Chương 23

BÀI TOÁN TIẾP XÚC

Trong các ngành kĩ thuật chúng ta gặp rất nhiều trường hợp hai vật thể tiếp xúc với nhau. Ví dụ như sự tiếp xúc của hai bánh răng ăn khớp, sự tiếp xúc giữa bánh vít và trục vít, giữa ổ bi với bạc, giữa vành trong của ổ bi với trục truyền động, giữa hai trục cán với nhau...Khi mới tiếp xúc, ban đầu có thể là điểm hay đường, nhưng sau khi biến dạng tăng lên thì sự tiếp xúc của hai vật thể đàn hồi sẽ biến thành tiếp xúc mặt. Diện tích tiếp xúc thường rất bé so với bề mặt của vật thể, nên sự xuất hiện giữa biến dạng và ứng suất chỉ tập trung ở miền tiếp xúc có tính cục bộ. Điều đó có nghiã là biến dạng và ứng suất chỉ tập trung ở miền tiếp xúc và giảm rất nhanh ở ngoài miền tiếp xúc, đồng thời ứng suất xuất hiện ở miền tiếp xúc có giá trị rất lớn, nó dẫn đến sự phá huỷ ở vùng đó.

Ứng suất có thể là ứng suất tĩnh, cũng có thể là ứng suất động hoặc ứng suất thay đổi theo thời gian. Khi chi tiết chịu ứng suất tiếp xúc thay đổi theo thời gian nó cũng gây ra hiện tượng mỏi lớp bề mặt và dĩ nhiên nó cũng làm cho các vết nứt vi mô phát triển thành những vết nứt bề mặt và bề mặt sẽ bị phá huỷ, làm cho bề mặt bị rỗ, hoặc tróc.

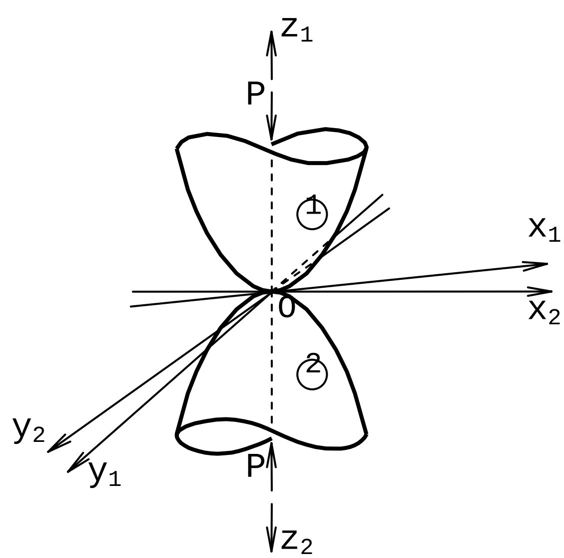
Trong khi xem xét bài toán tiếp xúc chúng ta cần công nhận một số lời giải cũng như kết quả mà lí thuyết đàn hồi đã chứng minh.

23.1. BÀI TOÁN TIẾP XÚC CỦA HEZT.

Giả sử có hai vật thể đàn hồi, đồng nhất, đẳng hướng tiếp xúc với nhau tại điểm O không phải là điểm kì dị. Lúc đó vật thể (1) tác dụng lên vật thể (2) một lực ép P (xem hình 23.1). Bây giờ chúng ta hãy xác định diện tích tiếp xúc, độ dịch gần của hai vật thể, quy luật phân bố áp suất trên diện tích tiếp xúc. Tức là nghiên cứu trạng thái biến dạng, ứng suất xuất hiện ở hai vật thể tiếp xúc đó để tính toán độ bền và độ cứng của chúng.

23.1.1. Quan hệ hình học đối với bề mặt của hai vật thể tiếp xúc.

Trước hết chúng ta tạo các hệ trục như trên hình vẽ 23.1. Hai hệ trục toạ độ đó chung gốc O-là điểm tiếp xúc hai vật thể. Các hệ trục Ox_1y_1 và Ox_2y_2 cùng nằm trong một mặt phẳng tiếp xúc chung của hai vật thể đang khảo sát. Các trục Oz_1 và Oz_2 trùng với pháp tuyến chung của hai mặt cong có chiều dương hướng vào trong mỗi vật thể đang xét. Có thể xem phương trình của hai mặt vật thể cũng như quanh vùng tiếp xúc là hàm của toạ độ x_1,y_1 và x_2,y_2.



Hình 23.1: Hai vật thể đàn hồi, đồng nhất và đẳng hướng tiếp xúc với nhau

$$Z_1 = F_1(x_1, y_1); \quad Z_2 = F_2(x_2, y_2) \qquad (21\text{-}1)$$

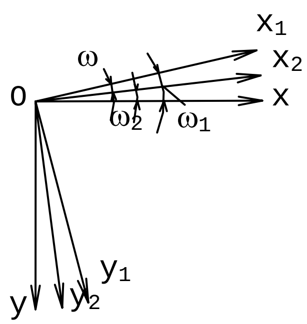
Nếu ta chọn các hệ trục Ox_1y_1 và Ox_2y_2 sao cho chúng trùng với phương các toạ độ cong chính, theo giáo trình hình học giải tích thì các phương trình hình học (23-1) sẽ có dạng:

$$\left.\begin{aligned} 2Z_1 &= K_{11}\cdot x_1^2 + K_{12}\cdot y_1^2 \\ 2Z_2 &= K_{21}\cdot x_2^2 + K_{22}\cdot y_2^2 \end{aligned}\right\} \qquad (23\text{-}2)$$

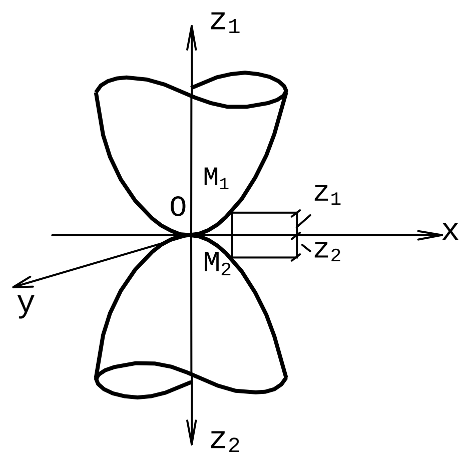
Trong đó K_{11}, K_{12}, K_{21} và K_{22} là độ cong chính của các mặt vật thể tại điểm tiếp xúc (tại gốc O) và có giá trị dương khi tâm cong tương ứng ở bên trong vật thể.

Một cách tổng quát có thể coi các trục x_1, y_1 và x_2, y_2 không trùng nhau.

Bây giờ chúng ta hãy chọn một hệ trục chung Oxy cho hai vật thể có gốc tại O và cũng nằm trong mặt tiếp xúc chung. Các trục x_1, x_2 tạo với trục x những góc tương ứng ω_1,ω_2 như trên hình vẽ 23.2. Và ta có hệ thức đổi trục toạ độ như sau:



Hình 23.2:Hệ trục toạ độ



Hình 23.3: Biểu diễn độ dịch gần của hai vật thể

$$\begin{aligned} x_1 &= x\cos\omega_1 - y\sin\omega_1 \\ y_1 &= x\sin\omega_1 + y\cos\omega_1 \\ x_2 &= x\cos\omega_2 - y\sin\omega_2 \\ y_2 &= x\sin\omega_2 + y\cos\omega_2 \end{aligned}$$

Thay các giá trị này vào biểu thức (23-2), ta được:

$$\begin{aligned} 2Z_1 &= x^2\left(K_{11}\cos^2\omega_1 + K_{12}\sin^2\omega_1\right) + y^2\left(K_{11}\sin^2\omega_1 + K_{12}\cos^2\omega_1\right) - \\ &\quad - xy\left(K_{11} - K_{12}\right)\sin 2\omega_1 \\ 2Z_2 &= x^2\left(K_{21}\cos^2\omega_2 + K_{22}\sin^2\omega_2\right) + y^2\left(K_{21}\sin^2\omega_2 + K_{22}\cos^2\omega_2\right) \\ &\quad - xy\left(K_{21} - K_{22}\right)\sin 2\omega_2 \end{aligned}$$

Ta có thể viết ở một dạng gọn hơn:

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= A_1x^2 - A_2xy + A_3y^2 \\ Z_2 &= B_1x^2 - B_2xy + B_3y^2 \end{aligned}\right\} \qquad (23\text{-}3)$$

Trong đó các giá trị A_1....B_3 là các hằng số nào đó phụ thuộc vào điều kiện bài toán. Nếu chọn được hệ toạ độ Oxy sao cho số hạng tích số xy triệt tiêu thì biểu thức (23-3) sẽ còn lại:

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= A_1x^2 + A_3y^2 \\ Z_2 &= B_1x^2 + B_3y^2 \end{aligned}\right\}$$

Bây giờ chúng ta hãy xét hai điểm M_1; M_2 ở trên hai mặt cong cùng nằm trên đường thẳng song song với trục Z_1OZ_2 (xem hình 23.3), từ đây ta có :

$$\overline{M_1M_2} = Z_1 + Z_2 = (A_1 + B_1)x^2 + (A_3 + B_3)y^2$$

Có thể viết gọn hơn : $$\overline{M_1M_2} = Ax^2 + By^2 \tag{23-4}$$

Trong đó :

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left[K_{11}\cos^2\omega_1 + K_{12}\sin^2\omega_1 + K_{21}\cos^2\omega_2 + K_{22}\sin^2\omega_2\right] \\ B &= \frac{1}{2}\left[K_{11}\sin^2\omega_1 + K_{12}\cos^2\omega_1 + K_{21}\sin^2\omega_2 + K_{22}\cos^2\omega_2\right] \end{aligned}\right\} \tag{23-5}$$

Nếu đặt $\omega = \omega_1 + \omega_2$ và biến đổi (23-5), cuối cùng ta có:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{4}\left[(K_{11} + K_{12} + K_{21} + K_{22}) - \sqrt{\begin{aligned}&(K_{11} - k_{12})^2 + (K_{21} - K_{22})^2 + \\ &2(K_{11} - K_{12})\cdot(K_{21} - K_{22})\cos 2\omega\end{aligned}}\,\right] \\ B &= \frac{1}{4}\left[(K_{11} + K_{12}) + (K_{21} + K_{22}) + \sqrt{\begin{aligned}&(K_{11} - K_{12})^2 + (K_{21} - K_{22})^2 + \\ &2(K_{11} - K_{12})\cdot(K_{21} - K_{22})\cos 2\omega\end{aligned}}\,\right] \end{aligned}\right\} \tag{23-6}$$

Gọi M là giao điểm của $\overline{M_1M_2}$ với mặt phẳng Oxy. Nếu $\overline{M_1M_2} = Z_1 + Z_2$ là một hằng số thì quỷ tích của điểm M được xác định bởi phương trình.

$$Z_1 + Z_2 = Ax^2 + By^2 = C = \text{const} \tag{23-7}$$

C là một hằng số tuỳ ý. Nếu xem C là một tham số thì trên mặt tiếp xúc Oxy phương trình (23-7) biểu diễn một họ đường enlip đồng dạng có tâm là O.

23.1.2. Kích thước diện tích tiếp xúc, độ dịch gần và giá trị áp suất cực đại.

Trong quá trình thiết lập chúng ta sử dụng một số giả thiết sau:

1.Vật liệu làm việc trong miền đàn hồi tuân theo định luật Hooke.

2.Diện tích vùng tiếp xúc rất bé so với bề mặt của hai vật thể tiếp xúc, biến dạng ở vùng càng xa vùng tiếp xúc càng be (Butxinet đã nghiên cứu chuyển vị trong bán không gian đàn hồi, cho nên nhờ giả thiết này ta có thể sử dụng kết quả tính toán của Butxinet).

3.Bỏ qua lực ma sát trên diện tích tiếp xúc, tức là xem áp lực tiếp xúc vuông góc với bề mặt tiếp xúc).

Nếu chúng ta gọi $W_1(O)$ và $W_2(O)$ là chuyển vị điểm tiếp xúc tại gốc toạ độ O về hai phía của 2 vật thể và δ là độ dịch gần của hai vật thể tại điểm tiếp xúc ban đầu O thì:

$$\delta = W_1(O) + W_2(O)$$

Tương tự ta gọi W_1 và W_2 là chuyển vị theo phương z của hai điểm M_1 và M_2 cùng ở trên đường thẳng song song với trục z_1 và z_2 (xem hình 23.3). Trước khi biến dạng khoảng cách giữa hai điểm đó là Z_1+Z_2, sau biến dạng khoảng cách đó bớt đi một đoạn:

$$W_1(O) - W_1 + W_2(O) - W_2 = \delta - (W_1 + W_2) \tag{23-8}$$

Ta có nhận xét: Sau khi biến dạng những điểm nào thoả mãn (23-8) thì sẽ nằm trong vùng tiếp xúc, còn những điểm nằm ngoài miền tiếp xúc sẽ tuân theo bất đẳng thức sau:

$$Z_1 + Z_2 > \delta - (W_1 + W_2) \tag{23-9}$$

Như đã lí luận ở trên nếu xa vùng tiếp xúc thì chuyển vị rất bé và có thể xem $W_1+W_2=0$ và có nghĩa là độ dịch gần nhau có giá trị là δ.

Tại điểm O trị số $Z_1+Z_2=0$, những điểm trên chu vi diện tích tiếp xúc có tổng Z_1+Z_2 đạt giá trị lớn nhất (so với các điểm khác trong vùng tiếp xúc) và sẽ là:

$$Z_1 + Z_2 = \delta = \text{const} \qquad (23\text{-}10)$$

Căn cứ vào (23-7) và (23-10) ta sẽ đi đến kết luận là chu vi của diện tích tiếp xúc là một đường enlip mà các nửa trục của nó trùng với các nửa trục của enlip:

$$Ax^2 + By^2 = C = \text{const}$$

Các chuyển vị W_1 và W_2 sử dụng theo kết quả của Butxinet là:

$$\left.\begin{aligned} W_1 &= K_1 \int_F \frac{P(x,y)}{r} dF \\ W_2 &= K_2 \int_F P(x,y) dF \end{aligned}\right\} \qquad (23\text{-}11)$$

Trong đó : $K_1 = \dfrac{1-\mu_1}{2\pi G_1}$; $K_2 = \dfrac{1-\mu_2}{2\pi G_2}$

μ_1; μ_2- Hệ số poatxong của vật thể (1) và (2).

G_1; G_2- Mô đun đàn hồi khi trượt của vật thể (1) và (2).

P(x,y)- Cường độ áp lực tiếp xúc.

Căn cứ vào phương trình (23-4) và (23-8) ta có được:

$$Z_1 + Z_2 = Ax^2 + By^2 = \delta - (W_1 + W_2)$$

Đưa giá trị W_1 và W_2 theo (23-21) vào biểu thức này và biến đổi ta có :

$$\delta - (Ax^2 + By^2) = K_0 \int_F \frac{P}{r} dF \qquad (23\text{-}12)$$

Trong đó : $K_0 = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{1-\mu_1}{2\pi G_1} + \dfrac{1-\mu_2}{2\pi G_2}\right] = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{1-\mu_1^2}{E_1} + \dfrac{1-\mu_2^2}{E_2}\right]$

E_1, E_2- là mô đun đàn hồi của vật thể (1) và (2).

r- là khoảng cách từ tâm O đến 1 điểm nào đó trong mặt phẳng tiếp xúc.

Biểu thức (23-12) cho phép ta xác định các đại lượng cần tìm khi biết được quy luật phân bố của áp lực P(x,y) trên miền tiếp xúc.

Chúng ta đã biết diện tích tiếp xúc là một đường enlip, điểm tiếp xúc tại gốc toạ độ O sẽ chịu áp lực lớn nhất, càng xa tâm thì áp lực càng nhỏ và trên chu vi tiếp xúc áp lực sẽ đạt một giá trị tương đối nhỏ. Hezt đã kết luận quy luật phân bố P tại điểm bất kì (x,y) trên diện tích tiếp xúc tỉ lệ với tung độ ξ của enlipxoit có dạng:

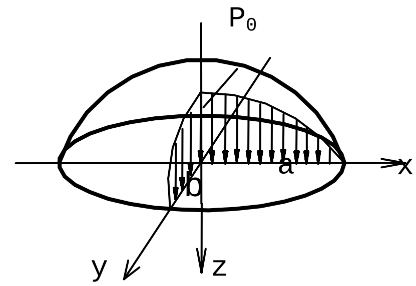
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{c}\right)^2 = 1$$

a, b, c-là các bán trục của enlipxoit (hình 23.4).

Điều đó cũng có nghĩa là Hezt cho rằng :

$$P(x,y) = P_0 \frac{\xi}{c}$$

hay: $$P(x,y) = P_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$$



Hình 23.4: Quy luật phân bố của P

P_0 - là cường độ áp lực tại điểm tiếp xúc O.

Gọi tổng hợp tất cả các áp lực ở vùng tiếp xúc P, thì:

$$P = \int_F P(x, y)dF$$

Và
$$P_0 = \frac{3}{2}\frac{P}{\pi ab} \qquad (23\text{-}13)$$

Sử dụng kết quả của bài toán Butxinet về tính độ lún khi có hệ lực phân bố, sau khi biến đổi biểu thức (23-12), ta có :

$$\delta - \left(Ax^2 + By^2\right) = K_0 \frac{P_0}{a}\left\{abK(e) - \frac{b}{a}D(e)x^2 - \frac{a}{b}\left[K(e) - D(e)y^2\right]\right\} \qquad (23\text{-}14)$$

Trong đó:

$$D(e) = \frac{1}{c^2}\left[K(e) - L(e)\right]$$

$$K(e) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

và
$$L(e) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin \varphi} \cdot d\varphi$$

Những biểu thức này là các tích phân enliptic phụ thuộc vào tâm sai e của đường enlip (chu vi của diện tích tiếp xúc):

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \qquad (23\text{-}15)$$

Căn cứ vào phương trình (23-14), thực hiện cân bằng của từng trị số tương ứng của vế trái và vế phải, ta sẽ được:

$$\left.\begin{aligned} &\delta = K_0 P_0 b \cdot K(e) \\ &A = K_0 P_0 \cdot \frac{b}{a^2} D(e) \\ &B = K_0 P_0 \cdot \frac{1}{b}\left[K(e) - D(e)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (23\text{-}16)$$

Bây giờ ta lập tỉ số A/B và chú ý đến giá trị tâm sai e, ta được:

$$\frac{A}{B} = \left(1 - e^2\right)\frac{D}{K - D}$$

Cho e các trị số khác nhau và sử dụng hằng số tích phân enliptic ta xây dựng được đồ thị biểu diễn quan hệ giữa e và tỉ số A/B như trên hình 23.5.

Ta kí hiệu $\sum K = K_{11} + K_{12} + K_{21} + K_{22}$ và từ (23-6) ta suy ra được:

$$\sum K = 2(A + B).$$

Nhờ các biểu thức tinh e, A, B ở trên ta nhận được các giá trị a,b, P_0, δ sau khi đã biến đổi:

$$\left.\begin{aligned}
a &= n_a\sqrt[3]{\frac{3}{2}\frac{K_0P}{\sum K}}\\
b &= n_b\sqrt[3]{\frac{3}{2}\frac{K_0P}{\sum K}}\\
\delta &= n_\delta\cdot\frac{1}{\pi}\sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(\frac{\sum K}{K_0}\right)^2}\\
P_0 &= n_P\cdot\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9}{4}K_0^2P^2\sum K}
\end{aligned}\right\}\quad(23\text{-}17)$$

Trong đó : $$n_P = \frac{1}{n_a\cdot n_b}$$

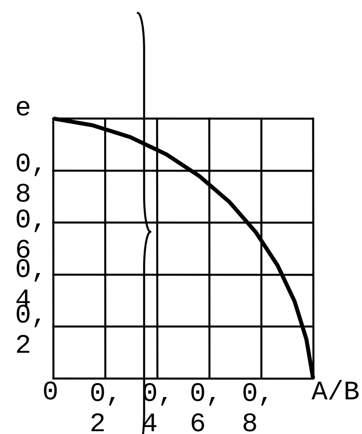
mà : $$n_a = \sqrt[3]{\frac{2}{3}\left(1+\frac{A}{B}\right)D(e)}$$

$$n_b = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{A}{B}\right)\left[K(e)-D(e)\sqrt{1-e^2}\right]}$$

(23-18)

và

$$n_\delta = K(e)\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{A}{B}\right)\cdot D(e)}}$$



Hình 23.5: Đồ thị biểu diễn quan hệ giữa e và tỉ số A/B

Để làm sáng tỏ những điều đã nói ta hãy xét ví dụ sau:

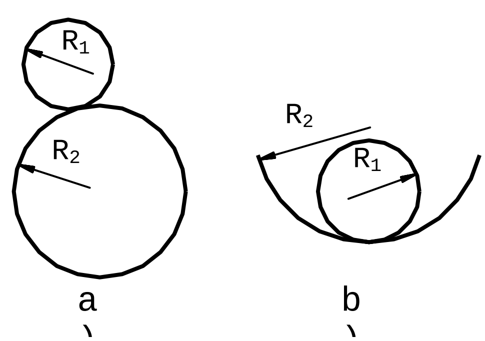
Ví dụ 1: Cho hai vật thể mặt cầu bán kính R_1và R_2 tiếp xúc với nhau chịu tác dụng một lực ép P. Hãy tính bán kính trục của diện tích tiếp xúc a, b, áp lực tiếp xúc P_0 và độ dịch gần δ (xem hình vẽ 23.26a).

Bài giải: Trong trường hợp này:

$$\sum K = 2\left(\frac{1}{R_1}\pm\frac{1}{R_2}\right) = 2\frac{R_1\pm R_2}{R_1\cdot R_2}$$

Dấu trừ ứng với trường hợp tiếp xúc ở mặt trong như hình 23.6b.

Từ biểu thức 23-6 ta có A=B và theo đồ thị trên hình 23.5 với A/B=1 ta có e=0. Với các giá trị đó ta tra bảng về tích phân enliptic (trong các sổ tay toán học) ta tìm được:



Hình 23.6:Hai vật thể mặt cầu tiếp xúc với nhau. a-tiếp xúc ngoài; b- tiếp xúc trong

$$K(0) = L(0) = \frac{\pi}{2} \text{ và } D(0) = \frac{\pi}{4}$$

Tiếp theo ta đưa các trị số này vào biểu thức (23-18) ta tìm được giá trị $n_a = n_b = n_\delta = 1$. Mang các giá trị này vào (23-17) ta tìm được:

$$\left.\begin{aligned} a = b &= 0,9086 \cdot \sqrt[3]{K_0 P \frac{R_1 R_2}{R_2 \pm R_1}} \\ P_0 &= 0,5784 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{K_0^2}\left(\frac{R_1 R_2}{R_2 \pm R_1}\right)^2} \\ \delta &= 0,8255 \cdot \sqrt[3]{(K_0 P)^2 \frac{R_2 \pm R_1}{R_1 R_2}} \end{aligned}\right\} \quad (23\text{-}19)$$

Nếu hai vật thể tiếp xúc cùng vật liệu thì $E_1=E_2=E$; $\mu_1=\mu_2=\mu=0,3$ (đối với thép thông thường).

Và lúc đó $$K_0 = 2\frac{1-\mu^2}{E} = \frac{1,82}{E}$$

Vậy các giá trị ở biểu thức (23-19) sẽ là :

$$\left.\begin{aligned} a = b &= 1,109 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{E} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 \pm R_1}} \\ P_0 &= 0,388 \cdot \sqrt[3]{PE^2\left(\frac{R_1 R_2}{R_2 \pm R_1}\right)^2} \\ \delta &= 1,231 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2 \frac{R_2 \pm R_1}{R_1 R_2}} \end{aligned}\right\} \quad (23\text{-}20)$$

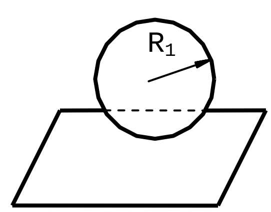
Ví dụ 2: Một vật thể hình cầu có bán kính R_1, tiếp xúc với mặt phẳng chịu lực ép P. Hãy tính bán kính a, b, cường độ áp lực tại tâm P_0 của diện tích tiếp xúc và độ dịch gần δ (xem hình 23.7).

Bài giải : Mặt phẳng tiếp xúc được xem $R_2=\infty$.

Lúc này: $\frac{R_2 + R_1}{R_2 \cdot R_1} = \frac{1}{R_1}$ và $\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = R_1$ (vì $R_2=\infty$, nên xem R_1 nhỏ so với R_2).

Thay các đại lượng này vào (23-20), ta sẽ tìm được:

$$\left.\begin{aligned} a = b &= 1,109 \cdot \sqrt[3]{\frac{P \cdot R_1}{E}} \\ P_0 &= 0,3880 \cdot \sqrt[3]{\frac{PE^2}{R_1^2}} \\ \delta &= 1,231 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{P}{ER_1}\right)^2} \end{aligned}\right\} \quad (23\text{-}20)$$



Hình 23.7: Vật thể hình cầu tiếp xúc với mặt phẳng

Ví dụ 3: Cho hai hình trụ tròn có bán kính $R_1=R_2=R$ có trục vuông góc với nhau như trên hình 23.8 chịu một lực ép tập trung P. Xác định bán kính lớn nhất tại a,b**,** cường độ áp lực tại tâm P_0 của diện tích tiếp xúc và độ dịch gần δ.

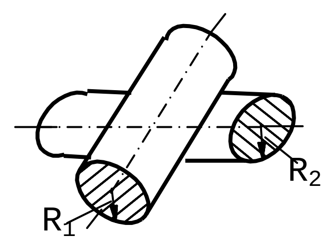
Bài giải: Như trên ta có: $\sum K = 2\cdot\frac{2}{R}$ và trong trường hợp này thì:A/B=1.

Tra ở hình 23.5 với e=0, căn cứ vào biểu thức có được ở phần trên thì:

$$\left.\begin{aligned} a = b &= 0{,}9086\cdot\sqrt[3]{K_0PR}\\ P_0 &= 0{,}5784\cdot\sqrt[3]{\frac{P}{(K_0)^2R}}\\ \delta &= 0{,}8255\cdot\sqrt{\frac{(K_0P)^2}{R}}\end{aligned}\right\}\qquad (23\text{-}22)$$

Nếu hai vật thể tiếp xúc cùng vật liệu, tức là $E_1 = E_2= E$ và $\mu_1 =\mu_2 = \mu$ thì (23-22) đưa về dạng:

$$\left.\begin{aligned} a = b &= 1{,}193\cdot\sqrt[3]{\frac{PR}{E}}\\ P_0 &= 0{,}388\cdot\sqrt[3]{P\left(\frac{E}{R}\right)^2}\\ \delta &= 1{,}231\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2\cdot\frac{1}{R}}\end{aligned}\right\}\qquad (23\text{-}23)$$



Hình 23.8:Hai mặt trụ tiếp xúc có trục vuông góc với nhau

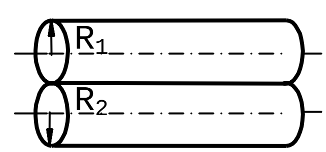
23.2. TẾP XÚC ĐƯỜNG

Xét hai hình trụ tròn có bán kính R_1 và R_2, có trục song song tiếp xúc với nhau như hình 23.9. Chúng tiếp xúc với nhau theo một đường ở thời điểm chưa chịu lực được gọi là tiếp xúc đường.

Mở rộng lí thuyết tiếp xúc điểm, theo (23-6) ta tính các đại lượng A và B như sau:

$$A=0$$

$$B=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

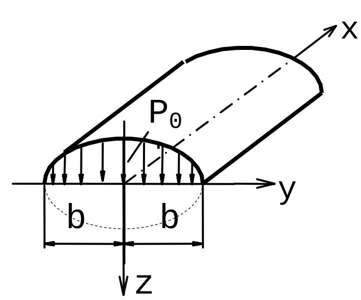


Hình 23.9:Hai hình trụ tiếp xúc có đường truc song song với

Từ trên đồ thị hình 23.5, khi A/B=0 thì tâm sai e=1.Với các giá trị tra bảng các tích phân enliptic ta được D(e)=∞, K(e)-D(e)=L(e)=1. Từ biểu thức (23-17) ta suy ra được hình enlip trở thành một dải được giới hạn bởi hai đường thẳng song song có a=∞ và chiều rộng hẹp 2b như trên hình (23.10).

Áp lực enlipxoít:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{\xi}{c}\right)^2=1$$



Hình 23.10:Khi a=∞ và b hẹp, enlip thành một dải

sẽ trở thành hình trụ enlíptic:

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{c}\right)^2 = 1$$

Lúc này áp lực phân bố trên chiều rộng 2b theo quy luật:

$$P = P_0 \cdot \frac{\xi}{c} = P_0 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

Trong đó P_0 là áp suất lớn nhất trên đường trung bình của dải. Vậy nếu quy ra áp suất đường theo chiều dài của hình trụ (từ lực phân bố mặt chuyển thành lực phân bố đường trong mô hình tính toán) ta sẽ có:

$$q = \int_{-b}^{b} P dy = P_0 \int_{-b}^{b} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \cdot dy$$

Suy ra

$$q = P_0 \frac{\pi b}{2} \qquad (23\text{-}24)$$

Gọi P là tổng lực ép giữa hai hình trụ thì từ các biểu thức (23-13) và (23-24) ta có quan hệ giữa P và q sẽ là:

$$P = \frac{4}{3} q \cdot a \qquad (23\text{-}25)$$

Chú ý: Trong thực tế a không phải lớn vô cùng, nên P xác định được. Từ những kết quả đó ta có các biểu thức sau đây để xác định các đại lượng cần thiết:

$$a = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{A}{B}\right) D(e) \frac{K_0 \cdot q}{\sum K}}$$

$$B = \sqrt{\frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{A}{B}\right)\left[K(e) - D(e)\right] \frac{K_0 \cdot q}{\sum K}}$$

Trong trường hợp tiếp xúc đường này vì e=1 nên D(e)=∞; K(e)-D(e) = L(e)=1, bán kính a xem là ∞ thì bán kính trục b sẽ là:

$$b = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{K_0 q}{\sum K}}$$

Từ giá trị này ta tính được giá trị áp lực lớn nhất:

$$P_0 = \sqrt[3]{\frac{\sum K}{\pi K_0} \cdot q}$$

Nếu hai vật thể này cùng một vật liệu thì ta sẽ có $K_0 = \frac{1{,}82}{E}$ và chiều rộng b sẽ là:

$$b = 1{,}522 \cdot \sqrt[3]{\frac{q}{E \sum K}} \qquad (23\text{-}26)$$

Và giá trị áp suất lớn nhất sẽ là:

$$P_0 = 0{,}518 \cdot \sqrt[3]{q \cdot E \sum K}$$

Chú ý: Những biểu thức ta vừa thiết lập dựa trên cơ sở hai hình trụ dài vô hạn, tức là xem a=∞, nhưng trên thực tế a hữu hạn nên người ta vẫn sử dụng chúng.

Trị số độ dịch gần δ giữa hai hình trụ là một đại lượng hữu hạn. Nó không những phu thuộc vào biến dạng cục bộ tại miền tiếp xúc mà còn phụ thuộc vào biến dạng của toàn thể vật thể. Vì vậy độ dịch gần của hai hình trụ có chiều dài hữu hạn bị ép về hai phía bởi tải trọng phân bố được sử dụng kết quả của Covanski B.S đưa ra:

$$\delta = \frac{q}{\pi}\left[\frac{1-\mu_1^2}{E_1}\left(\ln\frac{2R_1}{b}+0{,}407\right)+\frac{1-\mu_2^2}{E_2}\left(\ln\frac{2R_2}{b}+0{,}407\right)\right]$$

Trong đó b được tính theo biểu thức (23-24).

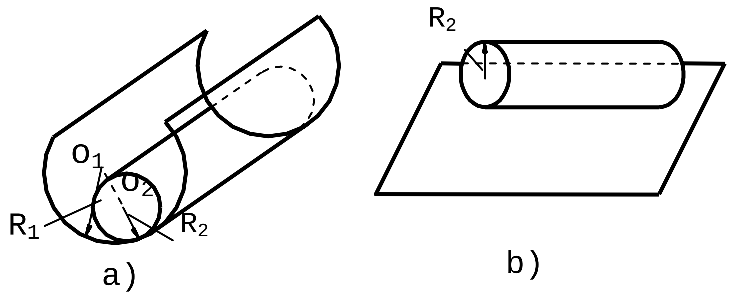
Nếu hai hình trụ cùng vật liệu và μ=3, thì:

$$\delta = 0{,}579\frac{q}{E}\left[\ln\frac{4R_1\cdot R_2}{b^2}+0{,}814\right]$$

Các công thức xác định P_0, b, δ vẫn sử dụng cho các trường hợp riêng lẽ sau :

1- Hình trụ có bán kính R_2 tiếp xúc với mặt trụ lõm bán kính $R_1 > R_2$ (xem hình 23.11a). Ta tính được: $\sum K = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} = \frac{R_1 - R_2}{R_1 \cdot R_2}$

2- Hình trụ bán kính R_2 tiếp xúc với mặt phẳng như hình 23.11b, lúc này xem R_1=∞, nên $\sum K = \frac{1}{R_2}$.



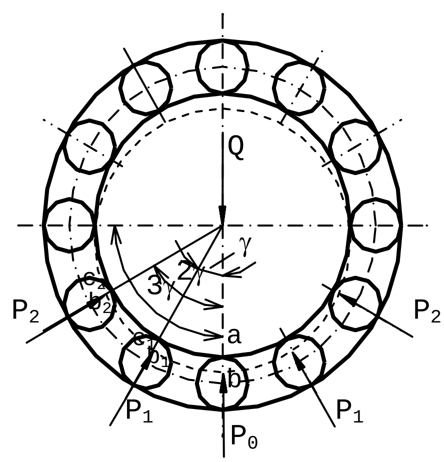
Hình 23.11:Trường hợp riêng
a-Hình trụ tiếp xúc với mặt trụ lõm $R_1 > R_2$
b-Hình trụ tiếp xúc với mặt

23.3. MỘT SỐ BÀI TOÁN TIẾP XÚC THƯỜNG GẶP.

23.3.1.Tính ổ bi chịu tải trọng tĩnh.

Ổ bi được biểu diễn trên hình vẽ 23.12 và sơ đồ chịu lực cũng được biểu diễn trên hình vẽ đó.

Ổ bi gồm có vành trong (ca trong), vành ngoài (ca ngoài), các vòng cách và các viên bi. Trên các vành người ta tạo nên các rãnh hình lòng máng để làm đường trượt cho các viên bi. Các



Hình 23.12: Ổ bi và sơ đồ chịu lực

vòng cách giữ cho các viên bi có được vị trí tương đối với nhau.

Ổ bi chịu tải trọng Q. Tải trọng đó truyền xuống các viên bi qua vành trong và từ các viên bi chuyển xuống vành ngoài rồi tác dụng lên thành máy. Dễ dàng nhận thấy rằng viên bi ở vị trí thấp nhất sẽ là viên bi chịu tải trọng lớn nhất. Chúng ta phải xác định trị số của tải trọng này.

Để đơn giản bài toán ta giả sử rằng:

a) Ổ bi được lắp khít, khe hở theo hướng kính giữa vành trong, vành ngoài và các viên bi bằng không.

b) Ta chỉ tính đến biến dạng của bi và vành tại điểm tiếp xúc. Biến dạng do độ uốn của các vành được bỏ qua.

Bây giờ ta hãy tưởng tượng: dưới tác dụng của Q, vành trong được xem như một vật rắn tuyệt đối, có một chuyển vị δ_0=ab theo phương của lực. Vành ngoài cũng được xem như cứng tuyệt đối. Do đó sự biến dạng của các viên bi tạo nên các chuyển vị ab, a_1b_1, a_2b_2...theo phương tải trọng Q của các điểm tiếp xúc a, a_1, a_2...Các chuyển vị đó phải bằng nhau và bằng:

$$ab=a_1b_1=a_2b_2=....=\delta_0 .$$

Từ các tam giác $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$ v.v...ta có thể tìm thấy các thành phần chuyển vị theo phương bán kính của các điểm tiếp xúc là :

$$\left.\begin{array}{l}\delta_1 = a_1c_1 = \delta_0\cos\gamma \\ \delta_2 = a_2c_2 = \delta_0\cos 2\gamma \\ \dots \\ \delta_n = a_nc_n = \delta_0\cos n\gamma\end{array}\right\} \qquad (23\text{-}25)$$

Ở đây góc γ, 2γ,..., nγ là các góc làm bởi các phương của lực Q và phương bán kính đi qua tâm của các viên bi. Ta nhận thấy rằng góc lớn nhất trong chúng phải nhỏ hơn $\frac{\pi}{2}\left(n\gamma < \frac{\pi}{2}\right)$ vì các viên bi phía trên không chịu lực.

Các chuyển vị δ_1, δ_2, ...,δ_n là độ dịch gần của các vật thể tiếp xúc. Chúng được tính với công thức tổng quát như sau:

$$\delta = n_\delta\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{9}{4}\eta^2\sum k\cdot P^2} \qquad (23\text{-}26)$$

với
$$n_\delta = K\cdot\sqrt[3]{\frac{H}{\pi^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{B}{A}}\cdot\frac{1}{D}}$$

Sử dụng công thức đó ta dễ dàng biểu diễn các chuyển vị qua trị số lực tác dụng như sau:

$$\left.\begin{array}{l}\delta_0 = C\cdot P_0^{2/3} \\ \delta_1 = C\cdot P_1^{2/3} \\ \dots \\ \delta_n = C\cdot P_n^{2/3}\end{array}\right\} \qquad (23\text{-}27)$$

Với các biểu thức (23-25) và (23-27) ta có thể biểu diễn P_1, P_2,...P_n theo P_0 như sau :

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= P_0 \cos^{3/2}\gamma \\ P_2 &= P_0 \cos^{3/2} 2\gamma \\ &\dots \\ P_n &= P_0 \cos^{3/2} n\gamma \end{aligned}\right\} \qquad (23\text{-}28)$$

Từ phương trình cân bằng ta có:

$$Q = P_0 + 2P_1\cos\gamma + 2P_2\cos 2\gamma + \dots + 2P_n\cos n\gamma$$

Thay (23-28) vào, ta có :

$$Q = P_0\left[1 + 2\cos^{5/2}\gamma + 2\cos^{5/2}2\gamma + \dots + 2\cos^{5/2}n\gamma\right]$$

Ta gọi k là tỉ số:

$$k = \frac{i}{1 + 2\cos^{5/2}\gamma + 2\cos^{5/2}2\gamma + \dots + 2\cos^{5/2}n\gamma} \qquad (23\text{-}29)$$

Trong đó i là số viên bi được lắp trong vành.Tương quan giữa P_0 và Q được viết gọn lại dưới dạng :

$$P_0 = k\cdot\frac{Q}{i} \qquad (21\text{-}30)$$

Với các phép toán cụ thể ta thấy khi thay đổi i từ 10 đến 20 trị số k hầu như không đổi. Ta giả sử lấy i=10, khi đó:

$$k = \frac{10}{1 + 2\cos^{5/2}30^0 + 2\cos^{5/2}60^0} = 4{,}38$$

Với i=20, ta tìm được k=4,37.

Nếu kể đến khe hở giữa các vành với bi và kể đến độ biến dạng khi uốn của các vành thì hệ k được nâng lên một ít. Thường người ta chọn k=5, vậy:

$$P_0 = 5\cdot\frac{Q}{i} \qquad (23\text{-}31)$$

Diện tích tiếp xúc giữa bi và các vành:

Diện tích đó có dạng hình enlip.Các bán trục được xác định như sau:

Với các kích thước đã cho trên hình 23.13, ta có các độ cong chính là:

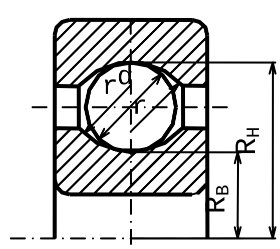
$$k_{11} = k_{12} = \frac{2}{d_0}$$

Đối với vành trong độ cong $k_{21} = 1/R_B$ và với vành ngoài $k_{21} = 1/R_H$

Độ cong chính k_{22} của hai vành là như nhau và bằng $k_{22} = -1/r$.

Diện tích tiếp xúc ở đây là một hình enlip. Các bán kính chính a, b được xác định bởi công thức (23-17).

Trị số áp suất lớn nhất P_0 được xác định bởi công thức (23-17) và điều kiện bền của bi là : $P_0 \le [P_0]$.



Hình 23.13: Kích thước ổ bi

Ví dụ 4: Cho ổ bi số hiệu 217 với các kích thước sau đây: đường kính trong d=85mm; đường kính ngoài D=150mm; bề rộng B=28mm; đường kính bi d_0=19,84mm; số bi i=10; bán kính mặt cắt ngang của lòng máng r=0,515d_0= 10,23mm; tải trọng tác dụng lên ổ bi Q=34000N. Cho biết $[P_0] = 35000\,N/cm^2$.

Tính độ bền của ổ bi.

Bài giải : Với các kích thước đã cho, ta suy ra:

Độ dày cực tiểu của ổ bi dọc theo lòng máng là:

$$h = \frac{1}{2}\left(\frac{D-d}{2} - d_0\right) = \frac{1}{2}(32,5 - 19,84) = 6,33mm$$

Bán kính của lòng máng thuộc vành ngoài:

$$R_H = \frac{D}{2} - h = 75 - 6,33 = 68,67mm$$

Bán kính của lòng máng thuộc vành trong:

$$R_B = \frac{d}{2} + h = 42,5 + 6,33 = 48,33\,mm$$

Tải trọng đặt lên viên bi ở vị trí thấp nhất là:

$$P_0 = 5 \cdot \frac{Q}{i} = 5 \cdot \frac{34000}{10} = 17000N$$

Bi và các vành cùng làm bằng một vật liệu có mô đun đàn hồi $E = 2,12 \cdot 10^7\ N/cm^2$ và hệ số poatxông μ=0,30. Vậy hằng số đàn hồi có trị số là:

$$\eta = 2\frac{1-\mu^2}{E} = 0,858 \cdot 10^{-7}\ cm^2/N$$

Trị số các độ cong chính là :

$$k_{11} = k_{12} = \frac{2}{d_0} = \frac{2}{1,984} = 1,008\ 1/cm$$

Với vành ngoài:

$$k_{21} = -\frac{1}{R_H} = -\frac{1}{6,867} = -0,1456\ 1/cm$$

$$k_{22} = -\frac{1}{r} = -\frac{1}{6,867} = -0,1456\ 1/cm$$

Với vành trong: $$k_{21} = \frac{1}{R_B} = \frac{1}{4,883} = 0,2048\ 1/cm$$

$$k_{22} = -\frac{1}{r} = -\frac{1}{1,023} = -0,9775\ 1/cm$$

Vậy với sự tiếp xúc của bi với vành ngoài ta có :

$$\sum k = 2 \cdot 1,008 - 0,1456 - 0,9775 = 0,8929\ 1/cm$$

Với những số liệu ở trên và dùng công thức (23-18), ta xác định được các hệ số:

$$n_a = 3,594 + \frac{0,9317 - 0,9303}{0,9342 - 0,9303}(3,683 - 3,594) = 3,626$$

$$n_b = 0,4253 - 0,3590 \cdot 0,054 = 0,4234$$

$$n_P = 0,6542 - 0,3590 \cdot 0,0075 = 0,6515$$

Chú ý: Để tiện lợi trong tính toán người ta lập bảng để có n_0, n_b, n_δ, n_P thông qua tỉ số A/B.

Từ đó ta có : $a = 3{,}626 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{0{,}858 \cdot 10^{-7}}{0{,}8920} \cdot 17000} = 0{,}489\text{cm}$

$$b = 0{,}4234 \cdot 0{,}1348 = 0{,}0570\text{cm}$$

$$P_0 = \frac{0{,}6515}{3{,}14} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{0{,}8929}{0{,}858 \cdot 10^{-7}}\right)^2} \cdot 17000 = 291000\,\text{N/cm}^2$$

Với sự tiếp xúc của bi và vành trong ta có :

$$\sum k = 2 \cdot 1{,}008 + 0{,}2048 - 0{,}9775 = 1{,}243\ 1/\text{cm}$$

Và tính ra các hệ số sẽ là: $n_a = 4{,}156$; $n_b = 0{,}3942$; $n_P = 0{,}6104$

Từ đó ta có : $a = 4{,}156 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{0{,}858 \cdot 10^{-7}}{1{,}243} \cdot 17000} = 0{,}502\ \text{cm}$

$$b = 0{,}3942 \cdot 0{,}1207 = 0{,}0476\ \text{cm}$$

$$P_0 = \frac{0{,}6104}{3{,}14} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(\frac{1{,}243}{0{,}858 \cdot 10^{-7}}\right)^2} = 34000\,\text{N/cm}^2$$

Đối với vật liệu làm bi và vành $[P_0] = 35000\,\text{N/cm}^2$.

Để tính độ bền ta có thể so sánh P_0 với $[P_0]$.

Thực ra như ta đã nói ở trên, điểm nguy hiểm nhất là tại trong lòng vật thể ở độ sâu z=0,8b. Trị số ứng suất tiếp cực đại tại đó là $\tau_{max} = 0{,}325P_0$, khi tỉ số $\dfrac{b}{a} = 0{,}5$. Với các trị số khác của tỉ số $\dfrac{b}{a}$, τ_{max} có trị số xấp xỉ $0{,}325P_0$. Khi $\dfrac{b}{a} = 0{,}1$ thì $\tau_{max} = 0{,}310P_0$ và khi $\dfrac{b}{a} = 0$ thì $\tau_{max} = 0{,}300P_0$. Ta phải so sánh trị số này với $[\tau]$

Song vì chúng chỉ khác nhau bởi một hằng số nên ta có thể định ra $[P_0]$ từ $[\tau]$ và điều kiện bền của vật thể là:

$$P_0 \le [P_0]$$

Để tiện lợi hơn người ta đưa ra cách tính độ bền như sau :

Ta nhận thấy các bán kính R_B và R_H có thể được biểu diễn qua đường kính d_0 của bi. Thực vậy, có thể viết $R_B=\alpha d_0$ và $R_H=\beta d_0$; α và β là các hệ số không thay đổi đối với một họ ổ bi có một tỉ lệ kích thước nhất định.

Vì rằng áp suất giữa bi và vành trong lớn hơn áp suất giữa bi và vành ngoài, do đó ta chỉ căn cứ vành trong để tính độ bền.

Tổng độ cong có trị số là :

$$\sum k = 2 \cdot \frac{2}{d_0} + \frac{1}{R_B} - \frac{1}{r} = \frac{1}{d_0}\left(4 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)$$

Hằng số đàn hồi là:

$$\eta = 2\frac{1-\mu^2}{E} = 0{,}858 \cdot 10^{-7}\ \text{cm}^2/\text{N}$$

Tải trọng đặt lên bi là: $P_0 = 5 \cdot \dfrac{Q}{i}$

Thay các đại lượng đó vào công thức (23-24), ta xác định được biểu thức P_0 như sau :

$$P_0 = c \cdot \sqrt[3]{\frac{Q}{id_0^2}} \tag{23-32}$$

Hệ số C được tính với biểu thức:

$$C = n_P \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(4 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)^2 \cdot \left(\frac{10^7}{0,858}\right)^2 \cdot 5} \tag{23-33}$$

Ví dụ với trường hợp ta đang xét :

$$C = \frac{0,6104}{3,14} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(4 + \frac{1}{2,46} - \frac{1}{0,515}\right)^2 \cdot \left(\frac{10^7}{0,858}\right)^2 \cdot 5} = 77000$$

Công thức (23-32) được viết lại dưới dạng:

$$P_0 = 77000 \cdot \sqrt[3]{\frac{Q}{id_0^2}} \tag{23-34}$$

Đối với một họ ổ bi, C là một hằng số và công thức (23-34) trở thành công thức chung cho họ ổ bi đó .

Nếu giả sử rằng áp suất cho phép $[P_0] = 339000\,N/cm^2$, ta sẽ đi đến biểu thức tính lực Q lớn nhất có thể đạt được như sau:

$$Q = \left(\frac{339000}{77000}\right)^3 \cdot i \cdot d_0^2 = 85i \cdot d_0^2 \quad N \tag{23-35}$$

Nếu giả sử sử dụng $[P_0] = 347000\,N/cm^2$, ta sẽ được:

$$Q = \left(\frac{347000}{77000}\right)^3 \cdot i \cdot d_0^2 \approx 92i \cdot d_0^2 \quad N \tag{23-36}$$

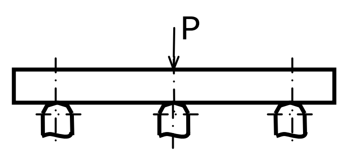
Các công thức (23-35) và (23-36) là những công thức đã sử dụng trong sổ tay công nghệ chế tạo máy.

23.3.2. Tính tiếp xúc giữa hình cầu và tấm phẳng.

Ví dụ 5: Phôi của tấm tròn chịu nén bởi lực Q=7500N lên ba điểm tựa có hình dạng mặt cầu bán kính R=15mm (xem hình 23.14). Cả ba gối tựa cầu đều được đặt trên một đường tròn nào đó đồng tâm với phôi và cách nhau theo một góc 180^0. Do đó Q được phân bố đều trên các gối tựa.

Tính kích thước của diện tích tiếp xúc và áp lực lớn nhất giữa các gối tựa và tấm tròn. Xác định độ chuyển dịch của phôi do biến dạng của các gối tựa dưới tác dụng của các lực nén gây nên. Vật liệu của phôi cũng như các gối tựa là bằng thép.

Hỏi nếu tấm phôi là gang thì các kết quả sẽ thay đổi thế nào ?



Hình 23.14: Phôi tấm tròn chịu lực

Bài giải: Tải trọng lên mỗi gối tựa là:

$$P = \frac{1}{3} Q = 2500N$$

Với thép ta có $E = 2{,}12 \cdot 10^7\ N/cm^2$ và $\mu = 0{,}28$. Vậy hằng số đàn hồi của vật liệu khi tiếp xúc là:

$$\eta = 2\frac{1-\mu^2}{E} = 0{,}878 \cdot 10^{-7}\ cm^2/N$$

Ở đây sự tiếp xúc có thể xem như giữa hình cầu và mặt phẳng. Ta có :$R=R_1$ và $R_2=\infty$. Bán kính diện tích tiếp xúc là :

$$a = 0{,}9086 \cdot \sqrt[3]{\eta P \cdot R} = 6{,}3 \cdot 10^{-3}\,cm = 0{,}063mm$$

Áp suất lớn nhất ở tâm: $P_0 = 0{,}5784 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{\eta^2} \cdot \frac{1}{R^2}} = 300.000\,N/cm^2$

Chuyển dịch của phôi là độ dịch gần của hai vật tiếp xúc:

$$\delta = 0{,}8255 \cdot \sqrt[3]{(\eta P)^2 \frac{1}{R}} = 2{,}6 \cdot 10^{-3}\,cm = 0{,}026cm$$

Đối với thép hợp kim crôm áp suất P_0 trên đây là cho phép. Nếu phôi là gang ta có: $E = 1{,}2 \cdot 10^7\ N/cm^2$ và μ=0,25. Hằng số đàn hồi có trị số là:

$$\eta = \frac{i-0{,}28^2}{2{,}1 \cdot 10^7} + \frac{1-0{,}25^2}{1{,}2 \cdot 10^7} = 1{,}22 \cdot 10^{-7}\ cm^2/N$$

Ta tìm thấy: $a=7\cdot10^{-3}$cm=0,07mm; $P_0\approx230000N/cm^2$; $\delta=3{,}3\cdot10^{3}$cm=0,033mm

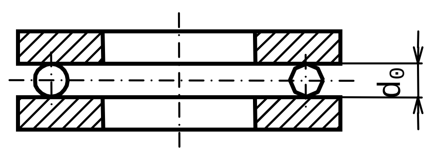
Ví dụ 6: Ổ bi chặn có các vành phẳng không có rãnh (hình 23.15). Hãy xác định:

1-Lực cho phép Q tác dụng lên chiều trục.

2-Kích thước diện tích tiếp xúc giữa bi và vành.

3-Độ dịch gần giữa hai vành do biến dạng đàn hồi gây nên.

Cho biết số bi i=20 viên, đường kính của các viên bi là d_0=1cm. Vật liệu của vành và của bi là thép hợp kim crôm. Áp suất cho phép lớn nhất là $[P_0] = 350000\,N/cm^2$.



Hình 23.15:Ổ bi chặn

Bài giải: Theo công thức (23-21) với μ=0,30, ta có:

$$P_0 = 0{,}3880 \cdot \sqrt[3]{PE^2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)^2} \qquad (1)$$

Trong trường hợp đang xét ta có:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{2}{d_0} \text{ và } \frac{1}{R_2} = 0$$

Áp lực tác dụng lên một viên bi được tính với biểu thức :

$$P = \frac{P}{0{,}8i} \qquad (2)$$

Hệ số 0,8 thể hiện sự phân bố không đều của tải trọng lên mỗi viên bi. Kết hợp giữa (1) và (2), ta tìm thấy:

$$Q = 3{,}42\frac{P_0^3 \cdot i \cdot d_0^2}{E^2}$$

Thay trị số vào ta có:

$$Q = 3{,}42\frac{350000^{3}\cdot 20\cdot 1}{\left(2{,}12\cdot 10^{7}\right)^{2}} = 6530\text{N}$$

Tải trọng tác dụng lên mỗi viên bi là:

$$P = \frac{P}{0{,}8i} = \frac{6530}{0{,}8\cdot 20} = 408\text{N}$$

Bán kính của diện tích tiếp xúc là:

$$a = b = 1{,}109\cdot\sqrt[3]{\frac{P}{E}\cdot\frac{d_0}{2}} = 1{,}109\cdot\sqrt[3]{\frac{408}{2{,}12\cdot 10^{7}}\cdot\frac{1}{2}} \approx 0{,}024\text{cm}$$

Độ dịch gần giữa bi và vành là :

$$\delta = 1{,}231\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^{2}\cdot\frac{2}{d_0}} = 1{,}231\cdot\sqrt{\left(\frac{408}{2{,}12\cdot 10^{7}}\right)\cdot 2} \approx 0{,}0011\text{cm}$$

Độ dịch gần giữa hai vành là: 2δ=0,0022cm.

23.3.3. Tính tiếp xúc giữa hai hình trụ.

Ví dụ 7: Ổ bi con lăn của bánh xe tàu điện có kích thước 120×260×86mm. Tính chiều rộng của diện tích tiếp xúc giữa con lăn và vành (xem hình 23.16).

Các kích thước của ổ bi như sau: d_0=36mm; L=58mm; D=154mm; số lượng con lăn i=13; tải trọng tác dụng lên ổ bi là Q=45000N.

Bài giải: Con lăn chịu tải trọng lớn nhất ở dưới cùng. Tải trọng tác dụng lên con lăn đó được tính với biểu thức:

$$P = 4{,}6\cdot\frac{Q}{i} = 4{,}6\cdot\frac{45000}{13} = 15900\text{N}$$

Chiều dài làm việc của con lăn: $l = L - 2\lambda = 58 - 8 = 50\text{cm}$

Trong đó λ là chiều rộng của khe rãnh ở hai đầu con lăn (hình 23.16). Vậy cường độ tải trọng đường là:

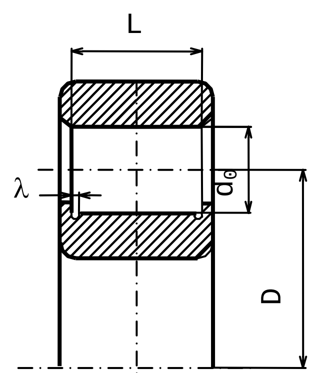
$$q = \frac{P}{l} = \frac{15900}{5} = 3180\,\text{N/cm}$$

Chiều rộng của diện tích tiếp xúc giữa vành trong và con lăn là :

$$b = 1{,}522\cdot\sqrt[3]{\frac{q}{E}\cdot\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}$$

$$= 1522\cdot\sqrt[3]{\frac{318}{2{,}12\cdot 10^{7}}\cdot\frac{1{,}8\cdot 7{,}7}{1{,}8+7{,}7}} = 0{,}0225\text{cm}$$

Chiều rộng của dải tiếp xúc là 2b=0,45mm. Trị số này là rất bé so với bán kính của con lăn và vành (R_1=18mm; R_2=77mm).



Hình 23.16:Ổ bi con lăn của bánh xe tàu điện

Áp suất lớn nhất trên diện tích tiếp xúc là:

$$P_0 = 0{,}4180\sqrt{qE\cdot\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}} = 0{,}4180\sqrt{318\cdot 2{,}12\cdot 10^{7}\cdot\frac{1{,}8+7{,}7}{1{,}8\cdot 7{,}7}} = 89900\,\text{N/cm}^{2}$$

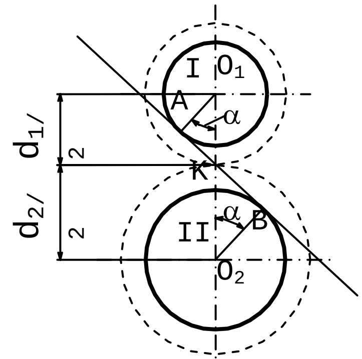
Thường đối với thép ổ bi, áp suất cho phép là $\left[P_0\right] = 250000\,\text{N/cm}^{2}$. Vậy ta thấy áp suất trên là còn rất bé so với áp suất cho phép.

Ví dụ 8: Xác định áp suất lớn nhất giữa hai bánh răng trụ răng răng thẳng khi chúng tiếp xúc nhau ở vị trí điểm ăn khớp (hình 23.17).Khảo sát các trường hợp sau đây:

1- Bánh chủ động và bánh bị động cùng làm bằng một vật liệu.

2- Bánh chủ động bằng thép và bánh bị động bằng gang.

Bài giải: Ở đây ta chỉ xét ở một thời điểm nhất định. Tại thời điểm đó xem tải trọng là tĩnh định. Ta cũng thừa nhận rằng, vật liệu là đồng nhất và đẳng hướng, Không kể đến độ khác biệt của lớp tôi bề mặt.



Hình 23.17:Hai bánh răng răng thẳng ăn khớp với nhau

Một cách gần đúng ta sử dụng công thức (23-39) để tính áp suất lớn nhất trong vùng tiếp xúc, nghĩa là xem sự tiếp xúc là dài vô hạn. Thừa nhận hệ số Poatxông của thép và của gang là như nhau (μ=0,28). Do đó hằng số đàn hồi η của vật liệu là :

$$\mu = 2\left(1-\mu^2\right)\cdot\frac{E_1+E_2}{E_1E_2} = 1{,}84\frac{1}{E_0}$$

E_0 được gọi là mô đun đàn hồi thu gọn:

$$(E_0 = \frac{2E_1E_2}{E_1+E_2})$$

Với thép ta có $E_1 = 2\cdot10^7\ N/cm^2$ và với gang ta có $E_2 = 1{,}5\cdot10^7\ N/cm^2$. Vậy $E_0 = 1{,}7\cdot10^7\ N/cm^2$.

Khi các bánh răng cùng làm bằng một vật liệu thì ta có E=E_0.

Gọi ρ_1 và ρ_2 là bán kính cong của dạng răng tại điểm ăn khớp. Khi đó tổng độ cong của các bánh răng là:

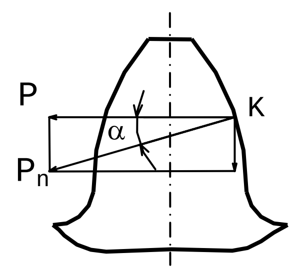
$$\sum k = \frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho_0}$$

ρ_0 được gọi là bán kính cong thu gọn, ta có:

$$P_0 = \sqrt{\frac{1}{1{,}84}\cdot\frac{qE_0}{\rho_0}} = 0{,}416\cdot\sqrt{\frac{q\cdot E_0}{\rho_0}}$$

Từ hình vẽ 23.30, ta dễ dàng tìm thấy:

$$\rho_1 = \frac{d_1}{2}\sin\alpha \ \text{ và } \ \rho_2 = \frac{d_2}{2}\sin\alpha$$



Hình 23.18:Góc ăn khớp

Trong đo: d_1 và d_2 là đường kính của đường tròn ăn khớp của các bánh răng; α là góc ăn khớp (hình 23.18).

Cường độ tải trọng phân bố là:

$$q = \frac{P_n}{l} = \frac{P}{l\cos\alpha}$$

Trong đó : l-chiều dài của răng.

P_n-lực theo phương pháp tuyến với bề mặt răng.

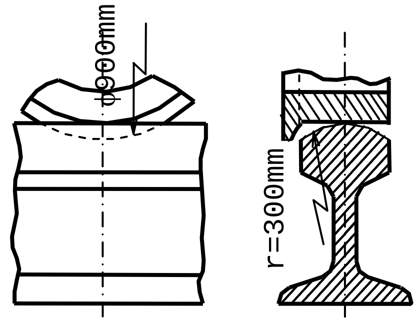
P- lực vòng.

Vậy áp lực cực đại trên diện tích tiếp xúc là:

$$P_0 = 0{,}832\cdot\sqrt{\frac{E_0}{\sin2\alpha}\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)\cdot\frac{P}{l}}$$

Ví dụ 9: Tính áp lực lớn nhất và kích thước của diện tích giữa bánh xe và đường ray của toa xe chở hàng có bốn cụm bánh (hình 23.19). Trọng lượng của toa tàu Q=60t ; bán kính của đầu đường ray r=300mm. Đường kính của bánh xe D=900mm

Bài giải: Ở đây ta có thể xem như sự tiếp xúc của hai mặt trụ có trục vuông góc với nhau.Vậy diện tích tiếp xúc là một đường enlip với các bán trục chính là a và b.



Hình 23.19: Bánh xe và đường ray tiếp xúc với nhau

Tải trọng của bánh xe truyền xuống đường ray là:

$$P = \frac{Q}{4 \times 2} = 75000\text{N}$$

Các độ cong chính của bánh xe là :

$$k_{11} = \frac{2}{D} = 0{,}0222\ 1/\text{cm}\,;k_{22} = 0$$

Các độ cong chính của đường ray là :

$$k_{21} = \frac{1}{r} = \frac{1}{30} = 0{,}0333\ 1/\text{cm}\,;k_{22} = 0$$

Các mặt cong chính k_{11} và k_{22} vuông góc với nhau, do đó $\cos 2\omega = -1$. Vậy ta tính được các hệ số :

$$n_a = 1{,}141 + \frac{0{,}2000 - 0{,}1894}{0{,}2207 - 0{,}1894}(1{,}168 - 1{,}141) = 1{,}150$$

$$n_b = 0{,}8837 - 0{,}3387(0{,}8837 - 0{,}8660) = 0{,}8777$$

$$n_P = 0{,}9919 - 0{,}3387(0{,}9919 - 09890) = 0{,}9909$$

Tổng các độ cong của các bề mặt tiếp xúc:

$$\sum k = \frac{2}{D} + \frac{1}{r} = 0{,}0555\ 1/\text{cm}$$

Lấy $E=2\cdot10^7 N/cm^2$ và μ=0,30, ta có:

$$\eta = 2\frac{1-\mu^2}{E} = 0{,}91\cdot10^{-7}\ \text{cm}^2/\text{N}$$

Khi đó các kích thước của diện tích tiếp xúc sẽ là:

$$a = 1{,}150\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{2}\cdot\frac{0{,}91\cdot10^{-7}}{0{,}0555}\cdot75000} = 1{,}150\cdot0{,}569 = 0{,}65\text{cm}$$

$$b = 0{,}8777\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{2}\cdot\frac{0{,}91\cdot10^{-7}}{0{,}0555}\cdot75000} = 0{,}8777\cdot0{,}569 = 0{,}5\text{cm}$$

Áp suất lớn nhất trong vùng diện tích tiếp xúc là:

$$P_0 = 0{,}9909\cdot\frac{1}{\pi}\sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(\frac{0{,}0555}{0{,}91\cdot10^{-7}}\right)^2\cdot75000} \approx 110000\,\text{N}/\text{cm}^2$$

Để kiểm tra lại ta có thể sử dụng công thức (23-27) để tính :

$$P_0 = \frac{3}{2}\cdot\frac{75000}{\pi\cdot0{,}65\cdot0{,}50} \approx 110000\,\text{N}/\text{cm}^2$$

Hai cách tính này cho ta một kết quả.

CÂU HỎI TỰ HỌC.

23.1. Quan hệ hình học đối với hai bề mặt của vật thể tiếp xúc ?
23.2. Chứng minh diện tích hai vật thể tiếp xúc có thể coi là một enlip .
23.3. Bài toán hai hình trụ tròn tiếp xúc ?
23.4. Các biểu thức các đại lượng a, b trong bài toán tiếp xúc ?
23.5. Các biểu thưc áp lực lớn nhất P_0 và độ dịch gần δ ?
23.6. Bài toán tiếp xúc của hình trụ với mặt phẳng ?
23.7. Bài toán hai hình trụ tiếp xúc có hai trục vuông góc với nhau ?
23.8. Bài toán hai hình trụ tiếp xúc có hai trục song song với nhau ?
23.9. Khi tính các ổ bi cần chú ý những yếu tố nào cho từng loại ?

- - -📖 - - -