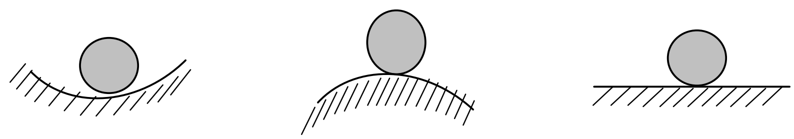
Chương 11

ỔN ĐỊNH CỦA THANH THẲNG CHỊU NÉN ĐÚNG TÂM

11.1 KHÁI NIỆM VỀ SỰ ỔN ĐỊNH CỦA TRẠNG THÁI CÂN BẰNG

Để đáp ứng yêu cầu chịu lực bình thường, một thanh phải thỏa mãn điều kiện bền và cứng, như đã được trình bày trong các chương trước đây. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp, thanh còn phải thỏa mãn thêm điều kiện **ổn định.** Đó là khả năng duy trì hình thức biến dạng ban đầu nếu bị **nhiễu.** Trong thực tế, nhiễu có thể là các yếu tố sai lệch so với sơ đồ tính như độ cong ban đầu, sự nghiêng hoặc lệch tâm của lực tác dụng...

Khái niệm ổn định có thể minh họa bằng cách xét sự cân bằng của quả cầu trên các mặt lõm, lồi và phẳng trên H.11.1.



H.11.1 Sự cân bằng về vị trí của quả cầu

Nếu cho quả cầu một chuyển dịch nhỏ (gọi là **nhiễu**) từ vị trí ban đầu sang vị trí lân cận rồi bỏ nhiễu đi thì:

- Trên mặt lõm, quả cầu quay về vị trí ban đầu: sự cân bằng ở vị trí ban đầu là **ổn định.**

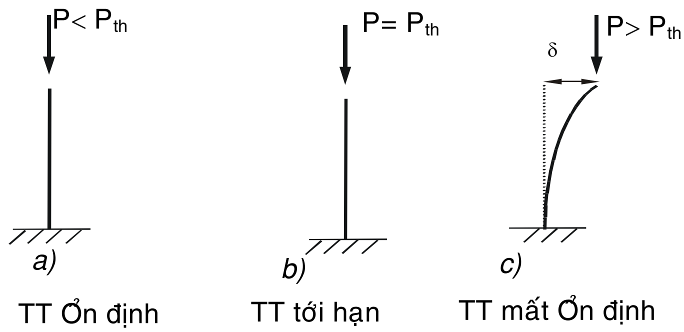
- Trên mặt lồi, quả cầu chuyển động ra xa hơn vị trí ban đầu: sự cân bằng ở vị trí ban đầu là **không ổn định.**

- Trên mặt phẳng, quả cầu giữ nguyên vị trí mới: sự cân bằng ở vị trí ban đầu là **phiếm định.**

Hiện tượng tương tự cũng có thể xảy ra đối với sự cân bằng về trạng thái biến dạng của hệ đàn hồi. Chẳng hạn với thanh chịu nén trên H.11.2. Trong điều kiện lý tưởng (thanh thẳng tuyệt đối, lực P hoàn toàn đúng tâm...) thì thanh sẽ giữ hình dạng thẳng, chỉ co ngắn do chịu nén đúng tâm. Nếu cho điểm đặt của lực P một chuyển vị bé δ do một lực ngang nào đó gây ra, sau đó bỏ lực này đi thì sẽ xảy ra các trường hợp biến dạng như sau:

+ Nếu lực P nhỏ hơn một giá trị P_{th} nào đó, gọi là **lực tới hạn**, tức là $P < P_{th}$, thì thanh sẽ phục hồi lại trạng thái biến dạng thẳng. Ta nói thanh làm việc ở **trạng thái ổn định.**

+ Nếu $P > P_{th}$ thì chuyển vị δ sẽ tăng và thanh bị cong thêm. Sự cân bằng của trạng thái thẳng ($\delta = 0$) là không ổn định. Ta nói thanh ở **trạng thái mất ổn định** .Trong thực tế thanh sẽ có chuyển vị δ và chuyển sang hình thức biến dạng mới bị uốn cong, khác trước về tính chất, bất lợi về điều kiện chịu lực.

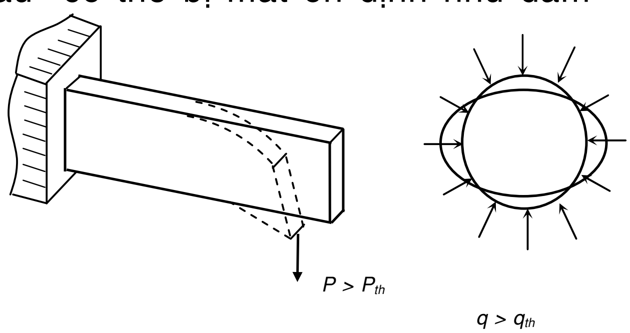


H. 11.2 Sự cân bằng của TT biến dạng

+ Ứng với $P = P_{th}$ thì thanh vẫn giữ nguyên chuyển vị δ và trạng thái biến dạng cong. Sự cân bằng của trạng thái thẳng là phiếm định. Ta nói thanh ở **trạng thái tới hạn**

H.11.3 giới thiệu thêm vài kết cấu có thể bị mất ổn định như dầm chịu uốn, vành tròn chịu nén đều…

Khi xảy ra mất ổn định dù chỉ của một thanh cũng dẫn tới sự sụp đổ của toàn bộ kết cấu. Tính chất phá hoại do mất ổn định là đột ngột và nguy hiểm. Trong lịch sử ngành xây dựng đã từng xảy ra những thảm họa sập cầu chỉ vì sự mất ổn định của một thanh dàn chịu nén như cầu Mekhelstein ở Thụy Sĩ (1891), cầu Lavrentia ở Mỹ (1907)... Vì vậy khi thiết kế cần phải **đảm bảo cả điều kiện ổn định**, ngoài điều kiện bền và điều kiện cứng đã nêu trước đây.



H. 11.3 Các dạng mất ổn định

Điều kiện ổn định: $P \le [P]_{ôđ} = \dfrac{P_{th}}{k_{ôđ}}$ (11.1)

Hay : $N_z \le [P]_{ôđ} = \dfrac{P_{th}}{k_{ôđ}}$ (11.2)

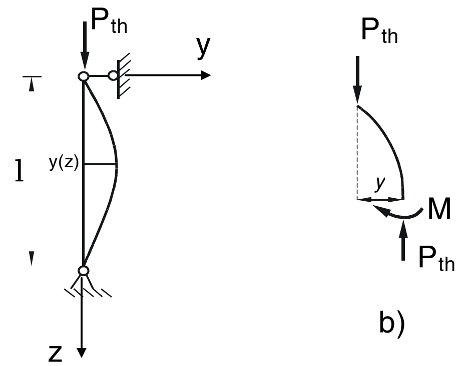
$k_{ôđ}$: Hệ số an toàn về mặt ổn định, do quy định, và thường lớn hơn hệ số an toàn về độ bền n.

P (hay N_z) : Lực nén (nội lực nén) thanh.

11.2 KHẢO SÁT ỔN ĐỊNH TRONG MIỀN ĐÀN HỒI

1- Tính lực tới hạn P_{th} thanh có kết khớp hai đầu (Bài toán Euler)

Xét thanh thẳng liên kết khớp hai đầu, chịu nén bởi lực tới hạn P_{th}. Khi bị nhiễu, thanh sẽ bị uốn cong và cân bằng ở hình dạng mới như trên H.11.4a.



H. 11.4

Đặt hệ trục toạ độ (x,y,z) như H.11.4a

Xét mặt cắt có hoành độ z ;

Độ võng ở mặt cắt nầy là y.

Ta có phương trình vi phân đường đàn hồi:

$$y'' = -\frac{M}{EJ} \qquad \text{(a)}$$

Với: mômen uốn M = P_{th} y (b) (từ điều kiện cân bằng trên H.11.4b)

(b) vào (a) $\Rightarrow$ $y'' = -\frac{P_{th} y}{EJ}$ hay $y'' + \frac{P_{th}}{EJ} y = 0$

Đặt: $\alpha^2 = \frac{P_{th}}{EJ} \Rightarrow y'' + \alpha^2 y = 0$ (c)

Nghiệm tổng quát của (c) là:

$$y = A\sin(\alpha z) + B\cos(\alpha z) \qquad \text{(d)}$$

Các hằng số được xác định từ điều kiện biên y(0) = 0 và y(L) = 0.

Với: y(0) = 0 $\Rightarrow$ B = 0

y(L) = 0 $\Rightarrow$ $A\sin(\alpha L) = 0$

để bài toán có nghĩa $y(z) \neq 0 \Rightarrow A \neq 0, \Rightarrow \sin(\alpha L) = 0$

phương trình này có nghiệm $\alpha L = n\pi$, với n = 1, 2, 3,...

$$\Rightarrow \quad P_{th} = \frac{n^2\pi^2 EJ}{L^2} \qquad \text{(e)}$$

Thực tế, khi lực nén đạt đến giá trị tới hạn nhỏ nhất theo (e) ứng với n = 1 thì thanh đã bị cong. Vì vậy, các giá trị ứng với n > 1 không có ý nghĩa.

Ngoài ra, thanh sẽ cong trong mặt phẳng có **độ cứng uốn nhỏ nhất**. Do đó, công thức tính lực tới hạn của thanh thẳng hai đầu liên kết khớp là:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{L^2} \qquad (11.3)$$

Đường đàn hồi tương ứng **có dạng** một **nửa sóng hình sine:**

$$y = A\sin(\frac{\pi z}{L}) \qquad (11.4)$$

với: A là một hằng số bé, thể hiện độ võng giữa nhịp.

2- Tính P_{th} thanh có các liên kết khác ở đàu thanh

Áp dụng phương pháp trên cho thanh có các liên kết khác nhau ở hai đầu, ta được công thức tính lực tới hạn có dạng chung:

$$P_{th} = \frac{m^2\pi^2 EJ_{\min}}{L^2} \quad (11.5)$$

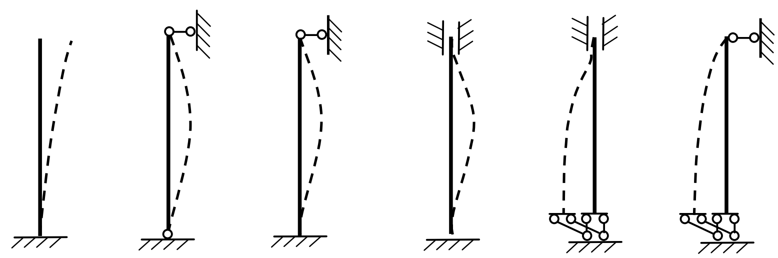
với: m - là số nửa sóng hình sine của đường đàn hồi khi mất ổn định.

Đặt $\mu = \frac{1}{m}$, gọi là hệ số quy đổi, (11.5) thành

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu L)^2} \quad (11.6)$$

(11.6) được gọi chung là **công thức Euler**

Dạng mất ổn định và hệ số μ của thanh có liên kết hai đầu khác nhau thể hiện trên H.11.5.



H. 11.5 Dạng mất ổn định và hệ số μ

3- Ứng suất tới hạn

Ứng suất trong thanh thẳng chịu nén đúng tâm bởi lực P_{th} gọi là ứng suất tới hạn và được xác định theo công thức:

$$\sigma_{th} = \frac{P_{th}}{F} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu L)^2 F} = \frac{\pi^2 Ei^2_{\min}}{(\mu L)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu L}{i_{\min}}\right)^2} \quad (11.7)$$

với: $i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}}$ là bán kính quán tính nhỏ nhất của tiết diện .

Đặt $\lambda = \frac{\mu L}{i_{\min}}$: **độ mảnh của thanh** (11.8)

(11.7) thành: $$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (11.9)$$

Độ mảnh λ không có thứ nguyên, phụ thuộc vào chiều dài thanh, điều kiện liên kết và đặc trưng hình học của tiết diện; thanh có độ mảnh càng lớn thì càng dễ mất ổn định.

4- Giới hạn áp dụng công thức Euler

Công thức Euler được xây dựng trên cơ sở phương trình vi phân đường đàn hồi, vì vậy chỉ áp dụng được khi vật liệu còn làm việc trong giai đoạn đàn hồi, tức là ứng suất trong thanh nhỏ hơn giới hạn tỷ lệ:

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{tl}$$

hay: $$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}} \qquad \text{(f)}$$

Nếu đặt: $$\lambda_o = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}} \qquad (11.10)$$

thì điều kiện áp dụng của công thức Euler là:

$$\lambda \geq \lambda_o \qquad (11.11)$$

trong đó: λ_o - được gọi là **độ mảnh giới hạn** và là một hằng số đối với mỗi loại vật liệu.

Thí dụ: Thép xây dựng thông thường $\lambda_o = 100$, gỗ $\lambda_o = 75$; gang $\lambda_o = 80$.

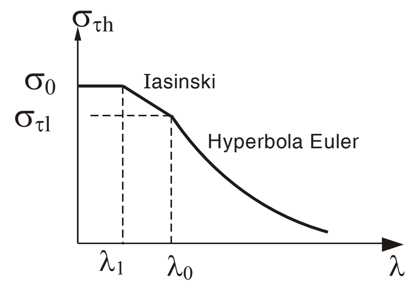
Nếu $\lambda \geq \lambda_o$ thì gọi là **độ mảnh lớn**.

Như vậy, công thức Euler chỉ áp dụng được cho thanh có độ mảnh lớn.

11.3 ỔN ĐỊNH NGOÀI MIỀN ĐÀN HỒI

1- Ý nghĩa

Công thức Euler chỉ áp dụng được khi vật liệu đàn hồi. Đồ thị của phương trình (11.6) là một *hyperbola* như trên H.11.6, chỉ đúng khi $\sigma_{th} \le \sigma_{tl}$.



H. 11.6 Ứng suất tới hạn

Khi $\sigma_{th} \succ \sigma_{tl}$ ⇔ vật liệu làm việc ngoài miền đàn hồi, cần thiết phải có công thức khác để tính P_{th}.

2- Công thức thực nghiệm Iasinski

Công thức Iasinski được đề xuất dựa trên nhiều số liệu thực nghiệm, phụ thuộc vào độ mảnh của thanh.

- **Thanh có độ mảnh vừa** $\lambda_1 \le \lambda \prec \lambda_o$:

$$\sigma_{th} = a - \lambda b \qquad (11.12)$$

với: *a* và *b* là các hằng số phụ thuộc vật liệu, được xác định bằng thực nghiệm: • Thép xây dựng: *a* = 33,6 kN/cm^2; *b* = 0,147 kN/cm^2

• Gỗ: *a* = 2,93 kN/cm^2; *b* = 0,0194 kN/cm^2

độ mảnh λ_1 được xác định từ công thức:

$$\lambda_1 = \frac{a - \sigma_{tl}}{b} \qquad (11.13)$$

thực nghiệm cho thấy phạm vi giá trị $\lambda_1 = 30 \div 40$

- **Thanh có độ mảnh bé** $\lambda \prec \lambda_1$: Khi này thanh không mất ổn định mà đạt đến trạng thái phá hoại của vật liệu. Vì vậy, ta coi:

$\sigma_{th} = \sigma_0 = \sigma_b$ *đối với vật liệu dòn*

$\sigma_{th} = \sigma_0 = \sigma_{ch}$ *đối với vật liệu dẻo* (11.14)

và Lực tới hạn của thanh : $P_{th} = \sigma_{th} \cdot F$ (11.15)

Thí dụ 11.1 Tính P_{th} và σ_{th} của một cột làm bằng thép số 3 có mặt cắt ngang hình chữ I số 22. Cột có liên kết khớp hai đầu. Xét hai trường hợp:

a. Chiều cao của cột 3,0 m

b. Chiều cao của cột 2,25 m

Biết: E = $2{,}1.10^4$ kN/cm^2; σ_{tl} = 21 kN/cm^2 ; λ_o = 100

Các hằng số trong công thức Iasinski : a= 33,6 kN/cm^2, b=0,147 kN/cm^2

Giải.

Tra bảng thép định hình (phụ lục) ta có các số liệu của thép I N^{o}22: $i_{\min} = i_y = 2{,}27\ cm;\ \ F = 30{,}6\,cm^2$; theo liên kết của thanh thì ta có $\mu = 1$.

+ Trường hợp a)

Độ mảnh : $\lambda = \dfrac{\mu l}{i_{\min}} = \dfrac{1.300}{2{,}27} = 132 > \lambda_o = 100$

Thanh có độ mảnh lớn, áp dụng công thức Euler

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 2{,}1.10^4}{132^2} = 11{,}88\,kN/cm^2$$

$$\Rightarrow \quad P_{th} = \sigma_{th}F = 11{,}88.30{,}6 = 363{,}62\,kN.$$

+ Trường hợp b)

Độ mảnh : $\lambda = \dfrac{\mu l}{i_{\min}} = \dfrac{1.225}{2{,}27} = 99{,}11 < \lambda_0$

$$\lambda_1 = \frac{a - \sigma_{tl}}{b} = \frac{33{,}6 - 21}{0{,}147} = 85{,}7 \quad \rightarrow \lambda_1 < \lambda < \lambda_0$$

Thanh có độ mảnh vừa, dùng công thức Iasinski:

$$\sigma_{th} = a - b\lambda = 33{,}6 - 0{,}147.90 = 20{,}37\,kN/cm^2$$

$$P_{th} = \sigma_{th}F = 20{,}37.30{,}6 = 623{,}32\,kN.$$

Chú ý: - Nếu liên kết của thanh trong hai mặt phẳng quán tính giống nhau trong các công thức đã có sẽ dụng $J_{\min}$ và $i_{\min}$.

- Nếu liên kết của thanh trong hai mặt phẳng quán tính khác nhau thì khi mất ổn định thanh sẽ cong trong mặt phẳng có độ mảnh lớn và các đại lượng J , i sẽ lấy trong mặt phẳng này.

11.4 PHƯƠNG PHÁP THỰC HÀNH TÍNH ỔN ĐỊNH THANH CHỊU NÉN

1- Phương pháp tính: Thanh chịu nén cần phải thỏa :

♦ Điều kiện bền: $\sigma = \dfrac{P}{F_{th}} \le [\sigma]_n$; với: $[\sigma]_n = \dfrac{\sigma_o}{n}$ (11.16)

trong đó: *n* - hệ số an toàn về độ bền

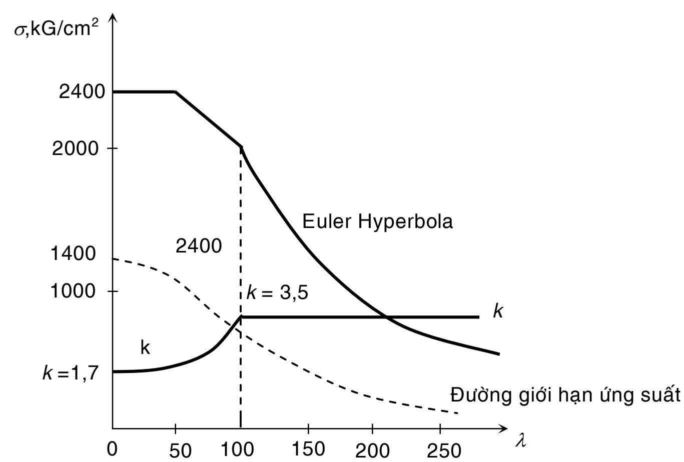
F_{th} - diện tích tiết diện giảm yếu (bị khoét lỗ); nếu không khoét lỗ thì $F_{th} = F$ là tiết diện nguyên

♦ Điều kiện ổn định: $\sigma = \dfrac{P}{F} \le [\sigma]_{\text{ôđ}}$; với: $[\sigma]_{\text{ôđ}} = \dfrac{\sigma_{th}}{k_{\text{ôđ}}}$ (11.17)

trong đó: $k_{\text{ôđ}}$ (hay k)- hệ số an toàn về ổn định.

Vì sự giảm yếu cục bộ tại một số tiết diện có ảnh hưởng không đáng kể đến sự ổn định chung của thanh.

Do tính chất nguy hiểm của hiện tượng mất ổn định và xét đến những yếu tố không tránh được như độ cong ban đầu, độ lệch tâm của lực nén … nên chọn $k_{\hat{o}đ} > n$, và *k* thay đổi phụ thuộc vào độ mảnh. Thép xây dựng có $k_{\hat{o}đ} = 1,8 \div 3,5$ như minh họa trên H.11.7; gang $k_{\hat{o}đ} = 5 \div 5,5$; gỗ $k_{\hat{o}đ} = 2,8 \div 3,2$.



Hình.11.7 *Hệ số an toàn $k_{\hat{o}đ}$ cho thép*

Để thuận tiện cho tính toán thực hành, người ta đưa vào khái niệm **hệ số uốn dọc** hoặc **hệ số giảm ứng suất cho phép** φ được định nghĩa như sau:

$$\varphi = \frac{[\sigma]_{\text{ôđ}}}{[\sigma]_n} = \frac{\sigma_{th}}{\sigma_o}\frac{n}{k}$$

$\varphi < 1$, vì cả hai tỉ số: $\dfrac{\sigma_{th}}{\sigma_o} < 1$ và $\dfrac{n}{k} < 1$

từ đó: $[\sigma]_{\text{ôđ}} = \varphi[\sigma]$, và điều kiện ổn định trở thành: $\sigma = \dfrac{P}{F} \le \varphi[\sigma]_n$ (11.18)

hay: $\dfrac{P}{\varphi F} \le [\sigma]_n$;

hay: $P \le [P]_{\text{ôđ}} = \varphi[\sigma]_n F$ (11.19)

Điều kiện ổn định (11.18) thoả, điều kiện bền (11.16) không cần kiểm tra

Hệ số $\varphi = \varphi\,[E, \lambda, k]$ được cho ở bảng 11.1

Bảng 11.1 *Hệ số* φ

Độ mảnh λ	Trị số φ đối với				
	Thép số 2,3,4	**Thép số 5**	**Thép CΠK**	**Gang**	**Gỗ**
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,54	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35		0,25
120	0,45	0,36	0,30		0,22
130	0,40	0,33	0,26		0,18
140	0,36	0,29	0,23		0,16
150	0,32	0,26	0,21		0,14
160	0,29	0,24	0,19		0,12
170	0,26	0,21	0,171		0,11
180	0,23	0,19	0,15		0,10
190	0,21	0,17	0,14		0,09
200	0,19	0,16	0,13		0,08

Vì φ < 1 nên thường chỉ cần kiểm tra điều kiện ổn định là đủ. Tuy nhiên, nếu thanh có giảm yếu cục bộ do liên kết bu lông, đinh tán… thì cần kiểm tra cả hai điều kiện bền và ổn định.

- Điều kiện bền: $\sigma = \dfrac{P}{F_{th}} \leq [\sigma]_n$ (11.20)

- Điều kiện ổn định $\sigma = \dfrac{P}{F} \leq \varphi[\sigma]_n$ (11.21)

trong thực tế, nếu thỏa (11.21) thì thường cũng thỏa (11.20).

Đối với bài toán ổn định cũng có ba bài toán:

1. Kiểm tra ổn định:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi\,[\sigma]_n \qquad (11.22)$$

2. Xác định tải trọng cho phép:

$$[P] \leq \varphi F\,[\sigma]_n \qquad (11.23)$$

Trong hai bài toán trên, vì tiết diện thanh đã biết nên có thể suy ra hệ số φ theo trình tự: *F, l* $\rightarrow \lambda = \dfrac{\mu l}{\sqrt{J/F}} \rightarrow \varphi$ (tra bảng 11.1)

3. Chọn tiết diện:

$$F \geq \frac{P}{\varphi[\sigma]_n} \qquad (11.24)$$

việc tìm *F* phải làm đúng dần, vì trong (11.22) chứa hai biến: *F* và φ *(F).* Trình tự như sau:

- Giả thiết: φ_o = 0,5; tính được: $F_o = \dfrac{P}{\varphi_o[\sigma]_n} \Rightarrow \lambda_o$

- Từ λ_o tra bảng ta được $\varphi_o^{'}$. Nếu $\varphi_o^{'} \neq \varphi_o$ thì lấy: $\varphi_1 = \dfrac{\varphi_o + \varphi_o^{'}}{2}$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{P}{\varphi_1[\sigma]_n} \Rightarrow \lambda_1 \Rightarrow \varphi_1^{'}$$

thường lặp lại quá trình tính khoảng 2 - 3 lần thì sai số tương đối giữa hai lần tính đủ nhỏ (≤ 5%).

Thí dụ 11.3 Chọn số liệu thép I cho thanh dài 2,0m, liên kết khớp hai đầu và chịu lực nén *P* = 230 kN. Biết vật liệu là thép số 2 có $[\sigma]_n = 14\,\text{kN}/cm^2$.

Giải:

a. Lần chọn thứ nhất

Giả thiết $\varphi = 0{,}5$, $\Rightarrow \quad F \geq \dfrac{P}{[\sigma]_n \varphi} = \dfrac{230}{14{,}0.0{,}5} = 32{,}8cm^2$

Tra bảng thép định hình ta chọn thép chữ I số 24 có *F* = 34,8 cm², $i_y = i_{min}$ = 2,37 cm, ta có độ mảnh:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1.200}{2{,}37} = 84{,}4$$

Tra bảng quan hệ giữa λ và φ ta được $\varphi = 0{,}724$. Hệ số này khác với giả thiết ban đầu nên ta phải chọn lại.

b. Lần chọn thứ hai

Giả thiết: $\varphi = \dfrac{0{,}5 + 0{,}724}{2} = 0{,}612 \quad \Rightarrow F \geq \dfrac{230}{0{,}612.14} = 26{,}84cm^2$

Tra bảng thép định hình ta tìm được thép chữ I số 20 với *F*= 26,8 cm², i_{min} = 2,07 cm. Độ mảnh lúc đó bằng:

$$\lambda = \frac{1.200}{2{,}07} = 96{,}6$$

tra bảng ta tìm được $\varphi = 0{,}631$ gần đúng giá trị 0,625 theo giả thiết. Do đó, ta kiểm tra lại điều kiện ổn định:

$$\frac{P}{\varphi F} \leq [\sigma]_n \;;\quad \frac{230}{0{,}631.26{,}8} = 13{,}6\,\text{kN}/cm^2 < [\sigma] = 14\,\text{kN}/cm^2$$

Vậy ta chọn thép chữ I số 20.

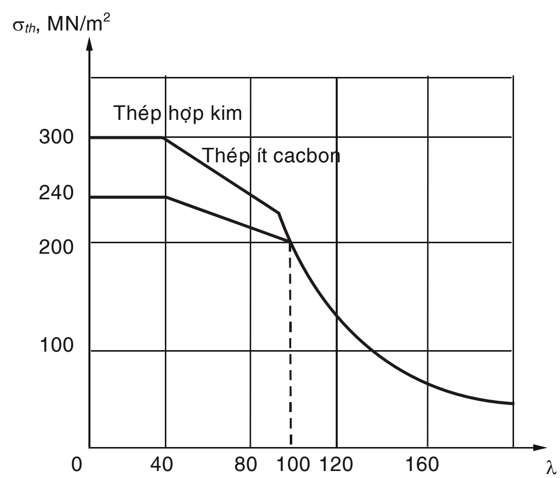
2- Chọn mặt cắt ngang và vật liệu hợp lý

Khi thiết kế thanh chịu nén, người ta cố gắng làm cho khả năng chịu lực của thanh càng lớn càng tốt. Theo công thức (11.6) và (11.15) ta có lực tới hạn:

- Trong miền đàn hồi: $P_{th} = \dfrac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$ (11.6)

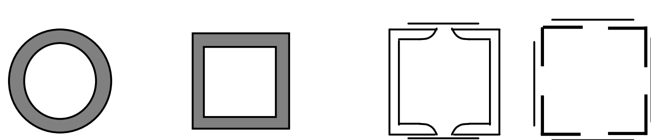
- Ngoài miền đàn hồi: $P_{th} = \sigma_{th}.F$ (11.15)

Thường thì chiều dài và liên kết hai đầu thanh được cho trước. Vì vậy, để tăng P_{th} có hai cách:



1) Chọn vật liệu có môđun đàn hồi lớn, Ví dụ dùng thép thay cho bê tông. Tuy nhiên, chỉ dùng thép cường độ cao thay cho thép cường độ thấp khi thanh làm việc ngoài miền đàn hồi; còn trong miền đàn hồi thép có môđun đàn hồi giống nhau nên việc thay thế không có lợi về mặt chịu lực như đồ thị trên H.11.8 thể hiện.

2) Nếu hệ số liên kết μ giống nhau theo hai phương thì cấu tạo tiết diện có $I_x = I_y$, và thường làm tiết diện rỗng để tăng mômen quán tính của mặt cắt nhưng phải có cấu tạo để không mất ổn định cục bộ. Tiết diện hợp lý của cột chịu nén trong thực tế thường có dạng như trên H.11.9



Hình 11.9 *Dạng tiết diện hợp lý*

Nếu liên kết hai phương khác nhau thì nên cấu tạo tiết diện sao cho có

$$\lambda_{max} = \lambda_{min}$$

hay: $$\frac{J_x}{\mu_x^2} = \frac{J_y}{\mu_y^2} \qquad (11.25)$$

11.5 XÁC ĐỊNH LỰC TỚI HẠN BẰNG PHƯƠNG PHÁP NĂNG LƯỢNG

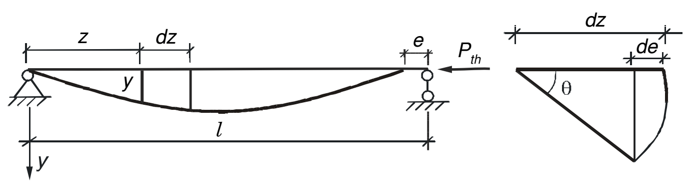
1- Khái niệm

Việc tìm lực tới hạn của thanh có độ mảnh lớn theo phương pháp tĩnh do Euler thực hiện là chính xác. Tuy nhiên, trong thực tế có những bài toán phức tạp hơn như thanh có độ cứng EJ thay đổi, lực phân bố dọc theo trục thanh... thì việc thiết lập và giải phương trình vi phân để tìm lực tới hạn trở nên phức tạp.

Trong trường hợp đó, người ta có thể dựa trên nguyên lý bảo toàn năng lượng để tìm nghiệm gần đúng.

2- Phương pháp năng lượng xác định lực tới hạn

Giả sử thanh chịu nén đúng tâm bởi lực P_{th}, như được minh họa trên H.11.10.



Hình 11.10 *Xác định lực tới hạn*

Dưới tác động của nhiễu, thanh bị uốn cong với phương trình *y(z)*, điểm đặt của lực P_{th} dịch chuyển một đoạn *e*. Theo nguyên lý bảo toàn năng lượng, công *A* của lực P_{th} bằng thế năng biến dạng uốn *U* của thanh:

$$A = U \qquad (11.26)$$

trong đó:
$$A = P_{th} e \qquad (11.27)$$

$$U = \int_o^l \frac{M^2}{2EJ} dz = \frac{1}{2}\int_o^l EJy''^2 dz \qquad (11.28)$$

Để xác định độ co ngắn *e* của thanh do sự uốn cong gây ra, ta xét phân tố thanh *dz* trên H.11.11. Ta có:

$$de = dz - dz\cos\theta = dz(1-\cos\theta) = dz(2\sin^2\frac{\theta}{2}) = dz2\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{\theta^2}{2}dz$$

hay:
$$de = \frac{y'^2}{2}dz \qquad (11.29)$$

Chú ý rằng, vì góc xoay θ là bé nên ở trên ta đã coi:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}; \quad \theta = tg\theta = y'$$

Tích phân (11.30) ta được:

$$e = \int_o^l \frac{y'^2}{2}dz = \frac{1}{2}\int_o^l y'^2\, dz \qquad (11.30)$$

Do đó: $$A = \frac{P_{th}}{2}\int_o^l y'^2\,dz \qquad (11.31)$$

Thế (11.31) và (11.28) vào (11.26) ta có:

$$\frac{P_{th}}{2}\int_o^l y'^2\,dz = \frac{1}{2}\int_o^l EIy''^2 dz$$

hay: $$P_{th} = \frac{\int_o^l EIy''^2 dz}{\int_o^l y'^2\,dz} \qquad (11.32)$$

Khi tìm lực P_{th} theo phương pháp năng lượng, ta chọn *y(z)* thỏa điều kiện biên và thế vào (11.33). Vì thường *y(z)* là gần đúng nên lực P_{th} cũng gần đúng. Sự sai lệch của đường đàn hồi *y(z)* có ý nghĩa như là thanh được đặt thêm một hệ liên kết đàn hồi nào đó phân bố dọc theo trục thanh và làm cho thanh trở nên cứng hơn. Vì vậy, lực P_{th} tìm theo phương pháp năng lượng luôn lớn hơn giá trị thật (chỉ bằng giá trị thật khi đường đàn hồi được chọn chính xác).

Thí dụ 11.4 Tìm lực P_{th} cho thanh trên H.11.11 với *EJ* = hằng số

Giải.

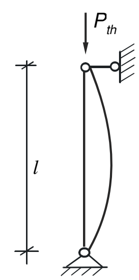
Giả sử đường đàn hồi được chọn gần đúng theo dạng do lực phân bố đều gây ra như sau:

$$y = \alpha z(z^3 - 2lz^2 + l^3)$$

với α - là một hằng số bé.

ta có: $$y' = \alpha(4z^3 - 6lz^2 + l^3)$$

$$y'' = 12\alpha\,(z^2 - lz)$$



Hình 11.11

Tìm P_{th} bằng phương pháp năng lượng

thế vào (11.33) ta tìm được: $P_{th} = \dfrac{9{,}882EI}{l^2}$

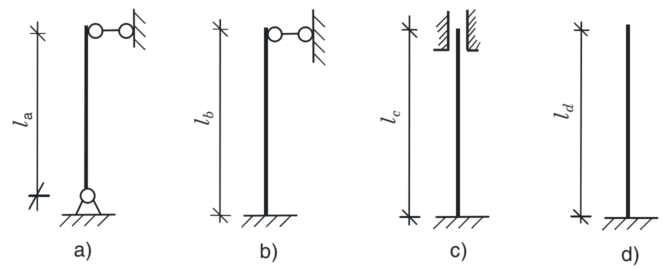
So với nghiệm chính xác $P_{th} = \dfrac{\pi^2 EI}{l^2} = \dfrac{9{,}8696EI}{l^2}$ thì kết quả tính lớn hơn 0,25%.

Nếu đường đàn hồi chọn là một nửa sóng hình *sine,* tức là trùng với đường đàn hồi chính xác của bài toán Euler, thì P_{th} tìm theo phương pháp năng lượng cũng cho kết quả chính xác.

BÀI TẬP CHƯƠNG 11

11.1 Cho bốn thanh có mặt cắt ngang như nhau làm bằng cùng một loại vật liệu và có liên kết như trên H.11.1.

Nếu muốn chịu được cùng một lực nén đúng tâm thì chiều dài của mỗi thanh phải bằng bao nhiêu L_a. Giả thiết vật liệu mất ổn định trong miền đàn hồi và EJ = hằng số.



Hình 11.1

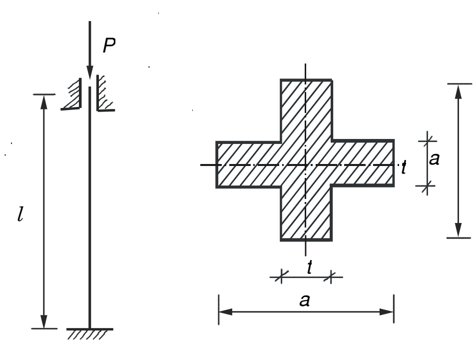
11.2 Thanh có chiều dài L = 3 m, một đầu ngàm, một đầu khớp. Hãy xác định lực tới hạn của thanh trong ba trường hợp sau đây:

a. Mặt cắt hình tròn bán kính R = 4 cm, vật liệu là gang xám có: σ_{tl} = 17,8 kN/cm^2; E = 1,15.10^4 kN/cm^2.

b. Mặt cắt hình tròn rỗng bán kính ngoài R = 3 cm và bán kính trong r = 2 cm, vật liệu là đura có σ_{tl} = 18 kN/cm^2; E = 0,71.10^4 kN/cm^2.

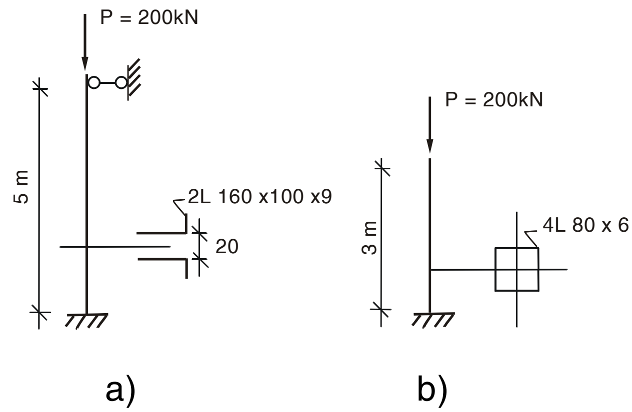
c. Mặt cắt hình vuông cạnh 15 cm × 15 cm, vật liệu bằng gỗ có: σ_{tl} = 1,7 kN/cm^2; E = 0,1.10^4 kN/cm^2. Biết hai hệ số trong công thức Iasinski là a = 2,93 kN/cm^2 và b = 0,0194 kN/cm^2

11.3 Cho thanh bằng gang có l = 1,6 m; a = 6 cm; t = 1 cm như H.11.14. Xác định lực tới hạn và ứng suất tới hạn. Cho λ_o = 80; a = 77,6 kN/cm^2; b = 1,2 kN/cm^2. Muốn thanh mất ổn định khi vật liệu còn làm việc trong giới hạn đàn hồi thì chiều dài của thanh phải bao nhiêu?



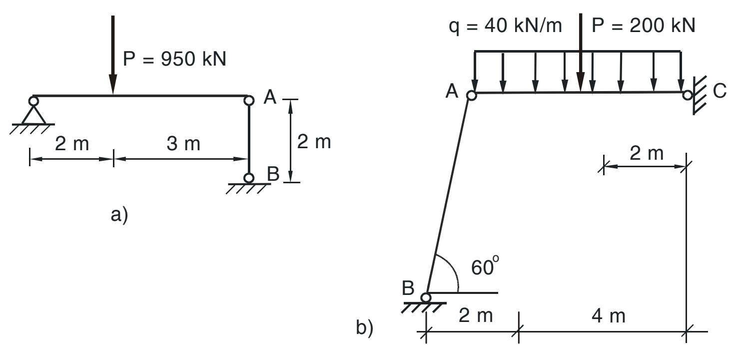
Hình 11.3

11.4 Kiểm tra ổn định của các thanh cho trên H.11.4, nếu [σ] = 14 kN/cm^2. Lực nén cho phép lớn nhất là bao nhiêu? Vật liệu của thanh thép là thép số 3.



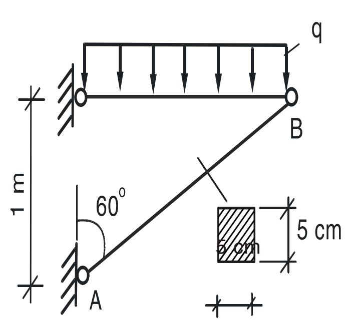
Hình 11.4

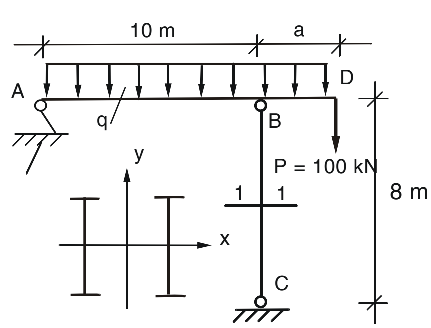
11.5 Cho hai hệ thanh chịu lực như trên H.11.5. Xác định số hiệu mặt cắt chữ **I** của thanh chống AB, biết [σ] = 16 kN/cm^2. Vật liệu là thép số 3. Xác định hệ số an toàn về ổn định của các thanh đó.



Hình 11.5

11.6 Một giá đỡ chịu tải trọng phân bố đều như trên H.11.6. Xác định trị số cho phép của cường độ tải trọng phân bố tác dụng lên giá. Thanh AB có mặt cắt hình vuông cạnh 5 cm x 5 cm làm bằng gỗ có [σ] = 1 kN/cm^2.

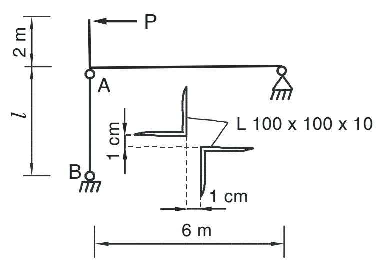




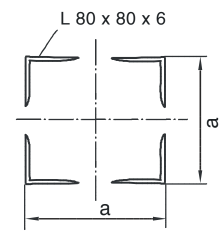
Hình 11.7

Hình 11.6

11.7 Một dầm cầu trục AD chịu lực như H.11.7. Cột BC làm bằng hai thép chữ **I** số 14 ghép lại sao cho mô men quán tính đối với hai trục bằng nhau. Xác định chiều dài tối đa của mút thừa a, biết rằng cột làm việc bất lợi nhất khi xe cầu trục mang một trọng lượng 100 kN đặt ở đầu mút thừa. Tải trọng phân bố $q = 4$ kN/m.



Hình 11.8



Hình 11.9

11.8 Hệ thanh chịu lực như H.11.8. Xác định chiều dài l của thanh chống AB làm bằng thép có $[\sigma] = 14$ kN/cm^2. Cho biết tải trọng $P = 300$ kN.

11.9 Một thanh chịu nén đúng tâm được làm bằng bốn thép góc đều cạnh loại $80 \times 80 \times 6$ (H.11.9). Xác định kích thước a của mặt cắt. Biết thanh dài $l = 6$ m hai đầu liên kết khớp và chịu lực nén ở đầu cột $P = 200$ kN. Vật liệu có $[\sigma] = 20$ kN/cm^2.

11.10 Một cột gỗ dài $L = 3$ m, mặt cắt hình chữ nhật $b \times h$. Đầu dưới của cột được chôn vào nền bê tông, đầu trên có thể trượt theo một khe nhỏ song song với phương chiều dài h của mặt cắt (H.11.10). Xác định kích thước của mặt cắt $b \times h$ sao cho mặt cắt là hợp lý nhất. Cho biết lực nén $P = 100$ N, $[\sigma] = 1$ kN/cm^2.