

## Chương 13

# TẢI TRỌNG ĐỘNG

### 13.1 KHÁI NIỆM

#### **1- Tải trọng động**

Trong các chương trước, khi khảo sát một vật thể chịu tác dụng của ngoại lực, ta coi ngoại lực tác dụng là *tĩnh*, tức là những tải trọng gây ra gia tốc chuyển động bé, vì vậy khi xét cân bằng có thể bỏ qua được ảnh hưởng của lực quán tính.

Tuy nhiên, cũng có những trường hợp mà tải trọng tác dụng không thể coi là tĩnh vì gây ra gia tốc lớn, ví dụ như sự va chạm giữa các vật, vật quay quanh trục, dao động... Khi này, phải xem tác dụng của tải trọng là *động*, và phải xét đến lực quán tính khi giải quyết bài toán.

#### **2- Phương pháp nghiên cứu**

Khi giải bài toán tải trọng động, người ta thừa nhận các giả thiết sau:

- Vật liệu đàn hồi tuyến tính
- Chuyển vị và biến dạng của hệ là bé.

Như vậy, nguyên lý cộng tác dụng vẫn áp dụng được trong bài toán tải trọng động.

Khi khảo sát cân bằng của vật thể chịu tác dụng của tải trọng động, người ta thường áp dụng nguyên lý d'Alembert. Tuy nhiên, trong trường hợp vật chuyển động với vận tốc thay đổi đột ngột như bài toán va chạm thì nguyên lý bảo toàn năng lượng được sử dụng.

Để thuận tiện cho việc tính hệ chịu tải trọng động, các công thức thiết lập cho vật chịu tác dụng của tải trọng động thường đưa về dạng tương tự như bài toán tĩnh nhân với một hệ số điều chỉnh nhằm kể đến ảnh hưởng của tác dụng động, gọi là hệ số động.

Trong chương này chỉ xét các bài toán tương đối đơn giản, thường gặp, có tính chất cơ bản nhằm mở đầu cho việc nghiên cứu tính toán động lực học chuyên sâu sau này.

### 13.2 THANH CHUYỂN ĐỘNG VỚI GIA TỐC LÀ HẰNG SỐ

Một thanh tiết diện  $A$  có chiều dài  $L$  và trọng lượng riêng  $\gamma$ , mang một vật nặng  $P$ , được kéo lên với gia tốc  $a$  như H.13.1.a.

Tưởng tượng cắt thanh cách đầu mút một đoạn  $x$ . Xét phần dưới như trên H.13.1.b, lực tác dụng gồm có: trọng lượng vật nặng  $P$

Trọng lượng đoạn thanh  $\gamma Ax$

Lực quán tính tác dụng trên vật  $P$  là  $\frac{P.a}{g}$

Lực quán tính của đoạn thanh là  $\frac{\gamma Ax a}{g}$

Nội lực động  $N_d$  tại mặt cắt đang xét.

Theo nguyên lý d'Alembert, tổng hình chiếu của tất cả các lực tác dụng lên thanh theo phương đứng kể cả lực quán tính phải bằng không, ta được:

$$N_d - \gamma Ax - P - \frac{Pa}{g} - \frac{\gamma Ax a}{g} = 0$$

$$N_d = \gamma Ax + P + \frac{Pa}{g} + \frac{\gamma Ax a}{g}$$

$$\Rightarrow N_d = (\gamma Ax + P) \left(1 + \frac{a}{g}\right)$$

Đại lượng  $(\gamma Ax + P)$  chính là nội lực trong thanh ở trạng thái treo không chuyển động, gọi là nội lực tĩnh  $N_t$ .

$$\text{Ta được: } N_d = N_t \left(1 + \frac{a}{g}\right) \quad (13.1)$$

Ứng suất trong thanh:

$$\sigma_d = \frac{N_d}{A} = \frac{N_t}{A} \left(1 + \frac{a}{g}\right) = \sigma_t \left(1 + \frac{a}{g}\right) \quad (13.2)$$

$$\text{có thể đặt: } K_d = 1 + \frac{a}{g} \quad : \text{ Hệ số động} \quad (13.3)$$

$$\sigma_d = \sigma_t K_d \quad (13.4)$$

Ứng suất lớn nhất tại mặt cắt trên cùng của thanh:

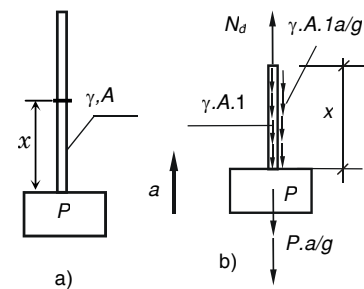
$$\sigma_{dmax} = \sigma_{t,max} \cdot K_d$$

$$\text{với: } \sigma_t = (\gamma AL + P)/A$$

Điều kiện bền trong trường hợp này là:

$$\sigma_{dmax} \leq [\sigma]_k \quad (13.5)$$

Ta thấy có hai trường hợp:



**Hình 13.1**

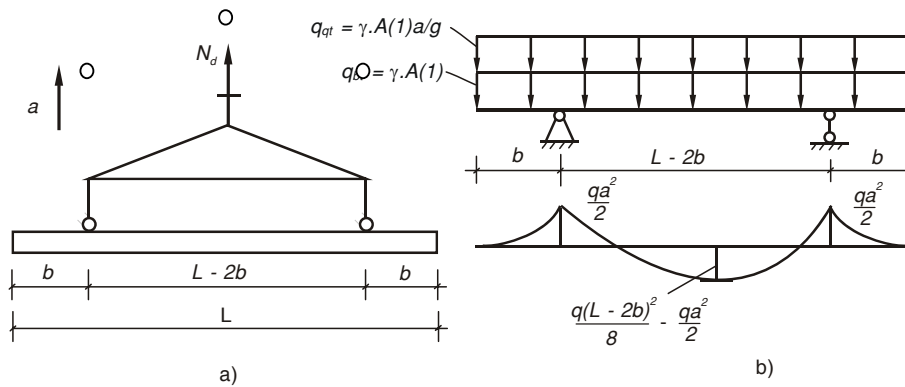
a) Vật chuyển động lên với gia tốc  $a$   
b) Nội lực và ngoại lực tác dụng lên phần thanh đang xét

- Khi chuyển động lên nhanh dần đều (gia tốc  $a$  cùng chiều chuyển động) và chuyển động xuống chậm dần đều (gia tốc  $a$  ngược chiều chuyển động) hệ số động  $K_d > 1$ , nội lực động lớn hơn nội lực tĩnh.

- Ngược lại, khi chuyển động lên chậm dần đều và chuyển động xuống nhanh dần đều thì  $K_d < 1$ , nội lực động nhỏ hơn nội lực tĩnh.

Dù vậy, khi một vật thể chuyển động như bài toán trên đây, phải tính toán thiết kế với  $K_d > 1$ .

**Thí dụ 13.1** Một thanh dài 10m có tiết diện vuông 30 cm x 30 cm và trọng lượng riêng  $\gamma = 2500 \text{ kG/m}^3$ , được kéo lên với gia tốc  $a = 5 \text{ m/s}^2$  (H.13.2). Xác định đoạn mút thừa  $b$  để mômen âm tại gối tựa bằng mômen dương tại giữa nhịp. Vẽ biểu đồ mômen, tính ứng suất pháp lớn nhất.



**Hình 13.2**

a) Thanh được kéo lên với gia tốc  $a$ ; b) Sơ đồ tính và biểu đồ mômen

Khi thanh được kéo lên với gia tốc  $a$ , thanh chịu tác dụng của lực quán tính, khi đó tải trọng tác dụng lên hệ là tải trọng phân bố đều, gồm có:

$$q = q_{bt} + q_{qt} = \gamma A(1) + \gamma A(1).a/g$$

$$= 2500(0,3.0,3) + 2500(0,3.0,3).5/10 = 337,5 \text{ KG/m}$$

Sơ đồ tính của thanh và biểu đồ mômen cho ở H.13.2.b.

Để mômen tại gối bằng mômen giữa nhịp, ta có:

$$\frac{qb^2}{2} = \frac{q(L-2b)^2}{8} - \frac{qb^2}{2} \Rightarrow b = 0,206L$$

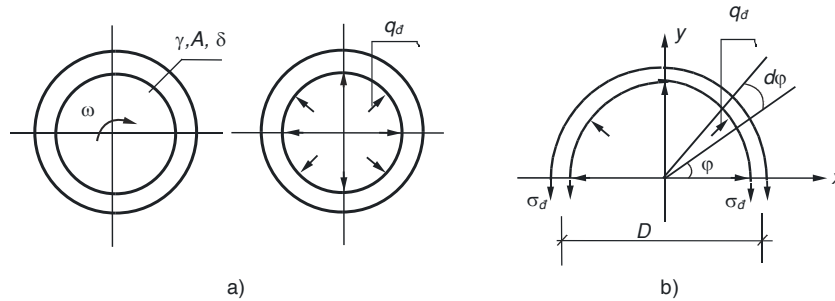
với  $b = 0,206L$  thì mômen lớn nhất là:

$$M_{x,\max} = \frac{qb^2}{2} = \frac{q(0,206L)^2}{2} = \frac{337,5(0,206.10)^2}{2} = 716,11 \text{ KG.m}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{716,11.100.6}{30.30^2} = 15,9 \text{ KG/cm}^2$$

### 13.3 VÔ LĂNG QUAY ĐỀU

Một vô lăng có bề dày  $\delta$ , đường kính trung bình  $D$ , tiết diện  $A$ , trọng lượng riêng  $\gamma$ , quay quanh trục với vận tốc góc không đổi  $\omega$  (H.13.3.a).



**Hình 13.3** a) Tải trọng tác dụng lên vô lăng  
b) Tách vô lăng theo mặt cắt xuyên tâm

Với chuyển động quay đều, gia tốc góc  $\dot{\omega} = 0$ , gia tốc tiếp tuyến:  
 $a_t = \dot{\omega} \frac{D}{2} = 0$  chỉ có gia tốc pháp tuyến hướng tâm là:  $a_n = \omega^2 \frac{D}{2}$  (a)

Một đoạn dài đơn vị của vô lăng có khối lượng  $\gamma A/g$  chịu tác dụng của lực quán tính ly tâm là:  $q_d = \gamma \frac{A}{g} \cdot a_n = \gamma \frac{AD\omega^2}{2g}$  (b)

Để tính nội lực trong vô lăng, dùng mặt cắt tách vô lăng theo mặt cắt xuyên tâm, xét cân bằng của một phần (H.13.3.b), do đối xứng, trên mặt cắt vô lăng không thể có biến dạng uốn (do mômen), biến dạng trượt (do lực cắt) mà chỉ có biến dạng dài do lực dọc, nghĩa là chỉ có ứng suất pháp  $\sigma_d$ .

Vì bề dày  $\delta$  bé, có thể xem  $\sigma_d$  là phân đều, lực ly tâm tác dụng trên chiều dài  $ds$  của vô lăng là  $q_d ds$ , phân tố  $ds$  định vị bởi góc  $\varphi$ , lấy tổng hình chiếu theo phương đứng, ta có:

$$2\sigma_d A = \int_0^\pi q_d ds \sin \varphi$$

thay:  $q_d = \gamma AD\omega^2/2g$  và  $ds = D d\varphi/2$  vào, ta được:

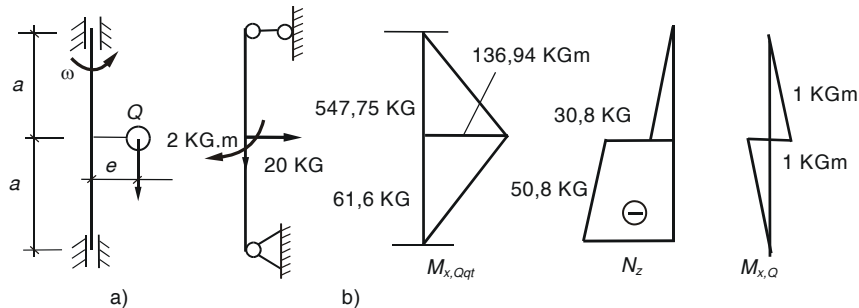
$$\sigma_d = \gamma \frac{D^2 \omega^2}{4g} \quad (13.6)$$

Vì ứng suất trong vô lăng là ứng suất kéo nên điều kiện bền vô lăng:

$$\sigma_d \leq [\sigma]_k \quad (13.7)$$

**Chú ý.** Khi tính vô lăng, ta đã bỏ qua ảnh hưởng của các nan hoa nối trục và vô lăng, nếu kể đến thì ứng suất kéo trong vô lăng sẽ giảm, độ phức tạp trong tính toán tăng lên nhiều, không cần thiết lắm trong tính toán thực hành.

**Ví dụ 13.2** Một trục đứng đường kính  $D = 10$  cm, trọng lượng riêng  $\gamma = 7850$  kG/m<sup>3</sup>, mang một khối lượng lệch tâm  $Q = 20$  kG (H.13.4.a), trục quay với vận tốc  $n = 500$  vòng/phút. Kiểm tra bền trục, tính chuyển vị tại điểm đặt khối lượng. Cho:  $[\sigma] = 1600$  kG/cm<sup>2</sup>;  $E = 2 \cdot 10^6$  kG/cm<sup>2</sup>,  $a = 0,5$ m.



Hình 13.4

**Giải.** Vận tốc góc:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = 2(3,14)500/60 = 52,33 \text{ rad/s}$$

Lực quán tính ly tâm  $Q_{lt}$  do trọng lượng  $Q$  là:

$$Q_{qt} = \frac{Q}{g} \omega^2 e = 20 \cdot 52,33^2 \cdot 0,1 = 5476,85 \text{ N}$$

$$Q_{qt} = 547,68 \text{ KG}$$

Bỏ qua ảnh hưởng do tác dụng tĩnh của trọng lượng  $Q$  và trọng lượng bản thân của trục vì chúng nhỏ so với lực ly tâm  $Q_{lt}$ .

Mômen do lực ly tâm gây ra là (H.13.4.b):

$$M_{x_{\max}} = Q_{lt}L/4 = 547,68(1)/4 = 136,92 \text{ kGm}$$

Ứng suất lớn nhất của trục:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x_{\max}}}{W_x} = \frac{136,92 \cdot 100}{3,14(10)^2 / 32} = 1395,36 \text{ kG/cm}^2$$

Nếu kể đến trọng lượng bản thân trục và tác dụng tĩnh của  $Q$ , tại tiết diện giữa trục chịu tác dụng của các nội lực như sau (H.13.4.b)

$$N_z = 50,8 \text{ kG (nén); } M_x = 135,92 \text{ kGm.}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{N_z}{A} + \frac{M_{x_{\max}}}{W_x} = \frac{30,8}{3,14(10)^2 / 4} + \frac{136,92 \cdot 100}{3,14(10)^2 / 32} \\ &= 0,392 + 1395,75 \text{ kG/cm}^2 \end{aligned}$$

Trong trường hợp này, trọng lượng bản thân của trục và tác dụng tĩnh của  $Q$  có thể bỏ qua.

Chuyển vị do tác dụng của lực  $Q_{lt}$  có thể tính theo công thức sau:

$$y = \frac{QL^3}{48EI_x} = \frac{547,75 \cdot (100)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3,14(10)^4 / 64} = 0,0116 \text{ cm}$$

### 13.4 DAO ĐỘNG CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO

## 1- Khái niệm

Một hệ chuyển động qua lại một vị trí cân bằng xác định nào đó, Ví dụ quả lắc đồng hồ, gọi là hệ dao động. Khi *hệ chuyển từ vị trí cân bằng này sang vị trí cân bằng kế tiếp sau khi đã qua mọi vị trí xác định bởi quy luật dao động, ta gọi hệ đã thực hiện một dao động.*

*Chu kỳ* là thời gian hệ thực hiện một dao động, ký hiệu là  $T$  tính bằng giây (s).

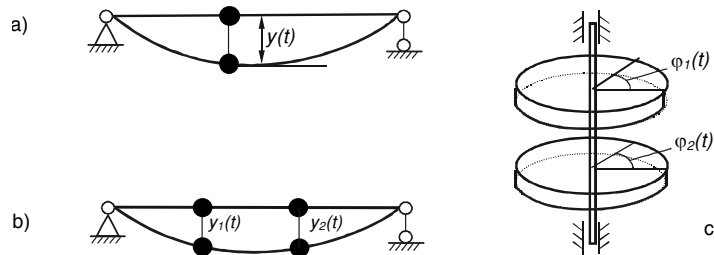
*Tần số* là số dao động trong một giây, ký hiệu là  $f$ , chính là nghịch đảo của chu kỳ,  $f = 1 / T$  (1/s).

Số dao động trong  $2\pi$  giây gọi là *tần số góc*, hay còn gọi là *tần số vòng*, ký hiệu là  $\omega$ , ta thấy  $\omega = 2\pi / T$  (1/s).

*Bậc tự do* là số thông số độc lập xác định vị trí của hệ đối với một hệ quy chiếu nào đó. Đối với một hệ dao động như trên H.13.5.a, vị trí của hệ xác định bởi độ dịch chuyển ( $y$ ) theo thời gian ( $t$ ), hệ quy chiếu sẽ là  $(t, y)$ .

Khi tính một hệ dao động, ta cần đưa về *sơ đồ tính*. Xác định sơ đồ tính của một hệ dựa trên điều kiện phải phù hợp với hệ thực trong mức độ gần đúng cho phép.

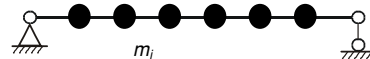
Xét dầm cho trên H.13.5.a, nếu khối lượng dầm không đáng kể, có thể xem dầm như một liên kết đàn hồi không khối lượng, vị trí của hệ quyết định do vị trí của khối lượng vật nặng, hệ có *một bậc tự do*, vì chỉ cần biết tung độ  $y(t)$  của vật nặng là xác định được vị trí của hệ tại mọi thời điểm ( $t$ ). Với hệ ở H.13.5.b, bậc tự do là hai, vì cần phải biết  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ . Đối với trục chịu xoắn (H.13.5.c), bậc tự do cũng là hai, vì cần phải biết góc xoắn  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ .



**Hình 13.5** a) Hệ một bậc tự do; b), c) Hệ hai bậc tự do

Khi kể đến khối lượng của dầm trên H.13.5.a, hệ trở thành vô hạn bậc tự do, vì phải biết vô số tung độ  $y(t)$  tại vô số điểm khối lượng suốt chiều dài dầm. Trong trường hợp này, cần chọn sơ đồ tính thích hợp, ví dụ nếu khối lượng dầm là nhỏ so với khối lượng vật nặng, có thể coi vật nặng đặt trên một liên kết đàn hồi không khối lượng, hệ có một bậc tự do.

Nếu không thể bỏ qua  
có thể đưa về hệ hữu hạn bậc  
xem khối lượng dầm gồm  $N$   
trên  $N$  điểm nút của thanh đàn hồi không khối lượng (H.13.6),  $N$  càng lớn,  
độ chính xác tính toán càng cao.



Hình 13.6 Hệ hữu hạn bậc tự do

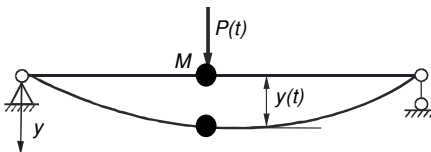
khối lượng dầm,  
tự do, bằng cách  
khối lượng  $m_i$  đặt

Một hệ đàn hồi có thể dao động tự do hay dao động cưỡng bức.

*Dao động cưỡng bức* là dao động của hệ khi chịu một tác động biến đổi theo thời gian, gọi là lực kích thích, tồn tại trong suốt quá trình hệ dao động như dao động của dầm mang một mô tơ điện khi nó hoạt động, khối lượng lệch tâm của rôto gây ra lực kích thích.

*Dao động tự do* là dao động do bản chất tự nhiên của hệ khi chịu một tác động tức thời, không tồn tại trong quá trình hệ dao động như dao động của dây đàn.

## 2- Phương trình vi phân dao động cưỡng bức của hệ một bậc tự do



Hình 13.7 Hệ một bậc tự do chịu dao động cưỡng bức

Xét hệ một bậc tự do chịu tác dụng một lực kích thích thay đổi theo thời gian  $P(t)$  đặt tại khối lượng  $M$  (H.13.7), tại thời điểm  $(t)$ , độ võng của khối lượng  $M$  là  $y(t)$ . Giả thiết lực cản môi trường tỷ lệ bậc nhất với vận tốc chuyển động, hệ số tỷ lệ  $\beta$ .

Gọi  $\delta$  là chuyển vị tại điểm đặt khối lượng  $M$  do lực đơn vị đặt tại đó gây ra. Chuyển vị  $y(t)$  là kết quả của các tác động:

- Lực kích thích  $P(t)$  gây ra chuyển vị  $P(t)\delta$
- Lực quán tính  $-M\ddot{y}(t)$  gây ra chuyển vị  $-M\ddot{y}(t)\delta$
- Lực cản môi trường  $-\beta\dot{y}(t)$  gây ra chuyển vị  $-\beta\dot{y}(t)\delta$

ta được 
$$y(t) = P(t)\delta + [-M\ddot{y}(t)\delta] + [-\beta\dot{y}(t)\delta] \quad (a)$$

$$M \delta \ddot{y}(t) + \beta \delta \dot{y}(t) + y(t) = P(t). \delta \quad (b) \quad (b)$$

Chia hai vế cho  $M\delta$  và đặt:

$$\frac{\beta}{M} = 2\alpha; \quad \frac{1}{M\delta} = \omega^2 \quad (c)$$

phương trình (b) trở thành:

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha \dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = P(t).\delta. \omega^2 \quad (13.8)$$

(13.8) là phương trình vi phân dao động cưỡng bức hệ một bậc tự do.

### 3- Dao động tự do

Khi không có lực kích thích và lực cản bằng không, hệ dao động tự do, phương trình (13.8) trở thành phương trình vi phân của dao động tự do:

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 \quad (13.9)$$

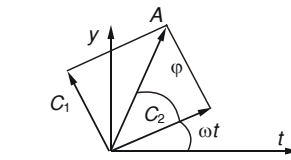
Tích phân phương trình (13.9), ta được nghiệm tổng quát có dạng:

$$y(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (d)$$

Sử dụng giản đồ cộng các vectơ quay (H.13.8), có thể biểu diễn hàm (a) dưới dạng:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (e)$$

Hàm (e) là hàm sin, chứng tỏ dao động tự do là một dao động tuần hoàn, điều hòa. Biên độ dao động là  $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ , tần số góc  $\omega$ , độ lệch pha  $\varphi$ .  $\omega$  còn được tính theo công thức:



Hình 13.8 Giản đồ các vectơ quay

tỏ dao động hoàn, điều hòa.  $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ , tần số gọi là tần số riêng

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{M\delta}} \quad (13.10)$$

Gọi  $P$  là trọng lượng của khối lượng  $M$ , ta có  $M = P/g$ , thay vào (13.10), ta được:  $\omega = \sqrt{\frac{g}{P\delta}}$

Tích số  $(P.\delta)$  chính là giá trị chuyển vị tại điểm đặt khối lượng  $M$  do trọng lượng  $P$  của khối lượng dao động  $M$  tác dụng tĩnh gây ra, gọi là  $\Delta t$ .

Công thức tính tần số của dao động tự do trở thành:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta t}} \quad (13.11)$$

$$\text{Chu kỳ của dao động tự do: } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{g/\Delta t}} \quad (13.12)$$

### 4- Dao động tự do có cản

Trong (13.8), cho  $P(t) = 0$ , ta được phương trình vi phân của dao động tự do có cản, hệ một bậc tự do:

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha \dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 \quad (13.13)$$

Nghiệm của (13.13) tùy thuộc vào nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$K^2 + 2\alpha K + \omega^2 = 0$$

Khi:  $\Delta = \alpha^2 - \omega^2 \geq 0$ , phương trình đặc trưng có nghiệm thực:

$$K_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$$

Nghiệm tổng quát của (13.13) có dạng:

$$y(t) = C_1 e^{K_1 t} + C_2 e^{K_2 t}$$

Ta thấy hàm  $y(t)$  không có tính tuần hoàn, do đó hệ không có dao động, ta không xét trường hợp này.

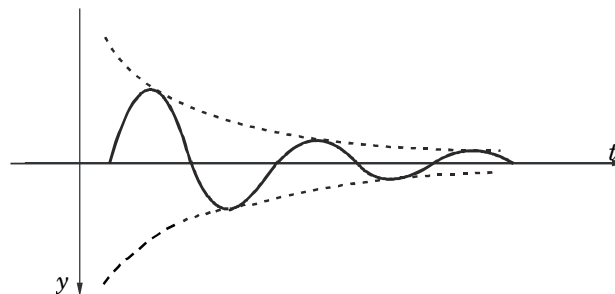
Khi:  $\Delta = \alpha^2 - \omega^2 < 0$ , đặt:  $\omega_1^2 = \omega^2 - \alpha^2$ , phương trình đặc trưng có nghiệm ảo:  $K_{1,2} = -\alpha \pm i\omega_1$

Nghiệm tổng quát của (13.13) có dạng:

$$y(t) = A_1 e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

Hàm  $y(t)$  là một hàm sin có tính tuần hoàn, thể hiện một dao động với tần số góc  $\omega_1$ , độ lệch pha  $\varphi_1$ , biên độ dao động là một hàm mũ âm  $A_1 e^{-\alpha t}$ , tắt rất nhanh theo thời gian.

Tần số dao động  $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$ , nhỏ hơn tần số dao động tự do  $\omega$  (H.13.9).



Hình 13.9 Đồ thị hàm số dao động tự do có cản

#### 4- Dao động cưỡng bức có cản

Từ phương trình vi phân dao động cưỡng bức có cản hệ một bậc tự do (13.8):  $q \ddot{y}(t) + 2\alpha \dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = P(t)\delta\omega^2$  (f)

Với các bài toán kỹ thuật thông thường, lực kích thích  $P(t)$  là một hàm dạng sin, do đó có thể lấy  $P(t) = P_0 \sin rt$ , khi đó phương trình vi phân (f) có dạng:

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha \dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \delta\omega^2 P_0 \sin rt \quad (13.14)$$

Nghiệm tổng quát của (13.14) có dạng:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

trong đó:  $y_1(t)$  - là một nghiệm tổng quát của (13.14) không vế phải, chính là nghiệm của dao động tự do có cản (e):

$$y_1(t) = A_1 e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (g)$$

$y_2(t)$  - là một nghiệm riêng của (13.14) có vẻ phải, vì vẻ phải là một hàm sin, do đó có thể lấy  $y_2(t)$  dạng sin:

$$y_2(t) = C_1 \cos rt + C_2 \sin rt$$

(h)

với:  $C_1$  và  $C_2$  - là các hằng số tích phân, xác định bằng cách thay  $y_2(t)$  và các đạo hàm của nó vào (13.14), rồi đồng nhất hai vế. Sử dụng giản đồ vectơ quay biểu diễn (h) dưới dạng:

$$y_2(t) = V \sin(rt + \theta) \quad (i)$$

Như vậy, phương trình dao động của hệ là:

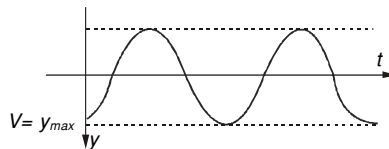
$$y(t) = A_1 e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + V \sin(rt + \theta) \quad (j)$$

Phương trình (j) chính là độ võng  $y(t)$  của dầm.

Số hạng thứ nhất của vế phải trong (j) là một hàm có biên độ tắt rất nhanh theo quy luật hàm mũ âm, sau một thời gian ngắn, hệ dao động theo quy luật:

$$y(t) = V \sin(rt + \theta) \quad (13.15)$$

Đó là một hàm sin biểu diễn một dao động tuần hoàn, điều hòa, tần số góc của dao động bằng tần số lực kích thích  $r$ , độ lệch pha  $\theta$ , biên độ dao động  $V$  (H.13.10).



Hình 13.10 Đồ thị biểu diễn dao động cưỡng bức có cân

Biên độ dao động chính là độ võng cực đại của dầm  $y_{max}$ , ta có:

$$V = y_{max} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad (k)$$

Tính các giá trị của  $C_1$  và  $C_2$ , thay vào (k), ta được độ võng cực đại của dầm:

$$y_{max} = \frac{P_o \delta}{\sqrt{(1 - \frac{r^2}{\omega^2})^2 + \frac{4\alpha^2 r^2}{\omega^4}}} \quad (h)$$

Tích số  $P_o \delta$  chính là giá trị của chuyển vị tại điểm đặt khối lượng  $M$  do lực có giá trị  $P_o$  (biên độ lực kích thích) tác dụng tĩnh tại đó gây ra, đặt là  $y_t$ , ta có:

$$y_{max} = y_t \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{r^2}{\omega^2})^2 + \frac{4\alpha^2 r^2}{\omega^4}}} \quad (13.16)$$

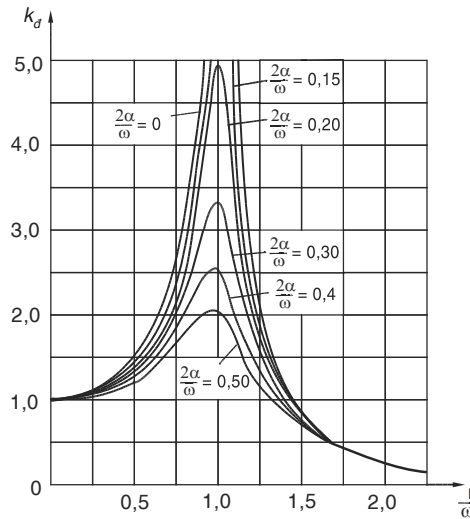
có thể viết là:  $y_{max} = y_t K_d$

với: 
$$K_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{r^2}{\omega^2})^2 + \frac{4\alpha^2 r^2}{\omega^4}}} \quad (13.17)$$

$K_d$  được gọi là hệ số động, thể hiện ảnh hưởng của tác dụng động so với tác dụng tĩnh ứng với trị số của biên độ lực.

### 5- Hiện tượng cộng hưởng

Khảo sát sự biến động  $K_d$  ở công thức coi  $K_d$  là một hàm hai  $(r/\omega, 2\alpha/\omega)$ . Ứng với một ta vẽ được đồ thị biểu  $(K_d, r/\omega)$  có dạng hình tại hoành độ  $\frac{r}{w} = 1$ , lần giá trị khác nhau ứng với dần, ta thấy đỉnh của đồ nhanh, với  $\alpha = 0$ , giá trị cực (H.13.11), nghĩa là vô cùng.



Hình 13.11 Đồ thị hàm số  $K_d = f(r/w; 2\alpha/w)$  với  $2\alpha/w$  là các hằng số cho trước

thiên của hệ số (13.17) bằng cách biến  $K_d = f$  giá trị xác định  $\frac{2\alpha}{\omega}$ , diễn quan hệ chuông mà đỉnh lượt cho  $\frac{2\alpha}{w}$  nhiều hệ số cản  $\alpha$  giảm thị ( $K_d$ ) tăng của  $K_d$  tiến đến vô độ vông dầm lớn

Hiện tượng biên độ dao động tăng đột ngột khi tần số lực kích thích bằng tần số riêng của hệ đàn hồi gọi là hiện tượng cộng hưởng. Trên đồ thị còn cho thấy khi hai tần số này xấp xỉ nhau ( $r/\omega \in [0,75 - 1,5]$ ), biên độ tăng rõ rệt, người ta gọi là miền cộng hưởng. Hiện tượng cộng hưởng rõ ràng rất nguy hiểm cho chi tiết máy hay công trình làm việc trong miền cộng hưởng, do đó trong thiết kế, ta phải tính toán sao cho hệ dao động nằm ngoài miền cộng hưởng.

Đồ thị cho thấy nên chọn tỷ số  $r/\omega$  lớn hơn 2, khi đó  $K_d$  nhỏ hơn 1, bài toán động ít nguy hiểm hơn bài toán tĩnh. Để có  $r/\omega$  lớn, thường phải giảm  $\omega$ , nghĩa là chuyển vị  $\Delta t$  phải lớn. Muốn vậy, phải giảm độ cứng của thanh đàn hồi, điều này nhiều lúc mâu thuẫn với yêu cầu độ bền của công trình. Để tránh làm giảm độ cứng công trình có thể đặt lò xo hay loại vật liệu có khả năng phát tán năng lượng đệm giữa khối lượng dao động và thanh đàn hồi.

Có trường hợp khi khởi động mô tơ, tốc độ mô tơ tăng dần đến tốc độ ổn định, một thời gian ngắn ban đầu công trình có thể ở trong miền cộng

hưởng, cần phải dùng loại động cơ tăng tốc nhanh để hiện tượng cộng hưởng nếu có xảy ra cũng chỉ trong thời gian rất ngắn.

Nếu khi hoạt động, công trình dao động với  $K_d$  lớn, cần tính toán kỹ để sử dụng các bộ giảm chấn làm tiêu hao năng lượng dao động hay tăng hệ số cản.

Trên H.13.11, ta thấy, khi tỷ số  $r/\omega \notin [0,5 - 2]$ , các đường cong  $K_d$  gần trùng nhau, hệ số cản xem như không ảnh hưởng, hoặc khi hệ số cản không đáng kể, có thể tính  $K_d$  theo công thức:

$$K_d = \frac{1}{\left|1 - \frac{r^2}{\omega^2}\right|} \quad (13.18)$$

Vì các đại lượng như chuyển vị, nội lực hay ứng suất tỷ lệ bậc nhất với ngoại lực, ta có thể viết:

$$\begin{aligned} \sigma_d &= \sigma_t K_d + \sigma_{t,ds} \\ \tau_d &= \tau_t K_d + \tau_{t,ds} \\ M_d &= M_t K_d + M_{t,ds} \end{aligned} \quad (13.19)$$

trong đó:  $\sigma_t, \tau_t$  - là các ứng suất do tải trọng có giá trị bằng biên độ lực kích thích ( $P_o$ ) tác dụng tĩnh

$\sigma_{t,ds}, \tau_{t,ds}$  - là các ứng suất do tải trọng tĩnh đặt sẵn, mà khi không có dao động nó vẫn tồn tại như trọng lượng bản thân mô-tơ.

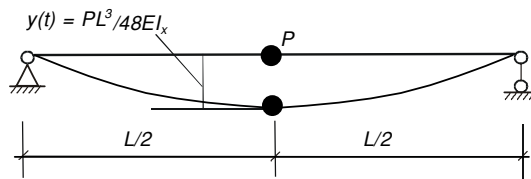
Điều kiện bền:

$$\sigma_{dmax} \leq [\sigma] \text{ hay } \tau_{dmax} \leq [\tau] \quad (13.20)$$

### 6- Phương pháp thu gọn khối lượng

Khi phải kể đến khối lượng dầm (các liên kết đàn hồi) ảnh hưởng quá trình dao động và không đòi hỏi độ chính xác cao, có thể tính gần đúng như hệ một bậc tự do theo phương pháp thu gọn khối lượng như sau.

Xét một dầm tựa đơn (H.13.12) khối lượng  $M$  tại giữa nhịp, giả sử khối lượng dầm đủ nhỏ để không làm thay đổi dạng dao động như khi chỉ có một khối lượng  $M$ , nếu gọi  $y(t)$  là độ võng của  $M$  tại giữa nhịp, ta có:



Hình 13.12 Dầm đơn dao động có kể đến khối lượng dầm

Độ võng tại mặt cắt tại hoành độ  $z$  sẽ là:

$$y(z) = \frac{PL^2z}{16EI_x} - \frac{Pz^3}{12EI_x} = y(t) \frac{Lz - 4z^3}{L^3}$$

Gọi  $q$  là trọng lượng 1 m dài của dầm, động năng của một phân tử khối lượng dài  $dz$  của dầm là:

$$dT = \frac{1}{2} \frac{qdz (3L^2z - 4z^3)^2}{g(L^3)^2} \frac{dy^2}{dt^2}$$

Động năng của toàn dầm là:

$$T = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{qdz(3L^2z - 4z^3)^2 dy^2}{g(L^3)^2 dt^2} \Rightarrow T = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{35} \frac{qL}{g} \frac{dy^2}{dt^2} \quad (13.21)$$

Động năng của toàn dầm tương đương động năng của một khối lượng  $m = (17/35)(qL/g)$  đặt tại giữa dầm. Như vậy, trên cơ sở tương đương động năng, có thể xem hệ là một bậc tự do với khối lượng dao động tại giữa dầm là:

$$M_1 = m + \frac{17}{35} \cdot \frac{qL}{g} \quad (13.22)$$

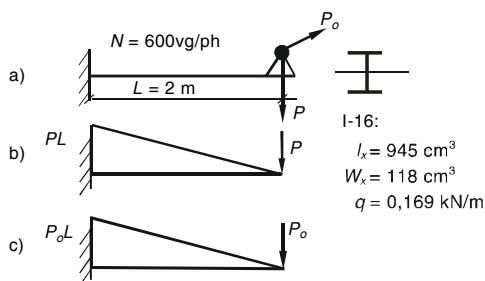
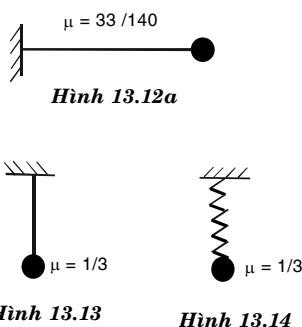
trong đó:  $qL/g$  - chính là khối lượng của toàn bộ dầm.

Gọi  $\mu$  là hệ số thu gọn khối lượng. Ta có:

- Đối với dầm đơn (H.13.12), khối lượng thu gọn tại giữa nhịp,  $\mu = 17/35$

- Đối với dầm cong xon (H.13.12a), khối lượng thu gọn tại đầu tự do,  $\mu = 33/140$ .

- Đối với lò xo dao động dọc, thanh thẳng dao động dọc (H.13.14), khối lượng thu gọn tại đầu tự do,  $\mu = 1/3$ .



Hình 13.15 a) Dầm công xon I-16 mang một mô tơ vận tốc 600 vòng/phút, khi hoạt động mô tơ sinh ra lực ly tâm 0,5 kN (H.13.15). Bỏ qua trọng lượng dầm, tính ứng suất lớn nhất, độ võng tại đầu tự do. Nếu kể đến trọng lượng dầm  $q$ , tính lại ứng suất và độ võng. Cho:  $E = 2 \cdot 10^4$  kN/cm<sup>2</sup>; hệ số cản  $\alpha = 2(1/s)$ .

**Ví dụ 13.3** Một dầm công xon tiết diện I-16 mang một mô tơ trọng lượng  $P = 2,5$  kN, vận tốc 600 vòng/phút, khi hoạt động mô tơ sinh ra lực ly tâm 0,5 kN (H.13.15). Bỏ qua trọng lượng dầm, tính ứng suất lớn nhất, độ võng tại đầu tự do. Nếu kể đến trọng lượng dầm  $q$ , tính lại ứng suất và độ võng. Cho:  $E = 2 \cdot 10^4$  kN/cm<sup>2</sup>; hệ số cản  $\alpha = 2(1/s)$ .

**Giải.** Theo số liệu đề bài, ta thấy khi mô tơ hoạt động thì dầm chịu tác dụng một lực kích thích dạng  $\sin P(t) = P_o \sin rt$ , với  $P_o = 0,5$  kN và tần số góc  $r$ .

a) Không kể đến trọng lượng dầm

Ứng suất động:  $\sigma_d = \sigma_{t,0}K_d + \sigma_{t,ds}$

Hệ số động: 
$$K_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{r^2}{\omega^2})^2 + \frac{4\alpha^2 r^2}{\omega^4}}}$$

trong đó:  $r = 2\pi n/60 = 2\pi 600/60 = 62,8 \text{ rad/s}; \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta t}}$

với:  $g = 10 \text{ m/s}^2 = 1000 \text{ cm/s}^2$

$$\Delta t = \frac{PL^3}{3EI_x} = \frac{2,5(300)^3}{3.2.10^4.945} = 1,19 \text{ cm}$$

ta được:  $\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta t}} = \sqrt{\frac{1000}{1,19}} = 29$

$$K_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{62,8^2}{29^2})^2 + \frac{4.2^2.62,8^2}{29^4}}} = 0,27$$

Từ biểu đồ mômen do trọng lượng  $P$  (H.13.15), ta thấy tại ngàm mômen lớn nhất, do đó ứng suất lớn nhất do tải trọng đặt sẵn trên dầm là:

$$\sigma_{ds,max} = \frac{M_{x,max,P}}{W_x} = \frac{PL}{W_x} = \frac{2,5.3.100}{118} = 6,35 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất do  $P_o$  tác dụng tĩnh được tính tương tự:

$$\sigma_{t,max} = \frac{P_o L}{W_x} = \frac{0,5.3.100}{118} = 1,27 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất động lớn nhất:

$$\sigma_d = 1,27(0,27) + 6,35 = 6,69 \text{ kN/cm}^2$$

Chuyển vị do trọng lượng đặt sẵn tại đầu tự do là:

$$y_{t,P} = \Delta t = 1,19 \text{ cm}$$

suy ra chuyển vị do  $P_o$  tác dụng tĩnh tại đầu tự do là:

$$y_{t,P_o} = \frac{0,5}{2,5} 1,19 = 0,238 \text{ cm}$$

Chuyển vị động lớn nhất tại đầu tự do, ta có:

$$y_d = 0,238(0,27) + 1,19 = 1,25 \text{ cm}$$

*b) Kể đến trọng lượng dầm*

Để đưa hệ về một bậc tự do, ta dùng phương pháp thu gọn khối lượng. Coi dầm không trọng lượng và ở đầu tự do có đặt một khối lượng:

$$m = \frac{33}{140} \frac{\gamma AL}{g}$$

nghĩa là tại đó có thêm một trọng lượng bằng:  $\frac{33}{140} \gamma AL = 0,119 \text{ kN}$

Chuyển vị tĩnh do khối lượng dao động là:

$$\Delta t = \frac{(P+0,119)L^3}{3EI} = \frac{(2,5+0,119)(300)^3}{3.2.10^4.945} = 1,247 \text{ cm}$$

ta được: 
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta t}} = \sqrt{\frac{1000}{1,247}} = 28,31$$

$$K_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{62,8^2}{28,31^2}\right)^2 + \frac{4 \cdot 2^2 \cdot 62,8^2}{28,31^4}}} = 0,25$$

Từ biểu đồ mômen do trọng lượng P (H.13.15), ta thấy tại ngàm mômen lớn nhất, ứng suất lớn nhất do tải trọng đặt sẵn trên dầm có kể thêm trọng lượng bản thân là:

$$\sigma_{ds,max} = \frac{M_{x,max,P}}{W_x} = \frac{(PL + qL^2/2)}{W_x}$$

$$\sigma_{ds,max} = \frac{(2,5 \cdot 3 + 0,169 \cdot 3^2/2) \cdot 100}{118} = 7 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất do  $P_o$  tác dụng tĩnh không khác phần trên là 1,27 kN/cm<sup>2</sup>.

Ứng suất động lớn nhất:

$$\sigma_d = 1,27(0,25) + 7 = 7,31 \text{ kN/cm}^2$$

Chuyển vị do trọng lượng đặt sẵn tại đầu tự do gồm trọng lượng mô tơ và phải kể thêm do trọng lượng bản thân là:

$$y_{t,P} = PL^3/3EI_x + qL^4/8EI_x = 1,19 + 0,307 = 1,497 \text{ cm}$$

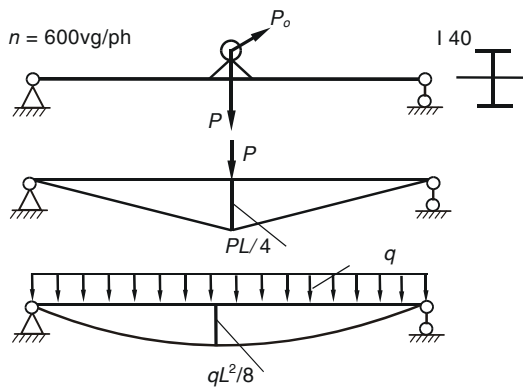
còn chuyển vị do  $P_o$  tác dụng tĩnh tại đầu tự do vẫn là 0,238 cm.

Chuyển vị động lớn nhất tại đầu tự do, ta có:

$$\sigma_d = 0,238(0,25) + 1,497 = 1,556 \text{ cm}$$

**Ví dụ 13.4** Một dầm 40, mang một mô tơ 2,5 kN, vận tốc 600 hoạt động mô tơ sinh kN (H.13.16). Kể đến tính ứng suất lớn nhất,

Cho:  $E = 2 \cdot 10^4$   
 $\alpha = 2(1/s)$ ; thép I40 có  $W_x = 947 \text{ cm}^3$ , trọng  $q = 0,56 \text{ kN/m}$ .



**Hình 13.16** a) Dầm đơn I40 mang một mô tơ b) và c) Sơ đồ tính và biểu đồ mômen do trọng lượng mô tơ P và trọng lượng bản thân

thép tiết diện I - trọng lượng P = vòng /phút, khi ra lực ly tâm 0,5 trọng lượng dầm, độ võng của dầm. kN/cm<sup>2</sup>; hệ số cản  $I_x = 19840 \text{ cm}^4$ , lượng mét dài

**Giải.** Theo số liệu đề bài, ta thấy khi mô tơ hoạt động thì dầm chịu tác dụng một lực kích thích dạng sin  $P(t) = P_o \sin rt$ , với  $P_o = 0,5 \text{ kN}$  và tần số góc r.

Ứng suất động:  $\sigma_d = \sigma_{t,Q} K_d + \sigma_{t,ds}$

Hệ số động: 
$$K_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\alpha^2 r^2}{\omega^4}}}$$

trong đó:  $r = 2\pi n/60 = 2.\pi.600/60 = 62,8 \text{ rad/s}$ ;  $\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta t}}$

với:  $g = 10 \text{ m/s}^2 = 1000 \text{ cm/s}^2$ .

Độ võng tại giữa dầm do lực tập trung  $P$  là:  $\Delta t = \frac{PL^3}{48EI_x}$

Kể đến trọng lượng dầm, phải đưa dầm về một bậc tự do, ta dùng phương pháp thu gọn khối lượng. Coi dầm không trọng lượng và ở giữa dầm có đặt một khối lượng:  $m = \frac{17}{35} \gamma AL$

nghĩa là tại đó có thêm một trọng lượng bằng:

$$\frac{17}{35} \gamma AL = 0,56(12) = 6,72 \text{ kN}$$

khi đó chuyển vị tĩnh do khối lượng dao động là:

$$\Delta t = \frac{(2,5+6,72)L^3}{48EI_x} = \frac{(9,22)(1200)^3}{48.2.10^4.18930} = 0,876 \text{ cm}$$

ta được:  $\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta t}} = \sqrt{\frac{1000}{0,876}} = 33,77$

$$K_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{62,8^2}{33,77^2}\right)^2 + \frac{4.2^2.62,8^2}{33,77^4}}} = 0,405$$

Từ biểu đồ mômen do trọng lượng  $P$  và do trọng lượng bản thân  $q$  (H.13.16), ta thấy tại giữa nhịp mômen lớn nhất, ứng suất lớn nhất do tải trọng đặt sẵn trên dầm có kể thêm trọng lượng bản thân là:

$$\sigma_{ds,max} = \frac{M_{x,max,P}}{W_x} = \frac{(PL/4 + qL^2/8)}{W_x}$$

$$\sigma_{ds,max} = \frac{(2,5.12/4 + 0,56.12^2/8).100}{947} = 1,856 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất do  $P_o$  tác dụng tĩnh là:

$$\sigma_{t,P_o} = \frac{P_o L}{4W_x} = \frac{0,5.(12)100}{4(947)} = 0,158 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất động lớn nhất:

$$\sigma_d = 0,158(0,405) + 1,856 = 1,92 \text{ kN/cm}^2$$

Chuyển vị do trọng lượng đặt sẵn tại giữa nhịp gồm trọng lượng mô tơ và phải kể thêm do trọng lượng bản thân là:

$$y_{t,p} = \frac{PL^3}{48EI_x} + \frac{5qL^4}{384EI_x} = 0,237 + 0,4 = 0,637 \text{ cm}$$

còn chuyển vị do  $P_o$  tác dụng tĩnh tại giữa nhịp là:

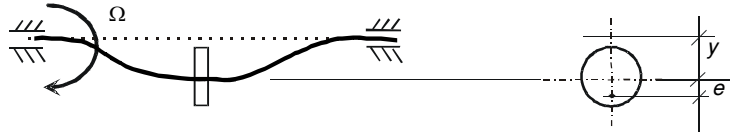
$$0,237 \times (0,5/2,5) = 0,0474 \text{ cm}$$

Chuyển vị động lớn nhất tại giữa nhịp, ta có:

$$y_d = 0,0474(0,405) + 0,637 = 0,656 \text{ cm}$$

### 13.5 TỐC ĐỘ TỐI HẠN CỦA TRỤC

Một trục quay mang một pu li khối lượng  $M$ , quay đều với vận tốc góc  $\Omega$ , gọi độ võng của trục tại pu li là  $y$ , giả sử trọng tâm của pu li lệch tâm so với tâm trục là  $e$  (H.13.17).



**Hình 13.17** Trục quay mang khối lượng lệch tâm

Lực ly tâm tác dụng lên trục:

$$F = M \Omega^2 (e + y)$$

Gọi  $\delta$  là chuyển vị tại vị trí pu li do lực đơn vị gây ra, ta có, chuyển vị gây ra bởi lực ly tâm  $F$  là:

$$y = M \delta \Omega^2 (e + y) \quad (i)$$

suy ra 
$$y = \frac{e \Omega^2}{\frac{1}{M \delta} - \Omega^2} \quad (13.23)$$

Theo công thức (13.23), độ võng trục cực đại khi  $\Omega^2 = \frac{1}{M \delta}$ , nghĩa là khi tốc độ của trục bằng tần số riêng  $\omega = \sqrt{\frac{1}{M \delta}}$ , gọi là *tốc độ tới hạn* của trục quay. Khi trục làm việc ở tốc độ gần tốc độ tới hạn, độ võng lớn, chi tiết máy có tiếng ồn, nên trong thiết kế phải tính toán sao cho tốc độ khác xa tốc độ tới hạn.

Nhận xét rằng, nếu tốc độ trục  $\Omega^2$  lớn hơn nhiều so với  $(1/M \cdot \delta)$ , công thức (13.23) chứng tỏ độ võng  $y \approx -e$ , trọng tâm của pu li gần trùng với tâm trục, trục ở trạng thái làm việc tốt nhất.

Chương 13: Tải trọng động

### 13.6 DAO ĐỘNG CỦA HỆ HAI BẬC TỰ DO

Xét một hệ có 2 bậc tự do như trên H.13.18. Nhiều bài toán thực tiễn có thể đưa về sơ đồ tính này.

Gọi  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  là chuyển vị của  $M_1$ ,  $M_2$ ;  $\delta_{ij}$  là chuyển vị tại điểm  $i$  do lực đơn vị đặt tại điểm  $j$  gây ra. Có thể chứng minh  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ .

Ta có:  $y_1(t) = \delta_{11} (-M_1 y_1) + \delta_{12} (-M_2 y_2)$

$$y_2(t) = \delta_{21} (-M_1 y_1) + \delta_{22} (-M_2 y_2) \quad (a)$$

Nghiệm tổng quát của (a) có dạng: **Hình 13.18**

Hệ hai bậc tự do

$$y_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$y_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi) \quad (l)$$

thay (b) vào (a), ta được hệ phương trình thuần nhất:

$$A_1 (\delta_{11} M_1 \omega^2 - 1) + A_2 \delta_{12} M_2 \omega^2 = 0$$

$$A_1 \delta_{21} M_1 \omega^2 + A_2 (\delta_{22} M_2 \omega^2 - 1) = 0 \quad (c)$$

để  $A_1$ ,  $A_2$  khác không thì định thức các hệ số của (c) phải bằng không:

$$\begin{vmatrix} (\delta_{11} M_1 \omega^2 - 1) & (\delta_{12} M_2 \omega^2) \\ (\delta_{21} M_1 \omega^2) & (\delta_{22} M_2 \omega^2 - 1) \end{vmatrix} = 0 \quad (d)$$

từ (d), và  $\delta_{12} = \delta_{21}$ , ta được:

$$\omega^4 M_1 M_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) - \omega^2 (\delta_{11} M_1 + \delta_{22} M_2) + 1 = 0 \quad (e)$$

Phương trình (e) gọi là phương trình tần số, giải (e), ta xác định được hai tần số riêng xếp thứ tự từ nhỏ đến lớn  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ . Như vậy, hệ có hai bậc tự do sẽ có hai tần số riêng.

Ứng với tần số  $\omega_1$ , theo (b), phương trình dao động có dạng:

$$y_1(t) = A_{11}\sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

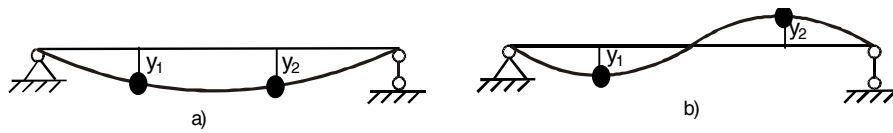
$$y_2(t) = A_{21}\sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

Ứng với tần số  $\omega_2$ , theo (b), phương trình dao động có dạng:

$$y_1(t) = A_{12}\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$y_2(t) = A_{22}\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

- Khi hệ dao động với tần số  $\omega_1$ , ta có thể chứng minh hệ dao động điều hòa cùng pha (H.13.19.a), gọi là dạng dao động chính thứ nhất.



**Hình 13.19** a) Dạng dao động chính thứ nhất  
b) Dạng dao động chính thứ hai

- Khi hệ dao động với tần số  $\omega_2$ , ta có thể chứng minh hệ dao động điều hòa lệch pha  $180^\circ$  (H.13.19.b), gọi là dạng dao động chính thứ hai.

Dao động của cả hệ một dao động phức hợp có phương trình:

$$y_1(t) = A_{11}\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12}\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$y_2(t) = \lambda_1 A_{11}\sin(\omega_1 t + \varphi_1) - \lambda_2 A_{12}\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (f)$$

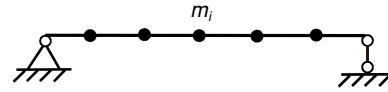
(f) không phải là một dao động điều hòa, nhưng có thể biểu diễn theo các dạng chính.

### 13.7 PHƯƠNG PHÁP RAYLEIGH

Đối với hệ nhiều bậc tự do, việc xác định tần số riêng bằng phương pháp chính xác rất phức tạp, do đó

trong một số trường hợp người ta dùng phương pháp gần đúng. Trong phần này, ta xét phương pháp Rayleigh.

Coi dầm như một thanh đàn hồi mang  $n$  khối lượng  $M_i$ , mỗi khối lượng bằng khối lượng của từng đoạn thanh dầm (H.13.20).



Hình 13.20 Hệ  $n$  bậc tự do

Giả sử hệ dao động tự do với các dạng chính, khi đó phương trình chuyển động của một khối lượng  $M_i$  là một hàm điều hòa, có thể viết:

$$y_i(t) = A_i \sin(\omega t + \varphi)$$

vận tốc của  $M_i$  là:  $\frac{dy_i(t)}{dt} = A_i \omega \cos(\omega t + \varphi)$

Khi hệ ở vị trí cân bằng  $y(t) = 0$ , vận tốc cực đại, thế năng biến dạng đàn hồi lúc đó bằng không, động năng hệ lớn nhất có giá trị bằng:

$$T = \frac{\omega^2}{2} \sum M_i y_i^2$$

Khi hệ ở xa vị trí cân bằng nhất, vận tốc bằng không, thế năng cực đại. Gọi phương trình đường đàn hồi của dầm là  $y(z)$ .

Vì: 
$$y'' = \frac{-M}{EJ} \Rightarrow M = -EI y''$$

áp dụng công thức tính thế năng biến dạng đàn hồi của dầm, ta được:

$$U = \frac{1}{2} \int EI \left( \frac{d^2 y(z)}{dz^2} \right)^2 dz$$

theo nguyên lý bảo toàn năng lượng,  $T = U$ , ta được:

$$\frac{\omega^2}{2} \sum M_i y_i^2 = \frac{1}{2} \int EI \left( \frac{d^2 y(z)}{dz^2} \right)^2 dz$$

tần số riêng là: 
$$\omega^2 = \frac{\frac{1}{2} \int EI \left( \frac{d^2 y(z)}{dz^2} \right)^2 dz}{\sum M_i y_i^2} \quad (13.24)$$

Với dầm đơn, tiết diện đều, trọng lượng phân bố  $q = \gamma A$ , đường đàn hồi do tải trọng bản thân là:

$$y(z) = \frac{q}{24EI} (z^4 - 4Lz^3 + 6L^2z^2)$$

khi dầm dao động, có thể chọn dạng đa thức như trên:

$$y(z) = z^4 - 4Lz^3 + 6L^2 z^2$$

Áp dụng phương pháp Rayleigh ta tính được tần số của dao động chính thứ nhất là: 
$$\omega_1 = \frac{3,49}{L^2} \sqrt{\frac{EIg}{\gamma A}}$$

So với giá trị giải theo phương pháp chính xác là:

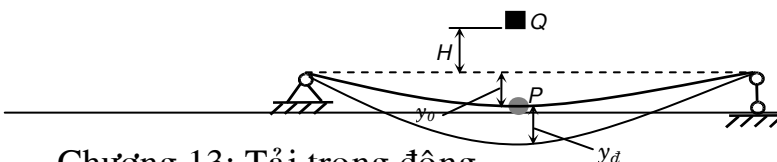
$$\omega_1 = \frac{3,52}{L^2} \sqrt{\frac{EIg}{\gamma A}}$$

thì sai số là 1% đủ nhỏ, chấp nhận được trong kỹ thuật.

## 13.8 VA CHẠM CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO

### 1- Va chạm đứng

Xét một dầm mang vật nặng  $P$  và chịu va chạm bởi vật nặng  $Q$ , rơi theo phương thẳng đứng từ độ cao  $H$  vào vật nặng  $P$  như trên H.13.21. Trọng lượng bản thân của dầm được bỏ qua. Giả thiết khi vật  $Q$  va chạm  $P$  cả hai vật cùng chuyển động thêm xuống dưới và đạt chuyển vị lớn nhất  $y_d$ .



Chương 13: Tải trọng động  
Hình 13.21 Hệ một bậc tự do chịu va chạm đứng

Chuyển vị của vật nặng  $P$  do trọng lượng bản thân của nó được ký hiệu là  $y_0$ .

Gọi  $V_0$  là vận tốc của  $Q$  ngay trước lúc chạm vào  $P$ ,  $V$  là vận tốc của cả hai vật  $P$  và  $Q$  ngay sau khi va chạm. Áp dụng định luật bảo toàn động lượng trước và ngay sau khi va chạm, ta được:

$$\frac{QV_0}{g} = \frac{(P+Q)}{g} V$$

hay 
$$V = \frac{Q}{P+Q} V_0 \quad (a)$$

Trong bài toán này, ta dựa vào phương pháp năng lượng để tìm chuyển vị trong dầm.

Ta gọi trạng thái 1 tương ứng với khi vật  $Q$  vừa chạm vào vật  $P$  và cả hai cùng chuyển động xuống dưới với vận tốc  $V$  (lúc này chuyển vị là  $y_0$ ). Trạng thái 2 tương ứng với khi  $Q$  và  $P$  đạt tới chuyển vị tổng cộng  $y_0 + y_d$ .

Động năng của vật  $P$  và  $Q$  ở trạng thái 1 ngay sau khi va chạm:

$$T_1 = \frac{1}{2} mV^2 = \frac{1}{2} \frac{(P+Q)}{g} \left( \frac{Q}{P+Q} V_0 \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{g(P+Q)} V_0^2$$

Động năng của vật  $P$  và  $Q$  ở trạng thái 2:

---

Chương 13: Tải trọng động

$$T_2 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{(P+Q)}{g} 0^2 = 0$$

Độ giảm động năng khi hệ chuyển từ trạng thái 1 sang trạng thái 2 là:

$$T = T_1 - T_2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{g(P+Q)} V_o^2 \quad (b)$$

Độ thay đổi thế năng khi hệ chuyển từ trạng thái 1 sang trạng thái 2 là:

$$\pi = mgh = \frac{P+Q}{g} g(y_d + y_o - y_o) = (P+Q)y_d \quad (c)$$

Theo nguyên lý bảo toàn năng lượng, khi hệ chuyển từ trạng thái 1 sang trạng thái 2, độ thay đổi cơ năng của vật  $P$  và  $Q$  sẽ chuyển thành thế năng biến dạng đàn hồi  $U$  tích lũy trong dầm.

$$U = T + \pi$$

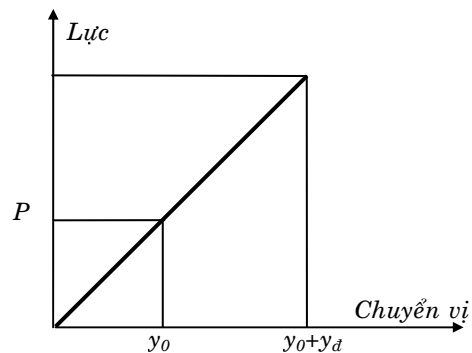
Tính  $U$  dựa vào quan hệ giữa lực và chuyển vị trong dầm như trên H.13.22. Ở trạng thái 1, trong dầm tích lũy một thế năng biến dạng đàn hồi  $U_1$  được tính như sau:

$$U_1 = \frac{1}{2} P y_o$$

Đặt  $\delta = \frac{y_o}{P}$  là chuyển vị tại điểm va chạm do lực đơn vị gây ra. Thế vào biểu thức trên ta có:

$$U_1 = \frac{1}{2\delta} y_o^2$$

Ở trạng thái 2, thế năng biến dạng đàn hồi  $U_2$  trong dầm là:



Hình 13.22. Đồ thị tính TNBĐĐH

$$U_2 = \frac{1}{2} \frac{(y_d + y_0)^2}{\delta}$$

Như vậy khi hệ chuyển từ trạng thái 1 sang trạng thái 2, thế năng biến dạng đàn hồi trong dầm được tích lũy thêm một lượng:

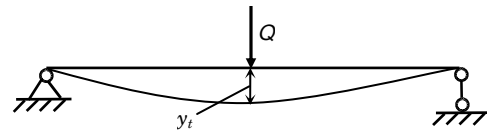
$$U = U_2 - U_1 = \frac{1}{2\delta} \left\{ (y_d + y_0)^2 - y_0^2 \right\} = \frac{1}{2\delta} (y_d^2 + 2y_d y_0)$$

$$U = \frac{y_d^2}{2\delta} + P y_d \quad (d)$$

Thay các biểu thức (b), (c), (d) vào (13.25) ta có:

$$\frac{y_d^2}{2\delta} + y_d P = \frac{1}{2} \frac{Q^2 V_o^2}{g(P+Q)} + (P+Q)y_d$$

Gọi  $y_t$  là chuyển vị của dầm tại điểm va chạm do trọng lượng  $Q$  tác dụng tĩnh tại đó gây ra như trên H.13.23. Thay  $y_t = Q\delta$  vào phương trình trên, ta được:



Hình 13.23. Sơ đồ tính chuyển vị  $y_t$

$$y_d^2 - 2y_t y_d - \frac{y_t V_o^2}{g(1+P/Q)} = 0 \quad (e)$$

Nghiệm của phương trình bậc hai (e) là:

$$y_d = y_t \pm \sqrt{y_t^2 + \frac{y_t V_o^2}{g(1+\frac{P}{Q})}}$$

Vì  $y_d > 0$ , nên chỉ chọn nghiệm dương của (e), tức là:

$$y_d = y_t + \sqrt{y_t^2 + \frac{y_t V_o^2}{g(1+\frac{P}{Q})}} = y_t \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{V_o^2}{g y_t (1+\frac{P}{Q})}} \right) = K_d y_t \quad (13.26)$$

Do đó hệ số động được tính bởi:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{V_0^2}{gy_t(1 + \frac{P}{Q})}} \quad (13.27)$$

Khi vật  $Q$  rơi tự do từ độ cao  $H$  xuống dầm, tức là  $v_0 = \sqrt{2gH}$ , thay vào (13.27):

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_t(1 + \frac{P}{Q})}} \quad (13.28)$$

Khi tại điểm va chạm không có trọng lượng đặt sẵn  $P = 0$ , hệ số động tăng lên:  $K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_t}}$  (

Khi  $P = 0$ ,  $H = 0$ , nghĩa là trọng lượng  $Q$  đặt đột ngột lên dầm:

$$K_d = 2 \quad ($$

Theo (13.29), khi  $y_t$  càng lớn, nghĩa là độ cứng của thanh càng nhỏ, thì  $K_d$  càng nhỏ, do đó sự va chạm càng ít nguy hiểm.

Để đảm bảo điều kiện bền, người ta có thể làm tăng  $y_t$  bằng cách đặt tại điểm chịu va chạm những vật thể mềm như lò xo hay tấm đệm cao su...

Khi đã tính được  $K_d$ , có thể tính đại lượng  $S$  khác trong hệ tương tự như chuyển vị, nghĩa là:

$$S_p = K_d S_t^Q + S^P \quad (13.31)$$

$S_t^Q$  là đại lượng cần tính (nội lực, ứng suất...) do  $Q$  coi như đặt tĩnh lên hệ tại mặt cắt va chạm gây ra.

$S_t^P$  là đại lượng cần tính (nội lực, ứng suất...) do các tải trọng hoàn toàn tĩnh đặt lên hệ gây ra.

Điều kiện bền:  $\sigma_{d,max} \leq [\sigma]$

**Chú ý:**

Nếu chọn móc thế năng bằng không ở vị trí dầm không biến dạng, thì cơ năng ban đầu của hệ chính là thế năng:

$$\pi = QH$$

Ngay sau khi va chạm,  $P$  và  $Q$  cùng chuyển động xuống dưới với vận tốc  $V$  thì cơ năng của hệ chính là động năng:

$$T = \frac{1}{2} \frac{P+Q}{g} V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{g(P+Q)} V_0^2 = \frac{Q}{(P+Q)} QH < \pi$$

Như vậy đã có sự mất mát năng lượng tương ứng với giả thiết va chạm mềm tuyệt đối của 2 vật thể; năng lượng này làm cho 2 vật thể biến dạng hoàn toàn dẻo, áp sát vào nhau và chuyển động cùng vận tốc về phía dưới.

**2- Va chạm ngang**

Xét một dầm mang vật nặng  $P$ . Vật nặng  $Q$  chuyển động ngang với vận tốc  $V_0$  và chạm vào vật nặng  $P$  như trên H.13.24. Trọng lượng bản thân của dầm được bỏ qua. Giả thiết khi vật  $Q$  va chạm  $P$  cả hai vật cùng chuyển động ngang và đạt chuyển vị lớn nhất  $y_d$ .



**Hình 13.24.** Hệ một bậc tự do chịu va chạm ngang

Lập luận như trường hợp va chạm đứng, ta cũng có:

Vận tốc của hai vật  $P$ ,  $Q$  cùng chuyển động ngay sau khi va chạm là:

$$V = \frac{Q}{P+Q} V_o$$

Độ giảm động năng trong hệ:  $T = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{g(P+Q)} V_o^2$

Vì hai vật chuyển động theo phương ngang, nên không có sự thay đổi thế năng, tức là:

$$\pi = 0$$

Thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong hệ là:

$$U = \frac{y_d^2}{2\delta}$$

Nguyên lý bảo toàn năng lượng,  $T+\pi = U$ , ta được phương trình sau:

$$\frac{1}{2} \frac{Q^2}{g(P+Q)} V_o^2 = \frac{y_d^2}{2\delta}$$

Lấy giá trị nghiệm dương của  $y_d$ , ta được:

$$y_d = \sqrt{\frac{\delta Q V_o^2}{g \left(1 + \frac{P}{Q}\right)}} \quad (13.32)$$

Ta lại có  $\delta = \frac{y_t}{Q}$ , với  $y_t$  là chuyển vị ngang của dầm tại điểm va chạm do trọng lượng  $Q$  tác dụng tĩnh nằm ngang tại đó. Thay vào phương trình (13.32) như sau:

$$y_d = y_t \frac{V_o}{\sqrt{g y_t \left(1 + \frac{P}{Q}\right)}} = y_t K_d \quad (13.33)$$

Hệ số động:

$$K_d = \frac{V_o}{\sqrt{g y_t \left(1 + \frac{P}{Q}\right)}} \quad (13.34)$$

Khi không đặt sẵn trọng lượng chịu va chạm, tức  $P = 0$ , hệ số động là:

$$K_d = \frac{V_o}{\sqrt{gy_t}} \quad (13.35)$$

Khi đó, nội lực, ứng suất cũng được tính như sau:

$$M_d = M_t \cdot K_d$$

$$\sigma_d = \sigma_t \cdot K_d$$

.....

Điều kiện bền:  $\sigma_{d,max} \leq [\sigma]$

**Ví dụ 13.5** Một dầm công xon tiết diện chữ nhật ( $20 \times 40$ ) cm chịu va chạm đứng bởi một trọng lượng  $Q = 1$  kN rơi tự do từ độ cao  $H = 0,5$  m

(H.13.25.a). Bỏ qua trọng lượng bản thân dầm, tính ứng suất và độ võng lớn nhất của dầm. Nếu kể đến trọng lượng bản thân dầm  $q$ , tính lại ứng suất và độ võng. Nếu đặt tiết diện dầm như (H.13.25.b), tính lại ứng suất và độ võng. Cho:  $E = 0,7 \cdot 10^3$  kN/cm<sup>2</sup>;  $q = 0,64$  kN/m.

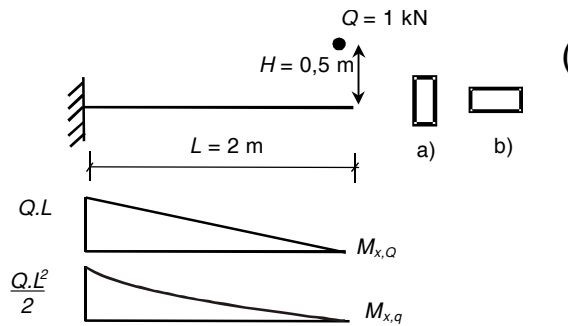
**Giải.** Ứng suất động:

$$\sigma_d = \sigma_{t,Q} K_d$$

với: 
$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_t}}$$

Không kể trọng lượng bản thân dầm, ta có:

$$y_t = \frac{QL^3}{3EI_x} = \frac{1(200)^3}{3(0,7 \cdot 10^3) \frac{20 \cdot 40^3}{12}} = 0,0357 \text{ cm}$$



Hình 13.25 Dầm công xon chịu va chạm

Hệ số động :  $K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(50)}{0,0357}} = 53,93$

Ứng suất lớn nhất tại ngàm (H.13.25):

$$\begin{aligned}\sigma_{d,\max} &= \sigma_{t,\max,Q} K_d = \frac{M_{x,\max}}{W_x} K_d = \frac{Q.L}{W_x} K_d \\ &= \frac{1(200)}{20.40^2 / 6} (53,93) = 2,02 \text{ kN/cm}^2\end{aligned}$$

Độ võng lớn nhất tại đầu tự do:

$$y_{\max} = y_{t,\max,Q} K_d = 0,0357(53,93) = 1,92 \text{ cm}$$

Khi kể đến trọng lượng bản thân, có thể dùng phương pháp thu gọn khối lượng, khi đó coi như dầm không trọng lượng và tại đầu tự do có một trọng lượng là  $(33/140)qL = 0,3 \text{ kN}$  ( $qL$  là trọng lượng dầm).

Hệ số động sẽ là:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_t(1 + \frac{P}{Q})}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(50)}{0,0357(1 + \frac{0,3}{1})}} = 47,43$$

Ứng suất do va chạm là:

$$\sigma_{d,\max} = \sigma_{t,Q} K_d = \frac{1(200)}{20.40^2 / 6} . 47,43 = 1,78 \text{ kN/cm}^2$$

Kể thêm ứng suất do trọng lượng dầm:

$$\sigma_{d,\max} = \frac{M_{t,\max,q}}{W_x} = \frac{qL^2 / 2}{W_x} = \frac{0,64.2^2.100}{20.40^2 / 6} = 0,024 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất lớn nhất trong dầm là:

$$\sigma_{\max} = 1,78 + 0,024 = 1,804 \text{ kN/cm}^2$$

Khi kể đến trọng lượng dầm, ứng suất lớn nhất giảm.

Độ võng tại đầu tự do

Độ võng do trọng lượng bản thân:

$$y_t = \frac{qL^4}{8EI_x} = \frac{0,64.10^{-2}(200)^4}{8(0,7.10^3) \cdot \frac{20.40^3}{12}} = 0,017 \text{ cm}$$

Độ võng khi có va chạm:

$$y_{d,\max} = y_{t,\max,Q} K_d + y_{t,q} = 0,0357.47,43 + 0,017 = 1,71 \text{ cm}$$

Nếu đặt tiết diện dầm như (H.13.25.b), ta được:

• Không kể trọng lượng dầm:

$$y_t = \frac{QL^3}{3EI_x} = \frac{1.(200)^3}{3(0,7.10^3) \cdot \frac{40.20^3}{12}} = 0,143 \text{ cm}$$

Hệ số động :  $K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(50)}{0,143}} = 27,46$

Ứng suất lớn nhất tại ngàm :

$$\begin{aligned} \sigma_{d,\max} &= \sigma_{t,\max,Q} K_d = \frac{M_{x,\max}}{W_x} K_d = \frac{QL}{W_x} K_d \\ &= \frac{1.(200)}{40.20^2 / 6} (27,46) = 2,06 \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

Độ võng tại đầu tự do:  $y_t = 0,143.(27,46) = 3,93 \text{ cm}$

• Kể đến trọng lượng bản thân, ta dùng phương pháp thu gọn khối lượng, khi đó coi như dầm không trọng lượng và tại đầu tự do có một trọng lượng là  $(33/140)qL = 0,3 \text{ kN}$  ( $qL$  là trọng lượng dầm).

Hệ số động sẽ là:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_t(1 + \frac{P}{Q})}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(50)}{0,143(1 + \frac{0,3}{1})}} = 24,21$$

Ứng suất do va chạm là:

$$\sigma_{d,\max} = \sigma_{t,Q} K_d = \frac{1(200)}{40.20^2 / 6} . 24,21 = 1,816 \text{ kN/cm}^2$$

Kể thêm ứng suất do trọng lượng dầm:

$$\sigma_{d,\max} = \frac{M_{t,\max,q}}{W_x} = \frac{qL^2 / 2}{W_x} = \frac{0,64.2^2 . 100}{40.20^2 / 6} = 0,096 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất lớn nhất trong dầm là:

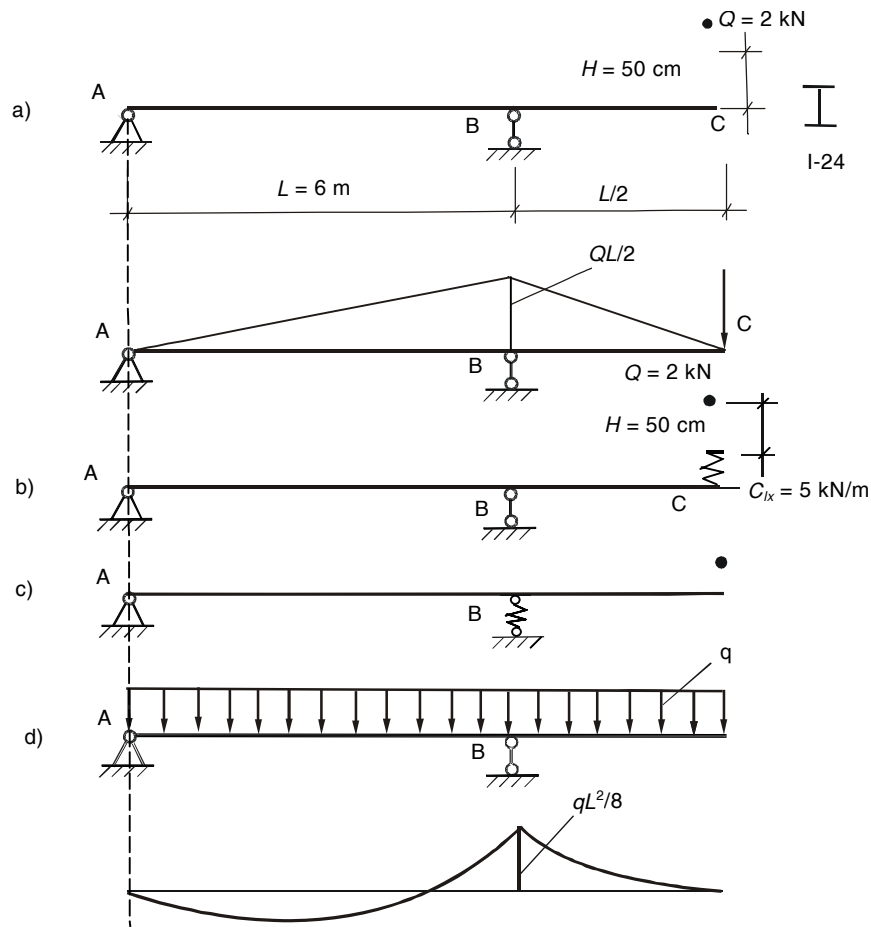
$$\sigma_{\max} = 1,816 + 0,096 = 1,912 \text{ kN/cm}^2$$

Khi kể đến trọng lượng dầm, ứng suất lớn nhất giảm.

Độ võng tại đầu tự do:

$$y_t = 0,143.(24,21) + 0,017 = 3,48 \text{ cm}$$

**Ví dụ 13.6** Dầm ABC tiết diện I-24 chịu va chạm đứng bởi một trọng lượng  $Q = 2 \text{ kN}$  rơi tự do từ độ cao  $H = 50 \text{ cm}$  (H.13.26.a), bỏ qua trọng lượng bản thân dầm, tính  $\sigma_{\max}$ ; kiểm tra bền. Cho: I-24 có:  $I_x = 3460 \text{ cm}^4$ ,  $W_x = 289 \text{ cm}^3$ ,  $q = 0,273 \text{ kN/m}$ ;  $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$ .



**Hình 13.24** a) Hệ chịu va chạm không có lò xo  
b) và c) Hệ chịu va chạm có lò xo; d) Dầm chịu trọng lượng bản thân

Bây giờ, đặt một lò xo có  $C_{IX} = 5 \text{ kN/m}$  tại C để đỡ vật va chạm Q (H.13.24.b), tính lại hệ số động và  $\sigma_{\max}$ ; xét lại điều kiện bền. Nếu không đặt ở C mà thay lò xo vào gối tựa tại B (H.13.26.c), hệ số động là bao nhiêu?

Cho:  $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$ ;  $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$ .

**Giải.** Không kể trọng lượng bản thân dầm.

Chuyển vị do Q tác dụng tĩnh tại C là:

$$y_t = \frac{QL^3}{8EI_x} = \frac{1 \cdot (600)^3}{8(2 \cdot 10^4) \cdot 3460} = 0,39 \text{ cm}$$

Hệ số động:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(50)}{0,39}} = 17,04$$

Ứng suất lớn nhất tại B (H.13.21):

$$\sigma_{d,\max} = \sigma_{t,\max,Q} K_d = \frac{M_{x,\max}}{W_x} K_d = \frac{Q.L}{2.W_x} K_d$$

$$\sigma_{d,\max} = \frac{1.(600)}{2.289} (17,04) = 17,69 \text{ kN/cm}^2 > [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$$

Dầm không bền.

Chuyển vị tại C:  $y_C = 0,39(17,04) = 6,64 \text{ cm}$

Xét trường hợp có lò xo đặt ngay tại điểm va chạm.

Chuyển vị do Q tác dụng tĩnh tại C là:

$$y_t = \frac{QL^3}{8EI_x} + \frac{Q}{C_{lx}} = \frac{1.(600)^3}{8(2.10^4).3460} + \frac{1}{5} = 0,39 + 0,2 = 0,59 \text{ cm}$$

Hệ số động :

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(50)}{0,59}} = 14,06$$

Ứng suất lớn nhất tại B (H.13.24):

$$\sigma_{d,\max} = \sigma_{t,\max,Q} K_d = \frac{1.(300)}{289} 14,06 = 14,6 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{d,\max} < [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$$

dầm thỏa điều kiện bền.

Chuyển vị của dầm tại C:  $y_C = 0,39(14,06) = 5,48 \text{ cm}$

giảm so với trường hợp trên.

Xét trường hợp có lò xo đặt tại gối B.

Bây giờ, chuyển vị do Q tác dụng tĩnh tại C là:

$$y_t = \frac{QL^3}{8EI_x} + \frac{3(3Q/2)}{2C_{lx}} = \frac{1.(600)^3}{8(2.10^4).3460} + \frac{3}{2} \frac{1}{5} = 0,39 + 0,3 = 0,69 \text{ cm}$$

Hệ số động:  $K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(50)}{0,69}} = 13,08$

Ứng suất lớn nhất tại B (H.10.21):

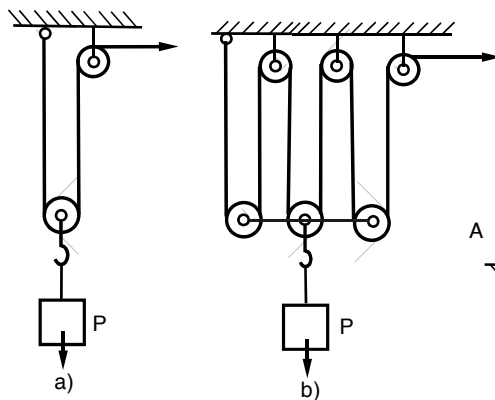
$$\sigma_{d,\max} = \sigma_{t,\max,Q} K_d = \frac{1 \cdot (300)}{289} 13,08 = 13,57 \text{ kN/cm}^2$$

Chuyển vị tại C:  $y_C = 0,69(13,08) = 9,02 \text{ cm}$

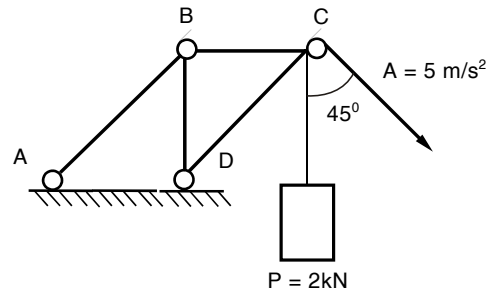
Trong trường hợp này, ứng suất giảm nhưng chuyển vị tăng so với khi đặt lò xo ở đầu tự do.

## BÀI TẬP CHƯƠNG 13

13.1 Một vật nặng P được nâng lên cao với bằng hệ thống ròng rọc đơn giản như trên H.13.24.a. Nếu kéo dây cáp với gia tốc đều a, tính lực căng trên dây cáp. Nếu dùng hệ thống ba cặp ròng rọc và cũng kéo dây với gia tốc a thì lực căng là bao nhiêu?



Hình 13.25

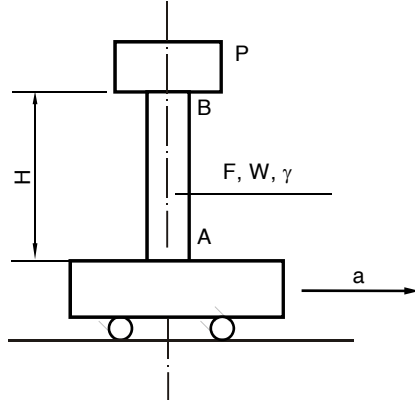


Hình 13.26

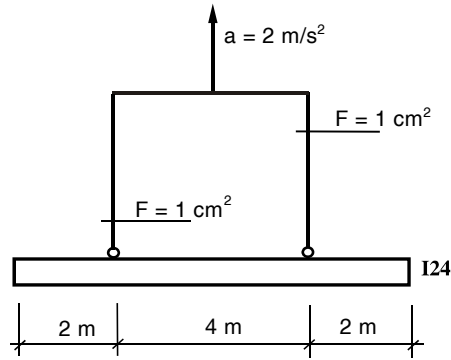
13.2 Một kết cấu nâng vật nặng P chuyển động lên với gia tốc a (H.13.26). Tính nội lực phát sinh trong các thanh AB, BC và CD.

13.3 Một trụ AB có chiều cao H, diện tích mặt cắt ngang là F, môđun chống uốn W, trọng lượng riêng là  $\gamma$  mang một vật nặng P. Trụ được gắn chặt vào một bộ vận chuyển theo phương ngang với gia tốc a (H.13.27).

Xem trụ bị ngàm tại tiết diện A vào bệ, xác định ứng suất pháp  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  tại mặt cắt nguy hiểm của trụ.



Hình 13.27

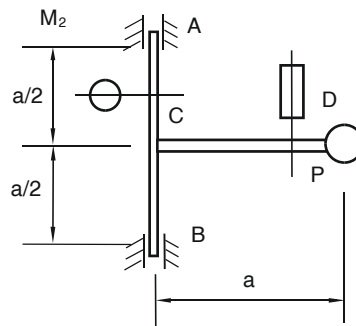


Hình 13.28

**13.4** Xác định ứng suất pháp lớn nhất trong dây cáp và trong dầm I-24 do tác dụng đồng thời của trọng lực và lực quán tính khi hệ được kéo lên với gia tốc  $a$  (H.13.28).

**13.5** Một trục tiết diện tròn AB đường kính  $D$  mang một thanh CD tiết diện chữ nhật  $b.h$ , đầu thanh CD có một vật nặng trọng lượng  $P$ , hệ quay quanh trục AB với vận tốc  $n = 210$  vg/ph (H.13.29). Tính ứng suất lớn nhất trong thanh CD và trục AB.

Cho:  $a = 1$  m;  $D = 4$  cm;  $h = 2b = 6$  cm;  $P = 0,1$  kN.

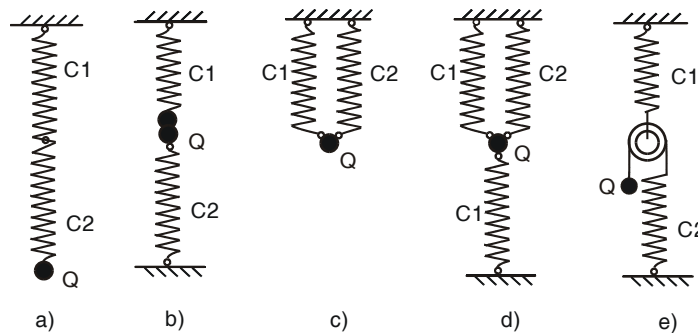


Hình 13.29

Chương 13: Tải trọng động

Bỏ qua trọng lượng bản thân của hệ.

**13.6** Tính tần số góc và chu kỳ dao động của các hệ vẽ trên H.13.30,  $C_1$  và  $C_2$  là độ cứng của lò xo.



Hình 13.30

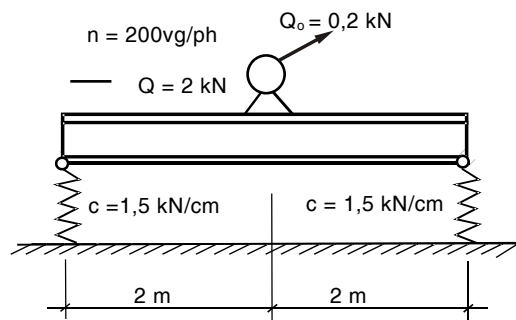
**13.7** Một dầm đơn giản mặt cắt hình chữ I số 40 dài 8 m mang một trọng lượng 20 kN ở giữa nhịp. Tính tần số riêng  $\omega$  của hệ khi có kể và khi không kể đến trọng lượng dầm.

**13.8** Một dầm thép I24 mang một mô-tơ nặng 2 kN tốc độ 200 vg/ph, lực quán tính do khối lượng lệch tâm là 0,2 kN (H.13.31). Bỏ qua trọng lượng bản thân của dầm và lò xo, xác định ứng suất động lớn nhất trong dầm trong các trường hợp sau:

a) Dầm I24 đặt theo phương đứng (I)

b) Dầm I24 đặt theo phương ngang ( ).

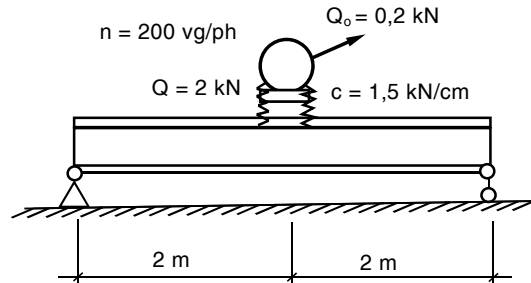
**13.9** Giả sử hai gối tựa lò xo trên dầm ở



Hình 13.31

Chương 13: Tải trọng động

H.13.31 được thay bằng gối tựa cứng và đặt hai lò xo dưới đế môơ như ở H.13.32. Tính lại ứng suất và độ võng lớn nhất trong dầm theo cả hai trường hợp như trên. Cho:  $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$ .

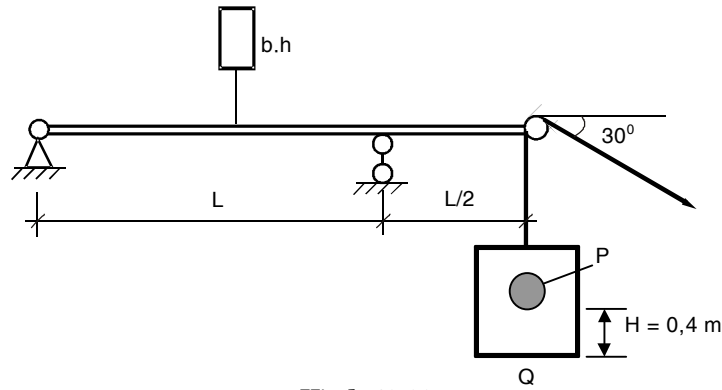


Hình 13.32

**13.10** Một dầm gỗ tiết diện chữ nhật  $b.h$ , có đầu mút thừa gắn một ròng rọc để đưa một thùng trọng lượng  $Q$  chứa vật nặng  $P$  lên cao. (H.13.33). Hãy xét hai trường hợp:

a) Vật nặng  $P$  được treo trong thùng và thùng được kéo lên với gia tốc  $a = 2 \text{ m/s}^2$ . Bỏ qua trọng lượng dầm, dây và ròng rọc, tính ứng suất lớn nhất của dầm. Cho:  $P = 0,5 \text{ kN}$ ;  $Q = 1 \text{ kN}$ ;  $L = 4 \text{ m}$ .

b) Trong quá trình dịch chuyển với gia tốc  $a = 2 \text{ m/s}^2$  vật nặng  $P$  bị rơi xuống đáy thùng. Tính lại ứng suất của dầm. Cho:  $H = 0,4 \text{ m}$ .

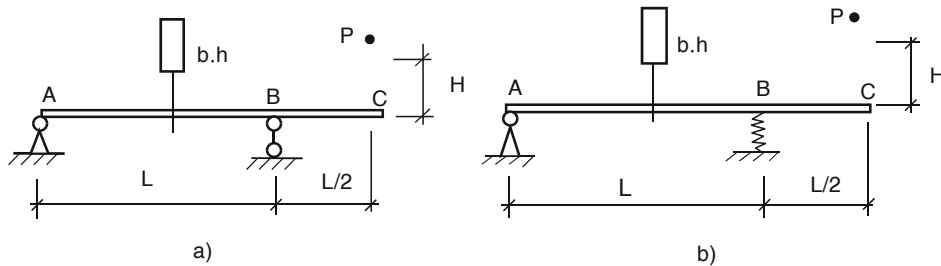


Hình 13.33

**13.11** Một trọng lượng  $P = 0,5 \text{ kN}$  rơi từ một độ cao  $H = 10 \text{ cm}$  xuống đầu C của một dầm tiết diện chữ nhật  $b \times h = 20 \times 40 \text{ cm}^2$ , dài  $L = 4 \text{ m}$  (H.13.34.a). Tính ứng suất và độ võng lớn nhất của dầm

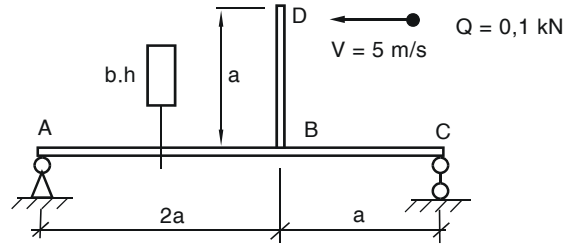
Nếu thay gối tựa B bằng một lò xo có đường kính  $D = 100 \text{ mm}$ , đường kính sợi thép  $d = 10 \text{ mm}$ , số vòng làm việc  $n = 10$  (H.13.34.b). Tính ứng suất và độ võng lớn nhất của dầm.

Cho:  $E_{\text{dầm}} = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$ ,  $G_{\text{lò xo}} = 8 \cdot 10^3 \text{ kN/cm}^2$ .



Hình 13.34

**13.12** Xác định ứng suất của dầm khi vật bị va chạm ngang (H.13.35). Cho:  $a = 2 \text{ m}$ ;  $b.h = 20 \times 40 \text{ cm}^2$ . Thanh DB tuyệt đối cứng.



**Hình 13.35**

---

Chương 13: Tải trọng động