem hình 22.15). Có nghĩa là khi tải trọng tác dụng tại O thì bài toán uốn ngang phẳng ngoài mô men uốn M_x và lực cắt Q_y

còn có một mô men xoắn phụ nữa. Mô men xoắn này sẽ làm cho mặt cắt vênh đi như trên hình 22.16. Chắc rằng sẽ có một điểm nào đó để khi tải trọng tác dụng theo phương y đặt tại điểm đó thì mô men xoắn phụ này bị triệt tiêu, điểm đó được gọi là **tâm uốn**. Chú ý là mặt cắt ta đang nghiên cứu thì trục y không phải là trục đối xứng nên tâm uốn sẽ lệch khỏi trọng tâm O- điểm P chẳng hạn nó nằm trên trục x nhưng lệch qua một bên (xem hình 22.15). Bây giờ chúng ta xác định tâm uốn đó.



Hình 22.15:
Luồng ứng suất cắt



Hình 22.16: Mô men xoắn phụ do ứng suất tiếp gây ra

Một cách tổng quát trước tiên ta giả sử tính mô men xoắn nội lực này do ứng suất tiếp τ gây ra đối với một điểm P nào đó (xem hình 22.14) thì:

$$M_p = \iint_F \tau \cdot \delta \cdot r dS$$

Trong đó r là khoảng cách từ P đến phương của ứng suất tiếp τ và dS là độ dài vi phân của đường chu tuyến tại ứng suất tiếp đó. Giá trị $r dS$ chính là vi phân tọa độ quạt đo của đường chu tuyến đối với cực P.

Thay giá trị của ứng suất tiếp τ tính từ các biểu thức (22-11) và (22-12) vào M_P ta có:

$$M_P = \frac{Q_y}{J_x} \iint_F S_x^* \frac{d\omega}{dF} \cdot dF + \frac{Q_x}{J_y} \iint_F S_y^* \frac{d\omega}{dF} \cdot dF$$

Ở biểu thức này có hai tích phân tương tự nhau nên ta chỉ xét một số hạng rồi suy ra cho số hạng kia.

Ta chỉ xét số hạng sau:

$$\iint_F S_x^* \frac{d\omega}{dF} \cdot dF = S_x^* \cdot \omega \Big|_{S_1}^{S_2} - \iint_F \frac{dS_x^*}{dF} \cdot dF$$

Trong đó S_1 và S_2 chỉ trị số $S_x^* \cdot \omega$ ở vị trí (1) và vị trí (2) (hình 22.14). Rõ ràng tại vị trí (1) thì $S_x^* = 0$ vì tại điểm đầu $F_{cắt}=0$, tại vị trí (2) ở cuối mặt cắt thì $S_x^* = 0$ vì trục x là trục quán tính chính trung tâm thì mô men tĩnh toàn hình lấy đối với nó phải bằng không.

Cho nên:

$$\iint_F S_x^* \frac{d\omega}{dF} \cdot dF = \iint_F \frac{dS_x^*}{dF} \omega \cdot dF$$

Trong đó ta có :

$$\frac{dS_x^*}{dF} = y$$

Điều đó cho ta biểu thức:

$$\iint_F S_x^* \cdot \omega dF = \iint_F y \cdot \omega \cdot dF = J_{\omega_x}$$

Như vậy cuối cùng ta có mô men nội lực do ứng suất tiếp τ gây ra tại điểm P là:

$$M_P = \frac{Q_y}{J_x} \cdot J_{\omega_x} + \frac{Q_x}{J_y} \cdot J_{\omega_y}$$

Muốn mô men này triệt tiêu với mọi giá trị Q_x, Q_y thì phải có điều kiện:

$$J_{\omega_x} = J_{\omega_y} = 0 \quad (22-13)$$

Tức là điểm P sẽ là cực chính, khi nó là tâm uốn của mặt cắt ngang.

Chúng ta có thể xác định tâm uốn dễ dàng hơn. Thật vậy, chúng ta hãy quan sát lại hình 22.15, với cách đặt lực theo phương y (không phải là trục đối xứng), thì các luồng ứng suất sẽ tạo thêm một mô men xoắn quanh điểm O. Bây giờ chúng ta dịch chuyển điểm đặt lực trên trục x từ O sang điểm P nào đó (xem hình 22.15). Ta thấy hợp lực các ứng suất ở cánh trên và cánh dưới với điểm P một mô men thuận chiều kim đồng hồ và mô men đó được tính:

$$T = \int_0^b \tau \cdot \delta \cdot dt = \frac{Q_y \cdot h \cdot \delta}{2J_x} \int_0^b t dt = \frac{Q_y \cdot h \cdot \delta \cdot b^2}{4J_x}$$

Với

$$\tau = \frac{Q_y S_x^c}{I_x \cdot \delta} = \frac{Q_y}{I_x \delta} \cdot \delta \cdot t \cdot \frac{h}{2}$$

Trong đó: Q_y - lực cắt; S_x^c - mô men tĩnh của phần bị cắt; δ - bề dày của mặt cắt; h - chiều cao của mặt cắt; b - chiều rộng của mặt cắt; t - biến số từ $0 \rightarrow b$.

Còn hợp lực các ứng suất tiếp trong lòng là R chẳng hạn nó gây ra mô men xoắn đối với điểm P sẽ là $R \cdot e$ có chiều ngược lại với mô men xoắn ở các đế tạo ra. Và hay mô men này nếu bằng nhau sẽ xác định được độ lệch e để P trở thành tâm uốn.

Vậy:
$$R \cdot e = 2T \cdot \frac{h}{2}$$

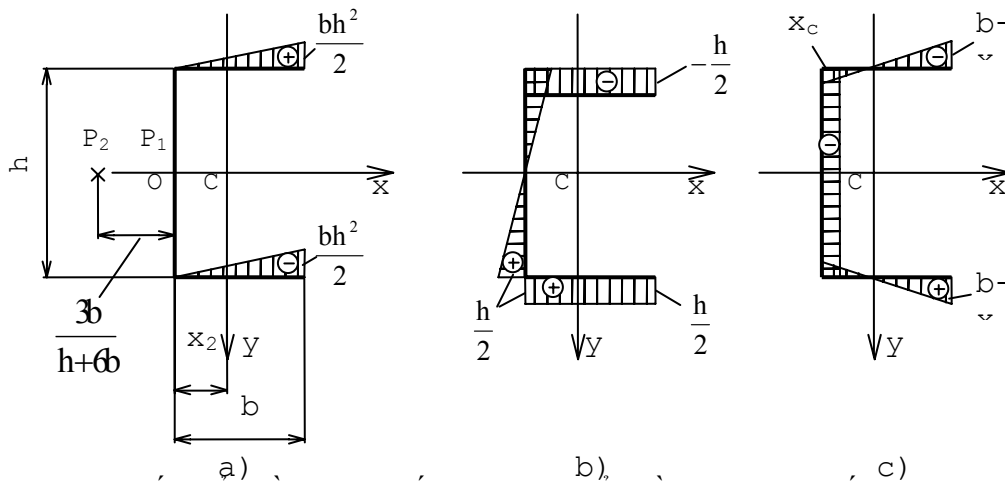
Suy ra :
$$e = \frac{T \cdot h}{R} = \frac{Qh^2 \delta \cdot b^2}{4J_x Q} = \frac{\delta h^2 b^2}{4J_x}$$

Nếu δ nhỏ hơn b và h nhiều thì ta có thể lấy gần đúng:

$$I_x = \frac{\delta h^3}{12} + 2 \left(\frac{h}{2} \right)^2 \cdot \delta \cdot b = \frac{\delta \cdot h^3}{12} + \frac{\delta b h^2}{2}$$

Ví dụ 7: Xác định tâm uốn của mặt cắt ngang chữ Γ như trên hình vẽ 22.17 Cho bề dày của nó là δ không đổi.

Bài giải: Trước hết ta chọn hệ trục cxy là hệ trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang. Lúc đầu ta lấy P_1 và O là cực và gốc của mặt cắt (xem hình 22.17a). Biểu đồ tọa độ quạt ω_1 tương ứng với cực P_1 ta đã gặp và được trình bày trên hình đó. Còn biểu đồ tọa độ x, y được biểu diễn trên hình 22.17b và 22.17c.



Ta nhận thấy biểu đồ tọa độ x là đối xứng, mà biểu đồ ω_1 lại phản đối xứng, cho nên:

Hình 22.17: Xác định tâm uốn của mặt cắt ngang chữ Γ

$$J_{\omega_1 y} = \iint_F x \omega_1 dF = 0$$

Còn $J_{\omega_1 x}$ được xác định như sau:

$$J_{\omega_1 x} = 2 \cdot \frac{bh}{2} \cdot b \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \delta = \frac{b^2 h^2}{4} \cdot \delta$$

Giá trị mô men quán tính của mặt cắt ngang đối với trục x sẽ là:

$$J_x = \frac{\left(b + \frac{\delta}{2} \right) (h + \delta)^3}{12} - \frac{\left(b - \frac{\delta}{2} \right) (h - \delta)^3}{12}$$

$$J_x = \frac{\delta h^2 (h + 6b)}{12}$$

Từ công thức (22-8) ta tìm được tọa độ của cực chính là:

$$a = -\frac{J_{\omega_1 x}}{J_x} = \frac{3b^2}{h + 6b}; b = 0$$

Tức là P_2 nằm trên trục x về phía âm và cách cực P_1 ban đầu một khoảng:

$$a = -\frac{3b^2}{h + 6b}$$

Chúng ta cũng có thể suy luận một cách khác: Trước tiên ta xác định mô men xoắn nội lực đối với P_1 :

$$M_{P_1} = 2 \frac{h}{2} \int_0^b \tau \cdot \delta \cdot dS = Q_y \frac{3b^2}{h + 6b}$$

Để P_2 là cực chính (là tâm uốn) thì mô men đối với nó phải bằng không, nghĩa là:

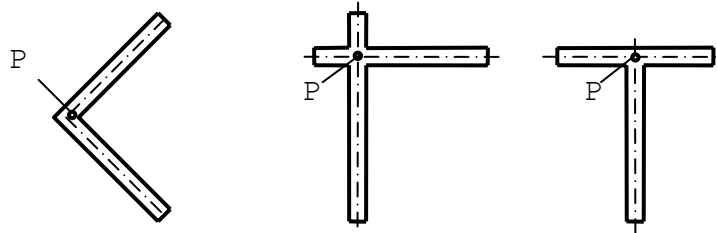
$$Q_y \cdot \overline{P_1 P_2} + Q_y \frac{3b^2}{h + 6b} = 0$$

Vậy :

$$\overline{P_1 P_2} = -\frac{3b^2}{h + 6b}$$

Chú ý: Đối với các mặt cắt có hai trục đối xứng thì tâm uốn sẽ trùng với trọng tâm của mặt cắt hoặc nếu mặt cắt có một trục đối xứng thì khi tải trọng tác dụng theo trục đó (điều này đã được nói và giới hạn trong chương uốn ngang phẳng).

Còn đối với những mặt cắt giải chữ nhật đồng quy tại một điểm (xem hình 22.18) thì tâm uốn hay là cực chính là điểm đồng quy đó vì rằng luồng ứng suất tiếp qua điểm đó nên không gây ra mô men xoắn đối với nó.

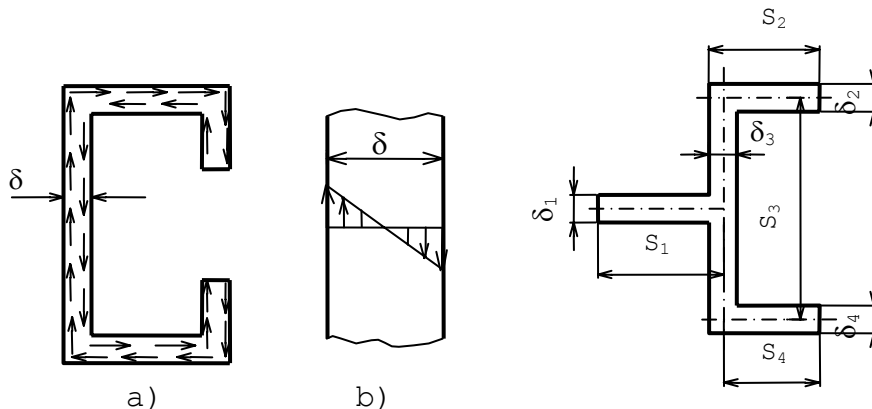


Hình 22.18: Tâm uốn của một số hình chữ nhật đồng quy

22.4. BÀI TOÁN THANH THÀNH MỎNG

XOẢN

Đối với những kết cấu thanh thành mỏng thường là những giải chữ nhật hẹp ghép lại, vì vậy những tính toán về xoắn đối với hình chữ nhật trong lý thuyết đàn hồi mà ta đã giới thiệu trong chương xoắn vẫn có thể sử dụng được đối với các kết cấu thanh thành mỏng. Sự phân bố ứng suất tiếp trong thanh thành mỏng được biểu diễn trên hình 22.19a và trên bề dày δ được phóng đại như trên hình 22.19b. Hình này chỉ rõ cho ta thấy ở mép giá trị ứng suất lớn nhất (giống như xoắn thanh mặt cắt chữ nhật đã gặp ở chương xoắn).



Hình 22.19: Sự phân bố ứng suất tiếp trong thanh thành mỏng. Hình 22.20: Sơ đồ tính mô men xoắn ở mặt cắt không thể kéo dài

Đối với những mặt cắt như trên hình 22.19a ta có thể tưởng tượng kéo ra thành một giải hình chữ nhật có cùng một bề dày không đổi, thì ứng suất tiếp lớn nhất ở giữa cạnh dài và trị số của nó là:

$$\tau_{\max} = \frac{3,33M_z}{\delta^2 \cdot S} \quad (22-14)$$

Góc xoay được tính với công thức:

$$\varphi = \frac{3,33M_z \cdot l}{G \cdot \delta^3 \cdot S} \quad (22-15)$$

Trong đó: δ - Bề dày của thanh; S- Chiều dài của đường chu tuyến; l- Chiều dài của thanh.

- Trong trường hợp này xem giải chữ nhật có tỉ số cạnh dài trên cạnh ngắn là $l/\delta = \infty$. Nên hệ số $\alpha=0,33$ và $\gamma=0,33$.

Cũng có khi với mặt cắt không thể kéo dài thành một giải chữ nhật như trên hình 22.20 chẳng hạn thì ta xem mô men xoắn M_z là tổng các mô men xoắn trong từng phần:

$$M_z = \frac{\varphi G}{3l} [\delta_1^3 \cdot S_1 + \delta_2^3 \cdot S_2 + \dots + \delta_n^3 \cdot S_n], \text{ Suy ra:}$$

$$\varphi = \frac{3M_z \cdot l}{G[\delta_1^3 \cdot S_1 + \delta_2^3 \cdot S_2 + \dots + \delta_n^3 \cdot S_n]} \quad (22-16)$$

Đối với những thanh mỏng hở từ kết quả ứng suất lớn nhất xuất hiện ở trung điểm cạnh dài có thể suy ra ứng suất lớn nhất ở nơi có bề dày lớn nhất. Giả sử đoạn đó là đoạn thứ i, thì :

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{3M_z}{\delta_i^2 \cdot S_i} \\ \varphi &= \frac{3M_z l}{G\delta_i^3 S_i} \end{aligned} \right\} \quad (22-17)$$

Giá trị này cũng là góc xoắn ở mặt cắt đó. Từ (22-17) ta có thể có :

$$\tau_{\max} = \varphi \cdot G \frac{\delta_i}{l} = \varphi G \frac{\delta_{\max}}{l}$$

Đưa giá trị φ tính từ (22-16) vào đây, cuối cùng ta có:

$$\tau_{\max} = \frac{3M_z \cdot \delta_{\max}}{\delta_1^2 \cdot S_1 + \delta_2^2 \cdot S_2 + \dots + \delta_n^2 \cdot S_n} \quad (22-18)$$

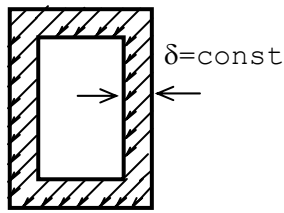
- Chúng ta xét trường hợp mặt cắt ngang có chu vi khép kín. Có thể nói sự phân bố ứng suất ở loại mặt cắt này khác với trường hợp mặt cắt hở. Nếu mặt cắt khép kín mà chiều dày δ của nó không thay đổi như trên hình 22.21, thì ứng suất tiếp cũng sẽ phân bố đều theo bề dày. Nếu mặt cắt ngang của thanh mỏng khép kín có bề dày thay đổi như hình 22.22a thì quy luật phân bố ứng suất phức tạp hơn. Thật vậy ta thử tách một đoạn thanh vô cùng bé có bề dày thay đổi (xem hình 22.22b) chịu xoắn thuần túy với M_z . Chúng ta hãy xét sự cân bằng của phân tố đó.

Phương trình chiếu các lực theo trục z ta có:

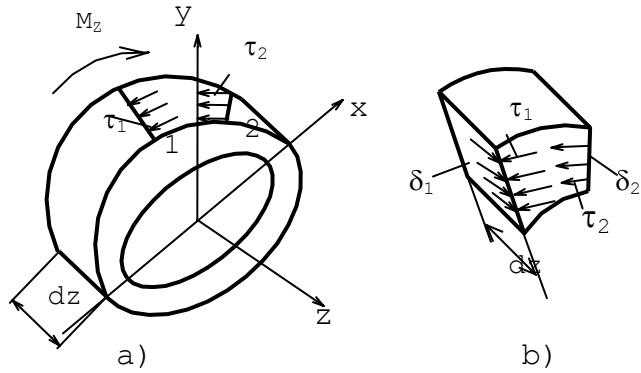
$$\tau_1 \delta_1 dz = +\tau_2 \delta_2 dz$$

hay

$$\tau_1 \delta_1 = +\tau_2 \delta_2$$



Hình 22.21: Sơ đồ phân bố ứng suất tiếp khi chiều dài không



Hình 22.22. Sơ đồ phân bố ứng suất tiếp khi chiều dài thay đổi

Chú ý: Theo luật đối ứng thì τ_1 theo phương z ở đường 1 là hướng vào đường 1 (xem hình 22.22b) và τ_2 theo phương z ở đường 2 là hướng ra đường 2, cho nên chiếu lên trục z ta có kết quả ở trên. Kết quả này cho ta kết luận là tích số $\tau \cdot \delta$ là hằng số trên chu vi của mặt cắt ngang. Như vậy nơi nào bề dày bé thì giá trị ứng suất lớn. Và trị số mô men xoắn trên mặt cắt ngang sẽ là:

$$M_z = \int_s \tau \cdot \delta \cdot \rho \cdot dS$$

Trong đó ρ là đoạn \overline{OA} trên hình 22.23, O là điểm bất kì nào đó trên mặt cắt. A là điểm trên phương τ mà ta kẻ đường vuông góc với nó, dS là vi phân của một đoạn chu tuyến quanh điểm B có τ tác dụng. Vì $\tau \cdot \delta$ là hằng số nên tích phân trên viết lại như sau:

$$M_z = \tau \cdot \delta \int_s \rho dS$$

Biểu thức tích phân này chẳng qua nó bằng hai lần diện tích giới hạn bởi đường chu tuyến khép kín của mặt cắt (trên hình 22.23). Nếu kí hiệu diện tích đó là F^* thì:

$$M_z = \tau \cdot \delta \cdot 2F^* \quad (22-19)$$

Từ đó có giá trị ứng suất tiếp cực đại:

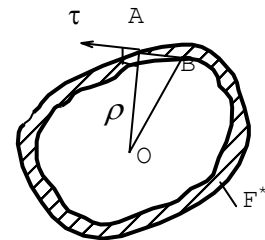
$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{2F^* \cdot \delta_{\min}} \quad (22-20)$$

Góc xoắn φ được tính theo phương pháp năng lượng như sau: Ta biết rằng trong trượt thuần túy thì thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong một đơn vị thể tích là bằng $\frac{\tau^2}{2G}$. Vậy thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong phân tố sẽ là:

$$du = \frac{\tau^2 \cdot \delta \cdot dz \cdot dS}{2G}$$

Vậy thế năng biến dạng đàn hồi trong toàn thanh sẽ là:

$$u = \frac{1}{2G} \int_s \tau^2 \delta \cdot dS \cdot dz = \frac{1}{2G} \int_s \frac{\tau^2 \delta^2 dS}{\delta}$$



Hình 22.23: Sơ đồ tính M_z

Mà theo (22-19) thì:
$$\tau^2 \delta^2 = \frac{M_Z^2}{4F^*}$$

Cho nên:

$$u = \frac{1 \cdot M_Z^2}{8GF^{*2}} \int_s \frac{dS}{\delta}$$

Biểu thức $\int_s \frac{dS}{\delta}$ phụ thuộc vào sự thay đổi chiều dày δ theo chu vi của mặt cắt ngang; nó cũng là một đặc trưng hình học.

Mặt khác, với sự tác dụng xoắn thuần túy của một mô men ngoại lực là M^* thì công của nó bằng thế năng biến dạng đàn hồi nói trên sẽ là:

$$U = \frac{1}{2} M^* \varphi$$

Do đây là bài toán xoắn thuần túy cho nên mô men nội lực và ngoại lực bằng nhau: $M^* = M_Z$

Từ đó ta suy ra:
$$\varphi = \frac{M_Z \cdot l}{4GF^{*2}} \int_s \frac{dS}{\delta} \quad (22-21)$$

Nếu δ là hằng số thì:

$$\varphi = \frac{M_Z \cdot l \cdot S}{4GF^{*2} \cdot \delta} \quad (22-22)$$

Ví dụ 8: Tính ứng suất và góc xoắn trong ống thành mỏng cuốn bằng thép lá trong hai trường hợp:

a/ Khi mép ống được tự do (hình 22.24a).

b/ Khi mép ống bị dính chặt (hình 22.24b).

Cho đường kính trung bình là D .

Bài giải:

a/ Ở phương án thứ nhất:

Thanh có mặt cắt ngang hở. Dựa vào các công thức (22-14) và (22-15), ta có:

$$\tau_{(1)} = \frac{3M}{\pi D \cdot \delta} \quad \text{và} \quad \varphi_{(1)} = \frac{3M \cdot l}{G \pi D \cdot \delta^3}$$

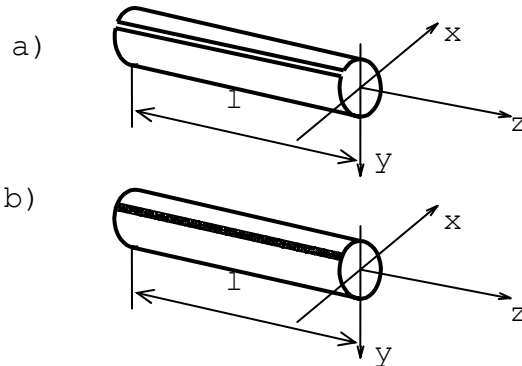
b/ Với phương án thứ hai:

Thanh có mặt cắt ngang kín, thì theo các công thức (22-20) và (22-22) ta có:

$$\tau_{(2)} = \frac{M^*}{2 \frac{\pi D^2}{4} \cdot \delta}$$

và

$$\varphi_{(2)} = \frac{M^* \cdot l \cdot \pi \cdot D}{4G \left(\frac{\pi D^2}{4} \right)^2 \cdot \delta}$$



Hình 22.24. Ống thành mỏng cuốn bằng thép lá:

a- Khi mép ống được tự do.

b- Khi mép ống bị dính chặt

Để so sánh hai trường hợp này ta lập tỉ số:

$$\frac{\tau_{(1)}}{\tau_{(2)}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{D}{\delta} \quad \text{và} \quad \frac{\varphi_{(1)}}{\varphi_{(2)}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{D^2}{\delta^2}$$

Như vậy độ lớn của ứng suất tỉ lệ cùng độ lớn D/δ và góc xoắn có tỷ lệ cùng độ lớn của D^2/δ^2 . Vì D lớn hơn δ rất nhiều do đó với các thanh mặt cắt ngang khép kín có độ cứng và khả năng chịu lực lớn hơn thanh tương tự có mặt cắt ngang hở

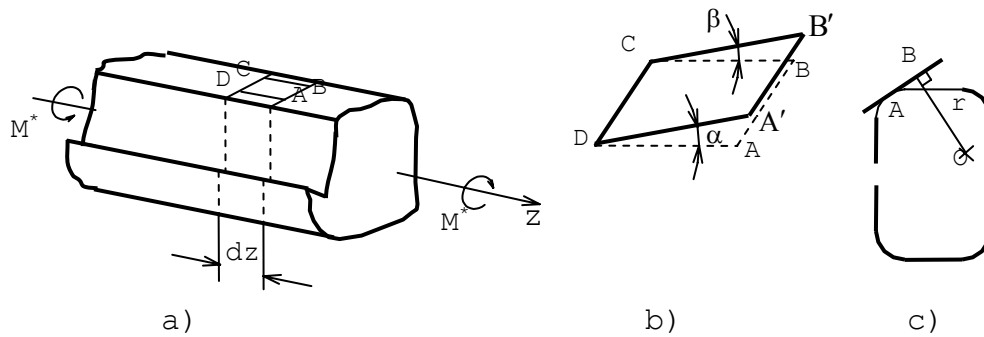
22.5. ĐỘ VÊNH CỦA MẶT CẮT NGANG KHI BỊ UỐN

Đối với thanh thành mỏng, đặc biệt là khi mặt cắt ngang là hở, thì khi chịu xoắn thuần túy mặt cắt ngang của thanh sẽ bị vênh. Để xác định độ vênh này chúng ta dựa vào các giả thuyết sau đây.

Ta giả thiết rằng biến dạng của thanh là bé và như vậy trong quá trình biến dạng chu tuyến của mặt cắt ngang vẫn giữ nguyên hình dáng ban đầu.

Chúng ta hãy xét một thanh thành mỏng hở chịu xoắn như trên hình 22.25a.

Giả sử rằng khi chịu xoắn mặt cắt ngang của thanh bị xoay đi quanh một điểm O nào đó được gọi là tâm xoắn.



Hình 22.25: Thanh thành mỏng hở chịu xoắn

Bây giờ chúng ta khảo sát phân tử $ABCD$ như trên hình 22.25b. Sau khi biến dạng các điểm sẽ về các vị trí mới, nhưng để xét biến dạng tương đối chúng ta coi như giữ cạnh CD , thì điểm $A \rightarrow A'$ và $B \rightarrow B'$. Và cạnh DA coi như trượt một góc α và CB trượt một góc tương đối β . Góc trượt γ sẽ là tổng $\alpha + \beta$. Ta tính các góc đó như sau (hình 22.25b):

$$\alpha = \frac{AA'}{dz}$$

Đoạn AA' là chuyển vị được tính bằng:

$$AA' = rd\varphi$$

Trong đó: - r là khoảng cách từ tâm xoắn O đến tiếp tuyến với chu tuyến tại điểm A (xem hình 22.25c); $d\varphi$ - là góc xoắn tương đối của AB so với CD .

Vậy :

$$\alpha = \frac{rd\varphi}{dz} = r \cdot \theta$$

θ - góc xoắn tỉ đối của thanh.

Nếu gọi W là chuyển vị của các điểm trên mặt cắt theo phương của trục Z . Ta có :

$$\beta = \frac{dW}{dS}$$

Vậy góc trượt γ sẽ được tính như sau:

$$\gamma = r\theta + \frac{dW}{dS} = \frac{\tau}{G} \quad (\text{theo Hooke})$$

Với giả thiết nêu trên ta có thể coi trên đường trung gian góc xoay của thành mỏng tại đó bằng 0, nên $\tau = 0$, vậy ta có:

$$dW = -r\theta \cdot dS = -\theta \cdot d\omega$$

(chú ý: $d\omega$ chính là vi phân toạ độ quạt của chu tuyến mặt cắt ngang).

Lấy tích phân đó ta có:

$$W = -\theta \int d\omega = -\theta \cdot \omega \quad (22-23)$$

Theo công thức (22-23) ta thấy chuyển vị W chính là độ vênh của các mặt cắt, nó phụ thuộc vào góc xoắn tỉ đối θ và toạ độ quạt ω .

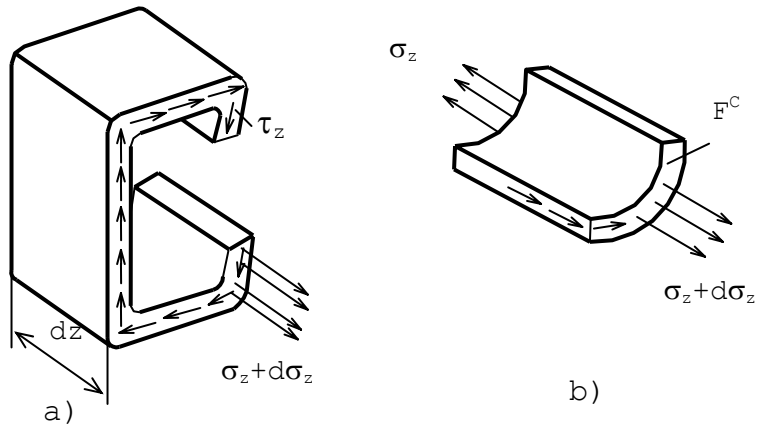
Sự thay đổi θ dọc trục z tạo nên một hệ ứng suất tiếp phụ. Thật vậy giả sử ta xét một đoạn thanh dz (xem hình 22.26a), nó sẽ có biến dạng theo dz sẽ là:

$$\varepsilon_z = \frac{dW}{dz} = -\frac{d\theta}{dz} \cdot \omega$$

Và ứng suất pháp tương ứng σ_z sẽ là:

$$\sigma_z = -E\omega \cdot \frac{d\theta}{dz} \quad (22-24)$$

Giả sử σ_z là một hàm số biến thiên theo z , tại mặt trước có σ_z tác dụng thì mặt sau tăng thêm một lượng dz sẽ có $\sigma_z + d\sigma_z$ tác dụng (xem hình 22.26b), Chính sự chênh lệch của ứng suất pháp này mà trên các thành mặt cắt phải xuất hiện ứng suất τ để đảm bảo sự cân bằng của phân tử dưới tác dụng của chúng (xem hình 22.26b). Chiếu tất cả các lực lên trục z , ta tìm thấy giá trị:



Hình 22.26: sự xuất hiện hệ ứng suất pháp và ứng suất tiếp khi θ thay đổi

$$\tau_z \cdot \delta = -\int_{F^c} \frac{d\sigma_z}{dz} \cdot dF$$

Trong đó F^c là phần diện tích trên mặt cắt ngang của phân tử đang xét. Thay trị số σ_z từ (22-24) vào đây ta có :

$$\tau_z \cdot \delta = E \frac{d^2\theta}{dz^2} \int_F \omega dF \quad (22-25)$$

Ta nhận thấy rằng ứng suất tiếp trên đường trung gian cũng như các điểm khác trên các mặt cắt vẫn khác không. Tức là ngay đường chu tuyến cũng bị vênh, cho nên các công thức đã xây dựng mang tính gần đúng.

22.6. XOẮN KIỀM CHẾ THANH THÀNH MỎNG CÓ MẶT CẮT HỖ.

Một thanh thành mỏng được xem là chịu xoắn kiểm chế khi ở nơi nào đó của thanh có những liên kết hạn chế độ vênh của mặt cắt ngang. Ví như thanh chịu ngàm một đầu, đầu kia tự do hoặc những gờ cứng được hàn vào thanh...

Dưới đây ta xét một thanh ngàm một đầu và một đầu tự do chịu xoắn thuần túy như trên hình 22.27. Ở nơi ngàm thì thành phần chuyển vị W bằng không, ở đây không có sự vênh được. Nhưng càng xa đầu ngàm thì sự xoắn càng tự do nên độ vênh của mặt cắt ngang càng lớn. Với bài toán xoắn thuần túy nên lực dọc và mô men uốn đều không có. Cho nên thành phần ứng suất pháp do xoắn gây ra phải tạo ra một hệ nội lực cân bằng. Vì vậy ta có:

$$\int_F \sigma_z y dF = 0; \int_F \sigma_z x dF = 0; \int_F \sigma_z dF = 0$$

Thay giá trị σ_z tính ở biểu thức (20-24) vào đây ta được:

$$\int_F \omega y dF = 0; \int_F \omega x dF = 0; \int_F \omega dF = 0$$

Toạ độ quạt ω được tính với tâm xoắn. Hai biểu thức đầu chứng tỏ tâm xoắn trùng với cực chính của mặt cắt và tâm xoắn cũng trùng với tâm uốn. Tích phân thứ 3 cho ta xác định góc chính của toạ độ quạt ω .

Mô men xoắn do ứng suất tiếp tạo nên gồm hai đại lượng:

$$M_z = M_1 + M_2$$

M_1 - Mô men xoắn do ứng suất vòng gây nên (xem lại hình 22.19). Trị số này được xác định như sau

$$M_1 = GJ_0\theta \quad (22-26)$$

Trong đó: J - là một đặc trưng hình học của mặt cắt ngang mà ta gọi là độ cứng khi xoắn (xem chương xoắn thuần túy). Chẳng hạn với một mặt cắt ngang, nếu có thể triển khai thành một giải hình chữ nhật thì công thức (22-15), J được tính như sau:

$$J = \frac{\delta^3 \cdot S}{3}$$

Hoặc mặt cắt không thể khai triển thành giải chữ nhật thì :

$$J = \frac{\delta_1^3 \cdot S_1 + \delta_2^3 S_2 + \dots + \delta_n^3 S_n}{3}$$

M_2 là mô men xoắn luồng τ_z gây ra (xem hình 22-26):

$$M_2 = \int_S \tau_z \delta \cdot r \cdot dS = \int_F \tau_z \cdot \delta \cdot d\omega$$

Đưa giá trị τ_z từ biểu thức (22-25) vào đây ta có :

$$M_2 = E \frac{d^2\theta}{dz^2} \int_F \left(\int_{F^c} \omega dF \right) d\omega$$

Dùng phương pháp tích phân đoạn, ta có thể viết lại như sau:

$$M_2 = E \frac{d^2\theta}{dz^2} \left[\omega \int \omega dF \Big|_{S_1}^{S_2} - \int \omega^2 F \right]$$

Nhưng $\int \omega dF \Big|_{S_1}^{S_2} = 0$

(nhìn vào hình 22.10 thì hiểu được điều này)

Vậy: $M_2 = -EJ_\omega \frac{d^2\theta}{dz^2} \quad (22-27)$

Cuối cùng ta được mô men tổng cộng sẽ là:

$$M_z = GJ\theta - EJ \frac{d^2\theta}{dz^2}$$

Nếu ta đặt $\frac{GJ}{EJ} = \alpha^2$ thì phương trình vi phân trên sẽ được viết lại :

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} - \alpha^2\theta = -\alpha \frac{M_z}{GJ} \quad (22-28)$$

M_z là một hàm đối với z , xem như đã biết theo điều kiện bài toán.

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đó là :

$$\theta = C_1 \cdot \text{Sh}\alpha z + C_2 \cdot \text{ch}\alpha z + \theta^* \quad (22-29)$$

Trong đó θ^* - là nghiệm riêng của phương trình vi phân bậc 2 (22-28); các hằng số tích phân C_1 và C_2 được xác định từ điều kiện biên (liên kết) của thanh.

Ví dụ 9: Xác định ứng suất pháp và ứng suất tiếp trong thanh chữ I ngàm một đầu và một đầu tự do chịu xoắn như trên hình 22.27. Các dữ kiện cho như sau: $h=200\text{mm}$; $b=100\text{mm}$; $\delta=10\text{mm}$; $l=1\text{m}$; $\mu=0,3$; $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$; $M_z=M^*$ = hằng số.

Bài giải: Sử dụng phương trình (22-28):

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} - \alpha^2\theta = -\alpha^2 M^*$$

Ta chọn nghiệm riêng dưới dạng:

$$\theta^* = \frac{M^*}{GJ}$$

Vậy nghiệm tổng quát sẽ là:

$$\theta = C_1 \cdot \text{Sh}\alpha z + C_2 \cdot \text{ch}\alpha z + \frac{M^*}{GJ}$$

Các hằng số C_1 , C_2 được xác định từ các điều kiện biên sau :

Tại ngàm $z=0$ thì $W=0$; khi $z=l$ (đầu tự do) ứng suất pháp σ_z bằng không.

Từ các biểu thức (22-23) và (22-24) ta có thể viết lại như sau:

Khi $z=0 \rightarrow \theta=0$

Khi $z=l \rightarrow \frac{d\theta}{dz} = 0$

Cuối cùng ta có một hệ phương trình để xác định C_1 và C_2 như sau:

$$\left. \begin{aligned} C_2 + \frac{M^*}{GJ} &= 0 \\ C_1 \cdot \alpha \cdot \text{ch}\alpha l + C_2 \cdot \alpha \cdot \text{sh}\alpha l &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Giải hệ phương trình này ta được giá trị các hằng số C_1 và C_2 :

$$C_1 = \frac{M^*}{GJ} \text{th}\alpha l; \quad C_2 = -\frac{M^*}{GJ}$$

Vậy giá trị góc xoắn tỉ đối sẽ là:

$$\theta = \frac{M^*}{GJ} [1 + \text{th}\alpha l \cdot \text{sh}\alpha z - \text{ch}\alpha z]$$

Góc xoắn lớn nhất tại đầu mút tự do sẽ là:

$$\varphi = \int_0^l \theta dz = \frac{M^* l}{GJ} \left[1 - \frac{1}{\alpha l} \text{th}\alpha l \right]$$

Giá trị ứng suất pháp lớn nhất tại ngàm sẽ là:

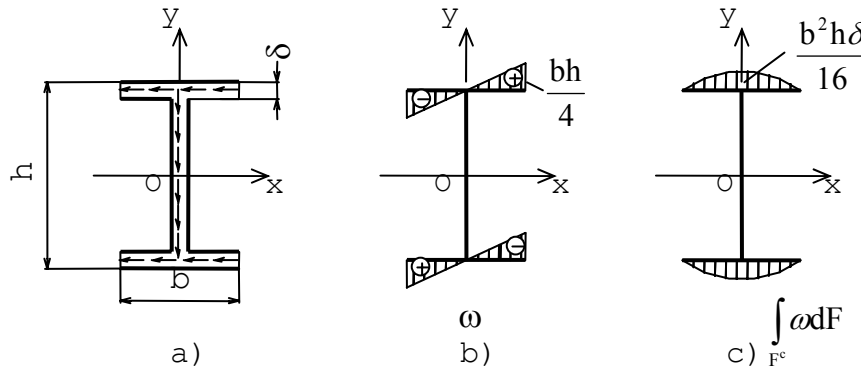
$$\sigma_z = -E\omega \frac{d\theta}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{EM^*}{GJ} \cdot \omega \cdot \alpha \text{th}\alpha l$$

Giá trị của mô men xoắn M_1 và M_2 tại một mặt cắt bất kì sẽ là:

$$M_1 = GJ\theta = M^* [1 + \text{th}\alpha l \cdot \text{sh}\alpha z - \text{ch}\alpha z]$$

$$M_2 = -EJ_\omega \frac{d^2\theta}{dz^2} = -M^* [1 + \text{th}\alpha l \cdot \text{sh}\alpha z - \text{ch}\alpha z]$$

J_ω được xác định như đã chỉ dẫn ở phần trên. Ví dụ đối với sắt hình chữ I thì biểu đồ tọa độ chính được trình bày trên hình 22.28b. Với phép nhân biểu đồ VêrêSaghin ta



Hình 22.28: Xác định ứng suất pháp và ứng suất tiếp trong thanh chữ I ngàm một đầu và một đầu tự do (xem hình 22.27); Biểu đồ tọa độ quạt (b); Ứng suất tiếp lớn nhất tại giao điểm (c)

có :

$$J_\omega = \frac{1}{24} b^3 h^2 \cdot \delta$$

Độ cứng khi xoắn của mặt cắt ngang:

$$J = \frac{1}{3} \delta^3 (2b + h)$$

Do đó hệ số α được xác định như sau:

$$\alpha^2 = \frac{4}{1 + \mu} \frac{\delta^2 (2b + h)}{b^3 \cdot h^2} = 3,08 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{mm}^2}$$

$$\alpha = 1,5 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{mm}} \quad \text{và} \quad \alpha l = 1,75$$

Tra bảng các hàm số hyperbolic, ta tìm được:

$$\frac{1}{\alpha l} \text{th}\alpha l = \frac{0,0411}{1,75} = 0,537$$

Tiếp theo ta tính được góc xoắn tự do là:

$$\varphi = \frac{M^* l}{GJ} \cdot 0,46$$

So sánh với thanh mà hai đầu tự do, khi đó góc xoắn của thanh là:

$$\varphi = \frac{M^* l}{GJ}$$

Ta thấy khi có ngàm thì góc xoắn ở đầu tự do của nó chỉ bằng 0,46 góc xoắn khi hai đầu tự do hoàn toàn.

Giá trị ứng suất pháp lớn nhất sẽ là:

$$\sigma_{\max} = \frac{EM^*}{GJ} \cdot \frac{bh}{4} \cdot \alpha \theta \alpha l = 161 \cdot 10^{-3} M^* \text{ N/cm}^2$$

Chú ý :Thông nhất về đơn vị.

Trị số ứng suất tiếp lớn nhất là: $\tau_{1\max} = \frac{3M_1}{\delta^2(2b+h)}$ (ứng suất tiếp ở đế)

$$\tau_{2\max} = -\frac{M_2}{J_{\omega} \delta} \int_{F^c} \omega dF \quad (\text{ứng suất tiếp ở lòng})$$

Ở ngàm thì $M_1=0, M_2=M^*$

Do đó: $\tau_{1\max} = 0$

$$\text{Và} \quad \tau_{2\max} = -\frac{M^*}{J_{\omega} \cdot \delta} \left(\int_{F^c} \omega dF \right)_{\max} = \pm \frac{3}{2} \frac{M^*}{bh\delta}$$

$$\tau_{2\max} = \pm 0,75 \cdot 10^{-3} M^* \text{ N/cm}^2$$

Điểm đạt được $\tau_{2\max}$ là giao điểm giữa lòng và đế, vì tại đó $\int_{F^c} \omega dF$ là lớn nhất (xem

hình 22.28c).

Tại đầu tự do khi $z=l, M_1$ và M_2 có giá trị: $M_1 = 0,6614M^*$ và $M_2 = 0,3386M^*$

Lúc này ứng suất tiếp sẽ là :

$$\tau_{1\max} = 49,6 \cdot 10^{-3} M^* \text{ N/cm}^2$$

$$\tau_{2\max} = 2,5 \cdot 10^{-3} M^* \text{ N/cm}^2$$

Trong trường hợp xoắn thuần túy tự do (không có sự kiềm chế) thì:

$$\tau_{1\max} = \frac{3M^*}{\delta^2(2b+h)} = 75 \cdot 10^{-3} M^* \text{ N/cm}^2$$

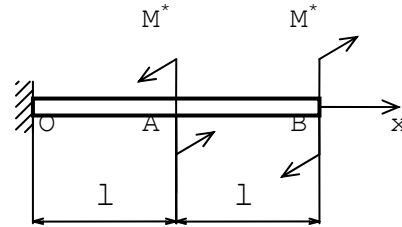
$$\tau_{2\max} = 0$$

Ví dụ 10: Hãy xác định góc xoắn tại A của thanh thành mỏng chịu tác dụng của hai mô men xoắn ngược chiều nhau như trên hình 22.29.

Bài giải: Tại mặt cắt A do hai mô men xoắn ngược nhau nên khi thanh OB không phải là thanh thành mỏng thì sẽ không bị xoay, tức là không có góc xoắn. Nhưng ở đây là thanh thành mỏng thì tại A sẽ có góc xoắn.

Chúng ta viết phương trình góc xoắn tỉ đối cho cả hai đoạn OA và AB:

1/ Đối với đoạn OA vì $M_z=0$, nên:



Hình 22.29: Sơ đồ xác định góc xoắn

$$\theta_1 = C_1 \operatorname{sh} \alpha z + C_2 \operatorname{ch} \alpha z$$

2/ Đối với đoạn AB thì:

$$\theta_2 = C_3 \operatorname{sh} \alpha z + C_4 \operatorname{ch} \alpha z + \frac{M^*}{GJ}$$

Những điều kiện biên để xác định các hằng số tích phân như sau:

Tại $z=0$, $\theta_1 = 0$

Tại $z=l$ thì: $\theta_1 = \theta_2$ và $\frac{d\theta_1}{dz} = \frac{d\theta_2}{dz}$

(Bởi vì tại A thì tính góc xoắn và ứng suất tính theo công thức của hai đoạn phải như nhau, do tính liên tục của thanh).

Tại $z=2l$ (tại đầu tự do) thì: $\frac{d\theta_1}{dz} = 0$ vì $\sigma_z = 0$

Dựa vào 4 điều kiện biên trên ta xác định được các phương trình để xác định C_1 , C_2 , C_3 và C_4 :

$$\left. \begin{aligned} C_1 \operatorname{sh} \alpha l - C_3 \operatorname{sh} \alpha l - C_4 \operatorname{ch} \alpha l &= \frac{M^*}{GJ} \\ C_1 \operatorname{ch} \alpha l - C_3 \operatorname{ch} \alpha l - C_4 \operatorname{sh} \alpha l &= 0 \\ C_3 \operatorname{ch} 2\alpha l + C_4 \operatorname{sh} 2\alpha l &= 0 \\ C_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Giải hệ phương trình trên ta có được các hằng số C_1 , C_2 , C_3 và C_4 .

Chú ý :

$$\operatorname{ch} \alpha l = \frac{e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}}{2}$$

$$\operatorname{sh} \alpha l = \frac{e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}}{2}$$

Các giá trị của các hằng số tích phân trên sẽ là:

$$C_1 = \frac{M^* \operatorname{sh} \alpha l}{G \cdot J \cdot \operatorname{ch} 2\alpha l}$$

$$C_2 = 0$$

$$C_3 = \frac{M^* \operatorname{th} \alpha l}{G \cdot J \cdot e^{\alpha l}}$$

$$C_4 = -\frac{M^*}{G \cdot J \cdot e^{\alpha l}}$$

Vậy:

$$\theta_1 = \frac{M^*}{GJ} \cdot \frac{\operatorname{sh} \alpha l}{\operatorname{ch} 2\alpha l} \cdot \operatorname{sh} \alpha \cdot z$$

Và góc xoắn tại A sẽ là :

$$\varphi = \int_0^l \theta_1 dz = \frac{M^*}{\alpha GJ} \cdot \frac{\operatorname{sh} \alpha l}{\operatorname{ch} 2\alpha l} \cdot (\operatorname{ch} \alpha l - 1)$$

Giá trị α được xác định từ biểu thức:

$$\alpha^2 = \frac{GJ}{EJ_\omega}$$

Góc xoắn A là do độ vênh của mặt cắt ngang giữa hai đoạn gây ra.

22.7. TRƯỜNG HỢP CHỊU LỰC TỔNG QUÁT CỦA THANH THÀNH MỎNG HỒ.

22.7.1. Khái niệm về Bimomen.

Chúng ta đã biết, khi θ là một hàm số đối với z , thì do sự vênh của các mặt cắt ngang mà trên nó xuất hiện một hệ ứng suất tiếp phụ τ_z và ứng suất pháp phụ là:

$$\sigma_z = -E \cdot \omega \cdot \frac{d\omega}{dz} \quad (22-30)$$

M_2 là một mô men xoắn gây nên bởi ứng suất τ_z ta đã biết ở trên, σ_z theo (22-30) gây nên một nội lực tự cân bằng. Để thỏa mãn điều kiện cân bằng đó thì ω phải được tính từ cực chính và gốc chính.

Bây giờ chúng ta hãy chú ý đến biểu thức sau đây:

$$B = \int_F \sigma_z \cdot \omega dF = - \int_F E \omega^2 \frac{d\theta}{dz} dF$$

$E \cdot \frac{d\theta}{dz}$ là hằng số, nên:

$$B = -E \frac{d\theta}{dz} \int_F \omega^2 dF = -E \frac{d\theta}{dz} \cdot J_\omega \quad (22-31)$$

Giá trị B này được gọi là đại lượng Bimomen.

Ta thay (22-31) vào (22-24) ta sẽ được:

$$\sigma_z = \frac{B}{J_\omega} \cdot \omega \quad (22-32)$$

Biểu thức (22-32) này có dạng tương tự như biểu thức tính ứng suất pháp do mô men uốn gây nên mà ta đã gặp trong uốn thuần túy. Thứ nguyên của Bimomen là $N \cdot cm^2$ và nó là một hệ nội lực tự cân bằng.

Dưới đây xin dẫn ra một vài trị số B.

Ví dụ với thanh chữ I chịu tác dụng của 4 lực ở các đỉnh. Bốn lực này tạo thành hai ngẫu lực tự cân bằng (xem hình 22.30), thì B được xác định như sau:

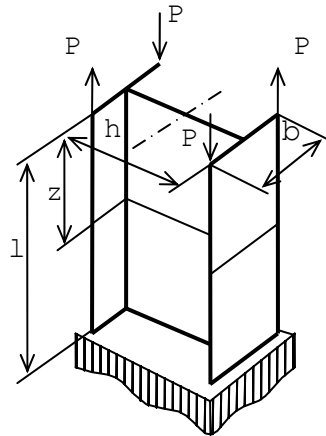
$$B = \int_F \sigma_z \cdot \omega \cdot dF = \sum_{i=1}^4 P_i \omega_i$$

ω_i được tính với cực chính và gốc chính. Trong trường hợp này các điểm đó trùng với trọng tâm của mặt cắt. Do đó ta có:

$$B = 4P \cdot \frac{bh}{4} = P \cdot b \cdot h$$

Trên hình 22.30 dễ dàng thấy rằng các mặt cắt không có lực dọc vì 4 lực P đó tự triệt tiêu và cũng không có mô men uốn vì các mô men cũng tự triệt tiêu.

22.7.2. Trường hợp chịu lực tổng quát của thanh thành mỏng.



Hình 22.30: Sơ đồ xác định trị số B với thanh chữ I chịu tác dụng của 4 lực ở

Khi chịu lực tổng quát thì hệ ứng suất trên mặt cắt ngang là tổng ứng suất pháp do lực dọc, mô men uốn và Bimomen sinh ra:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x + \frac{B}{J_\omega} \cdot \omega$$

Và ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang sẽ do các mô men xoắn M_z , do mô men kiềm chế và các lực cắt Q_y, Q_x sinh ra.

$$\tau_{Q_y} = \frac{Q_y \cdot S_x}{J_x \cdot \delta} ; \quad \tau_{Q_x} = \frac{Q_x \cdot S_y}{J_y \cdot \delta} ; \quad \tau_1 = \frac{3M_z}{\delta^2 \cdot S}$$

hoặc

$$\tau_1 = \frac{3M_z \cdot \delta_{\max}}{\delta_1^3 \cdot S_1 + \delta_2^3 \cdot S_2 + \dots + \delta_n^3 \cdot S_n}$$

và

$$\tau_2 = \frac{E}{\delta} \cdot \frac{d^2\theta}{dz^2} \int \omega dF$$

Ví dụ 11: Hãy tính góc tỉ đối của thanh chịu lực như trên hình 22.30.

Bài giải: Do các lực ngược chiều từng đôi một nên $M_z=0$, nên nghiệm của phương trình (22-28) sẽ là:

$$\theta = C_1 \operatorname{sh}\alpha z + C_2 \operatorname{ch}\alpha z$$

Với điều kiện biên:

Tại $z=0 \rightarrow B=P \cdot h \cdot b$

Tại $z=l \rightarrow W=0$

Căn cứ (22-31) và (22-23) ta có: $\left(\frac{d\theta}{dz}\right)_{z=0} = C_1 \cdot \alpha = -\frac{P \cdot b \cdot h}{EJ_\omega}$

Từ $z=l$ thì $C_1 \operatorname{sh}\alpha l + C_2 \operatorname{ch}\alpha l = 0$

Từ đây ta xác định được C_1 và C_2 , vậy:

$$\theta = \frac{Pbh}{\alpha EJ_\omega} [\operatorname{th}\alpha l \cdot \operatorname{ch}\alpha \cdot z - \operatorname{sh} \cdot z]$$

Nếu như l rất dài thì $\operatorname{th}\alpha l \approx 1$ và $\theta = \frac{Pbh}{\alpha EJ_\omega} e^{-\alpha z}$.

Với biểu thức này ta thấy θ sẽ nhỏ dần theo tọa độ z .

Ví dụ 12: Một thanh chịu lực như trên hình 22.31. Hãy khảo sát góc xoắn φ , góc xoắn tỉ đối θ và thành phần Bimomen của mặt cắt. Sau đó tính ứng suất trên mặt cắt ngang của nó.

Bài giải: Trong trường hợp này lực P không những gây ra kéo, uốn mà còn gây ra sự xoắn đối với thanh. Về mặt ngoại lực thì $M_z=0$ ở mọi mặt cắt cho nên giá trị góc xoắn tỉ đối theo (22-28) sẽ là:

$$\theta = C_1 \operatorname{sh}\alpha z + C_2 \operatorname{ch}\alpha z$$

Với hệ tọa độ chọn như trên hình vẽ, thì các điều kiện biên sẽ là : $z=0$ và $z=l$ thì $\theta=0$, từ đó chúng ta tìm được Bimomen sẽ là:

$$B = \int_F \sigma \omega dF = P \cdot \omega_A$$

ω_A là tọa độ quạt của điểm đặt lực đối với cực chính và gốc chính (A chính là tâm xoắn đã được xác định ở hình 22.15).

Từ (22-31) ta có: $\left(\frac{d\theta}{dz}\right)_{z=0} = \left(\frac{d\theta}{dz}\right)_{z=l} = -\frac{P \cdot \omega_A}{EJ_\omega} = -\frac{B}{EJ_\omega}$

Với các hệ thức này ta xác định được C_1 và C_2 như sau:

$$C_1 = -\frac{B_0}{\alpha EJ_\omega} \cdot \frac{\text{ch}\alpha l - 1}{\text{sh}\alpha l}; C_2 = \frac{B_0}{\alpha EJ_\omega}$$

Vậy góc xoắn tỉ đối sẽ là:

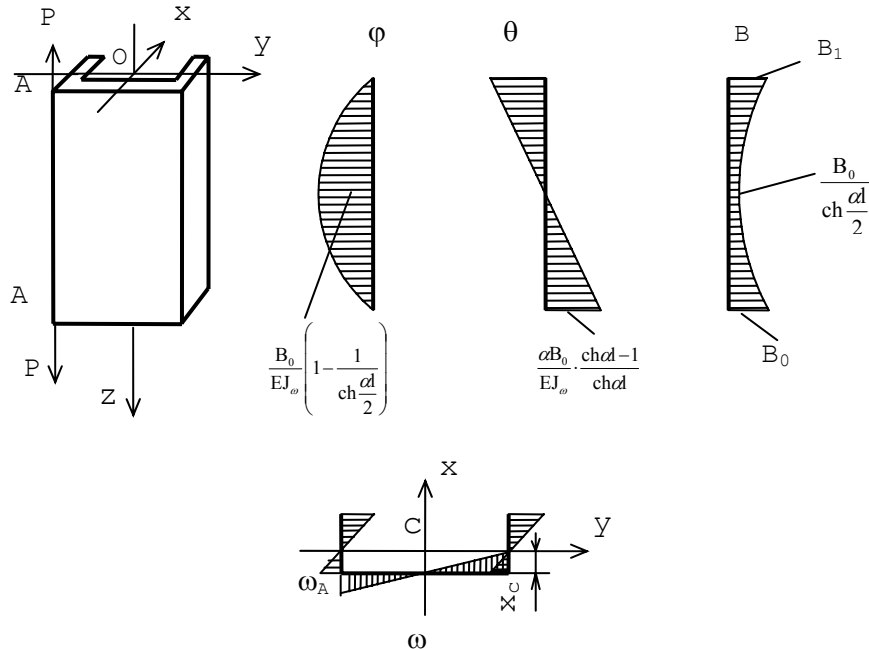
$$\theta = \frac{B_0}{\alpha EJ_\omega} \cdot \frac{1}{\text{sh}\alpha l} [\text{sh}\alpha \cdot z - \text{sh}\alpha l + \text{sh}\alpha(1-z)]$$

Và góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt ở góc tọa độ và mặt cắt ở tọa độ z sẽ là :

$$\varphi = \int_0^z \theta dz = \frac{B_0}{\alpha^2 \cdot E \cdot J_\omega} \cdot \frac{1}{\text{sh}\alpha l} \cdot [\text{sh}\alpha z - \text{sh}\alpha l + \text{sh}\alpha(1-z)]$$

Các biểu đồ biểu diễn các đại lượng ω , φ , θ và B được trình bày trên hình 22.31. Ứng suất pháp tại một điểm bất kì nào đó trên mặt cắt ngang sẽ là:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x + \frac{B}{J_\omega} \cdot \omega$$



Hình 22.31: Sơ đồ xác định φ , θ , B của một

Trong đó các giá trị tuyệt đối của các thành phần nội lực là:

$$N_z = P; M_x = P \cdot \frac{h}{2}; M_y = P \cdot x_0$$

Và Bimomen được xác định:

$$B = -\frac{B_0}{\alpha} \cdot \frac{1}{\text{sh}\alpha l} [\alpha \text{sh}\alpha z + \text{sh}\alpha(1-z)]$$

CÂU HỎI TỰ HỌC

22.1. Cách xác định đặc trưng quạt của một hình phẳng ?

- 22.2. Các đặc trưng của một mặt cắt ngang là gì ? Cách xác định chúng.
22.3. Các biểu thức để tính ứng suất tiếp trong các thanh thành mỏng ?
22.4. Một thanh thành mỏng khi bị xoắn sẽ xuất hiện ứng suất như thế nào ? Sự khác nhau giữa các mặt cắt ngang là hở và mặt cắt ngang là kín ?
22.5. Nói về sự xoắn kiềm chế.
22.6. Đại lượng Bimomen là gì ? Khi nào thì xuất hiện nó ? Cách tính ?

