Chương 1

KHÁI NIỆM VÀ NGUYÊN LÝ CƠ BẢN TRONG LÝ THUYẾT PHẦN TỬ HỮU HẠN

Chương này trình bày một số khái niệm và nguyên lý làm cơ sở cho lý thuyết phần tử hữu hạn. Trước hết, ta hãy tìm hiểu nội dung khái quát của phương pháp phần tử hữu hạn.

§1.1.KHÁI NIỆM VỀ PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Phương pháp phần tử hữu hạn là một công cụ có hiệu lực để giải các bài toán cơ học trong nhiều lĩnh lực: Xây dựng, Cơ khí v.v... Nó có thể áp dụng vào bất cứ một hệ nào, từ hệ đơn giản như thanh đến hệ phức tạp như bản, vỏ.

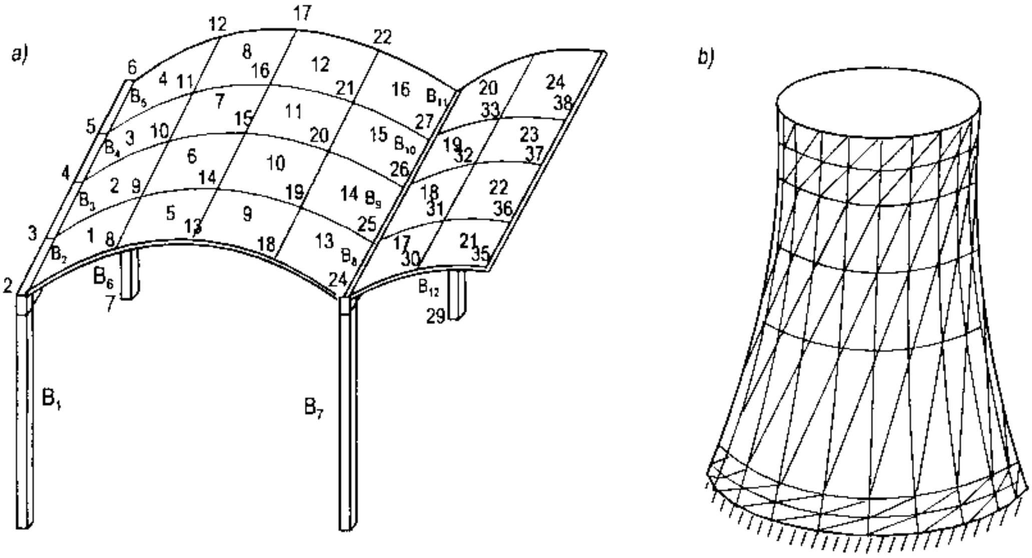
Từ năm 1955, Argyris (1) nêu lên các định lý về năng lượng và phương pháp ma trận, đặt nền tảng cho sự phát triển về sau của phương pháp phần tử hữu hạn. Cuốn sách đầu tiên về phương pháp phần tử hữu hạn được Zienkiewicz (2) và Chung xuất bản vào năm 1967. Về sau, phương pháp đã được áp dụng vào các bài toán phi tuyến và bài toán biến dạng lớn.

Thực chất của phương pháp phần tử hữu hạn là chia vật thể biến dạng thành nhiều phần tử có kích thước hữu hạn gọi là *phần tử hữu hạn*. Các phần tử này được liên kết với nhau bằng các điểm gọi là *nút* hoặc *điểm nút* (hình 1.1).

Các đặc trưng của các phần tử hữu hạn được phối hợp với nhau để đưa đến một lời giải tổng thể cho toàn hệ. Chẳng hạn trong phương pháp chuyển vị, các *hàm hình dạng* được chọn để biểu thị sự biến thiên của các thành phần chuyển vị trong phần tử hữu hạn theo các thành phần chuyển vị tại các điểm nút. Ứng suất và biến dạng trong phần tử hữu hạn cũng được biểu thị qua các thành phần chuyển vị tại các nút. Một số nguyên lý cơ bản như nguyên lý công ảo, nguyên lý thế năng bé nhất được áp dụng để thành lập hệ phương trình cân bằng cho mỗi phần tử hữu hạn.

Phương trình cân bằng của toàn hệ kết cấu được suy ra bằng cách phối hợp các phương trình cân bằng của các phần tử hữu hạn riêng rẽ sao cho vẫn bảo đảm được tính liên tục của toàn bộ kết cấu.

Cuối cùng, căn cứ vào các điều kiện biên, giải hệ phương trình cân bằng tổng thể để xác định giá trị của các thành phần chuyển vị. Các thành phần này sẽ được dùng để tính ứng suất và biến dạng.

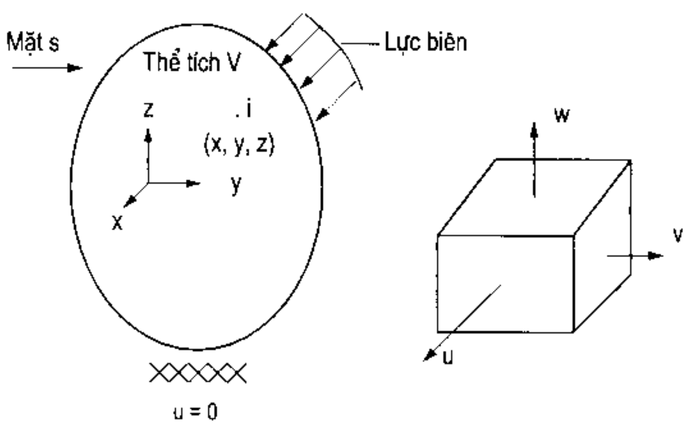


Hình 1.1: *a) Mô hình phần tử hữu hạn mái cong*
b) Mô hình phần tử hữu hạn tháp làm lạnh

§1.2. CÁC ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG

Một vật thể biến dạng 3 chiều có thể tích V và mặt S biểu thị như trên hình (1.2). Một điểm trong vật thể có các toạ độ x, y, z. Trên biên của nó, có lực T tác dụng trên đơn vị diện tích gọi là lực biên. Dưới tác dụng của các lực, vật biến dạng các thành phần chuyển vị tại điểm có toạ độ x, y, z biểu thị bằng véc tơ chuyển vị:

$$\mathbf{U} = [u \quad v \quad w]'^{*} \tag{1.1}$$



Hình 1.2

[*] Trong cuốn sách này, nhất quán sử dụng [ ]' là ma trận chuyển vị.

Lực thể tích (do trọng lượng) phân bố trên đơn vị thể tích và được biểu thị bằng vectơ:

$$\mathbf{f} = [f_x\ f_y\ f_z)]' \tag{1.2}$$

Trong (1.1) và (1.2):

u - thành phần chuyển vị trên phương trục x.

v - thành phần chuyển vị trên phương trục y.

w - thành phần chuyển vị trên phương trục z.

f_x - lực thể tích trên phương trục x.

f_y - lực thể tích trên phương trục y.

f_z - lực thể tích trên phương trục z.

Các thành phần *lực biên* được biểu thị bằng vectơ.

$$\mathbf{T} = [T_x\ T_y\ T_z\ ]' \tag{1.3}$$

Trong đó: T_x - lực biên trên phương trục x;

T_y - lực biên trên phương trục y;

T_z - lực biên trên phương trục z.

Lực tiếp xúc, áp lực tác dụng trên bề mặt, lực ma sát là một số thí dụ về lực biên.

Tải trọng P tác dụng tại điểm i được biểu thị bằng vectơ:

$$\mathbf{P_i} = [P_x\ P_y\ P_z)]' \tag{1.4}$$

Trong đó:

P_x - lực P trên phương trục x;

P_y - lực P trên phương trục y;

P_z - lực P trên phương trục z.

Các thành phần ứng suất biểu thị trên hình (1.3) .

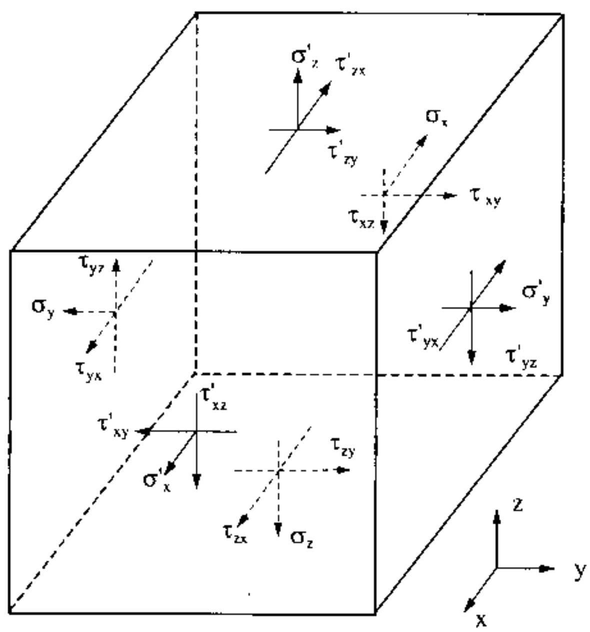
$$\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx \qquad \tau'_{xy} = \tau_{xy} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx$$

$$\tau'_{xz} = \tau_{xz} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}dx \qquad \sigma'_y = \sigma_y + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy$$

$$\tau'_{yz} = \tau_{yz} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy \qquad \tau'_{yx} = \tau_{yx} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy$$

$$\sigma'_z = \sigma_z + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}dz\,; \qquad \tau'_{zx} = \tau_{zx} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz$$

$$\tau'_{zy} = \tau_{zy} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dz$$



Hình 1.3. Phân tố thể tích dV ở thế cân bằng

Các thành phần ứng suất được biểu thị bằng vectơ:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \left[\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{yz} \tau_{xz} \tau_{xy}\right] \tag{1.5}$$

Trong đó: σ_x, σ_y, σ_z là các thành phần ứng suất pháp trên các phương x, y, z; τ_{yz}, τ_{xz}, τ_{xy} là các thành phần ứng suất tiếp. Ứng suất tiếp chỉ có hai chỉ số: chỉ số thứ nhất biểu thị phương pháp tuyến của mặt tác dụng, chỉ số thứ 2 biểu thị phương của ứng suất tiếp. Chẳng hạn τ_{xy} là ứng suất tiếp tác dụng trên mặt có phương pháp tuyến là x và phương của nó là y.

Lực tác dụng trên mặt của phân tố bằng ứng suất nhân với diện tích của mặt tương ứng. Thể tích của phân tố $d_v = d_x d_y d_z$. Lần lượt lập các phương trình hình chiếu trên phương các trục z, y, z, ta được các điều kiện cân bằng như sau:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\ &\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\ &\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Lần lượt lập các phương trình mô men đối với các trục x, y, z, ta được:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}; \tau_{xz} = \tau_{zx} \tag{1.7}$$

§1.3. CÁC ĐIỀU KIỆN BIÊN

Trên hình (1.2), ta có điều kiện biên:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{1.8}$$

Cũng có thể có điều kiện biên khác, chẳng hạn như **u** = **a**; u là véc tơ chuyển vị.

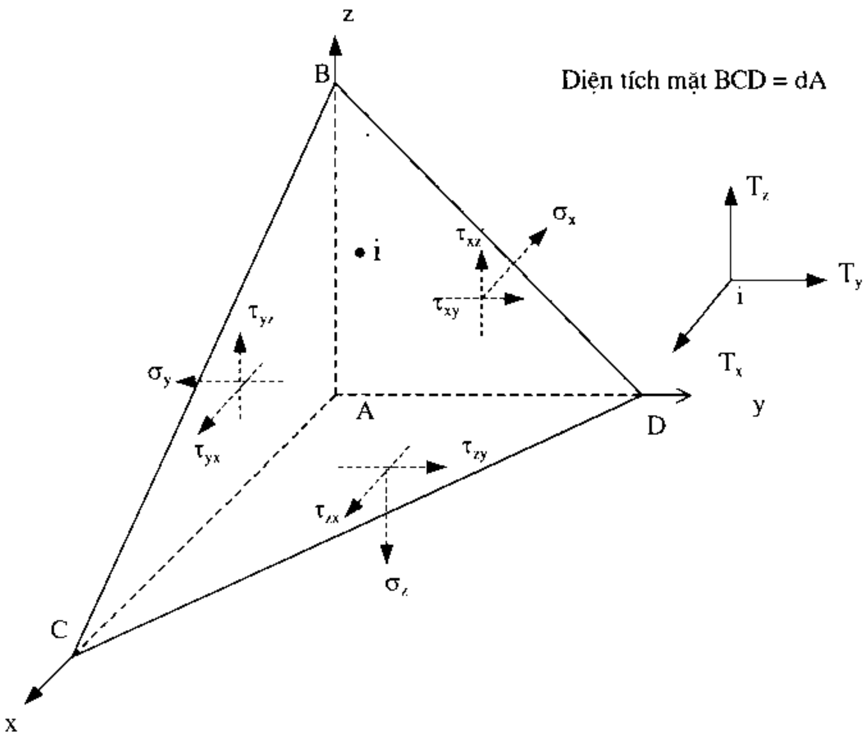
Bây giờ ta hãy xét phân tố thể tích 4 mặt ABCD như trên hình (1.4). Các cạnh AC, AD, AB song song với các trục x, y, z. Diện tích của mặt BCD bằng dA.

Nếu n_x, n_y, n_z là các thành phần pháp tuyến đơn vị của mặt dA (tức mặt BCD), diện tích của mặt ABD bằng n_xdA, diện tích của mặt ABC bằng n_ydA, diện tích của mặt ACD bằng n_zdA. Căn cứ vào các điều kiện cân bằng trên các trục x, y, z, ta có các điều kiện biên:

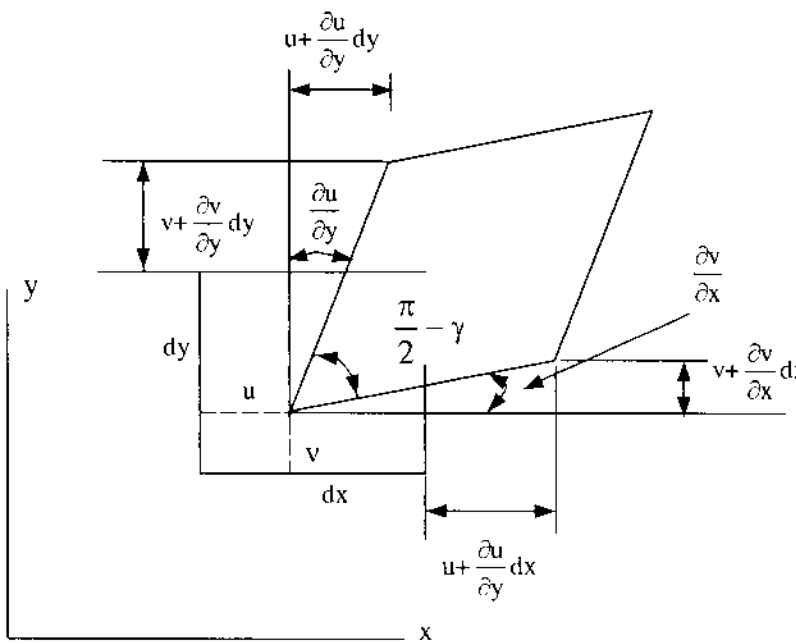
$$\begin{aligned} &\sigma_z n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = T_x \\ &\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z = T_y \\ &\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z = T_z \end{aligned} \tag{1.9}$$

Các điều kiện trên phải được thỏa mãn trên bề mặt của hình (1.2).

Tải trọng tác dụng tại một điểm được xem như tác dụng trên một diện tích vô cùng bé.



Hình 1.4. *Phân tố thể tích trên bề mặt*



Hình 1.5. *Mặt biến dạng của phân tố (trong mặt phẳng xoy)*

§1.4. HỆ THỨC BIẾN DẠNG - CHUYỂN VỊ

Các thành phần biến dạng ứng với phương trình (1.5) được biểu thị bằng véc tơ:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{yz} & \gamma_{zx} & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T \qquad (1.10)$$

Trong đó: ε_x, ε_y, ε_z là các thành phần biến dạng trên các phương x, y, z; γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{xy} là các ứng suất tiếp đã được định nghĩa trong phần trước.

Hình (1.5) biểu thị biến dạng của mặt dx - dy trong điều kiện biến dạng bé.

Nếu xét đồng thời các mặt khác, ta có véc tơ biến dạng:

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \qquad (1.11)$$

Hệ thức trên gọi là hệ thức biến dạng - chuyển vị.

Cần chú ý rằng hệ thức này có hiệu lực khi biến dạng bé.

§1.5. HỆ THỨC ỨNG SUẤT - BIẾN DẠNG

Đối với vật liệu đàn hồi tuyến tính, hệ thức ứng suất - biến dạng được suy ra từ định luật Húc tổng quát. Đối với vật liệu đồng tính trên mọi phương, có hai đặc trưng vật liệu là mô đun đàn hồi E và hệ số Poatxong. Định luật Húc cho ta các hệ thức sau:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y &= -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_z &= -\nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} + \nu\frac{\sigma_z}{E} \end{aligned} \qquad (1.12)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}\ ;\ \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}\ ;\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad (1.13)$$

Trong đó, mô đun trượt:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (1.14)$$

Từ (1.12) ta có:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \left(\frac{1-2\nu}{E}\right)\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) \qquad (1.15)$$

Lần lượt thay $(\sigma_y + \sigma_z)$, $(\sigma_z + \sigma_x)$, $(\sigma_x + \sigma_y)$ vào (1.12), ta được hệ thức nghịch đảo:

$$\sigma = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (1.16)$$

Trong đó **D** là ma trận cấp 6 × 6.

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5-\nu \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

D gọi là *ma trận cấu trúc vật liệu* vì nó phụ thuộc vào tính chất của vật liệu (đồng tính hoặc dị tính trên các phương khác nhau).

Từ các hệ thức tổng quát trên, ta có thể suy ra một số trường hợp đặc biệt như sau:

1. Trường hợp một chiều

Trong trường hợp này, ta chỉ có ứng suất pháp σ và biến dạng ε tác dụng trên phương x. Hệ thức (1.16 biến thành).

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.18)$$

2. Trường hợp 2 chiều

a. Ứng suất phẳng

Một vật phẳng và mỏng chịu tải trọng tác dụng trong mặt phẳng (hình 1.6a) có ứng suất phẳng phân bố trong mặt phẳng. Nghĩa là σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} đều triệt tiêu.

Căn cứ vào định luật Húc, ta có các hệ thức:

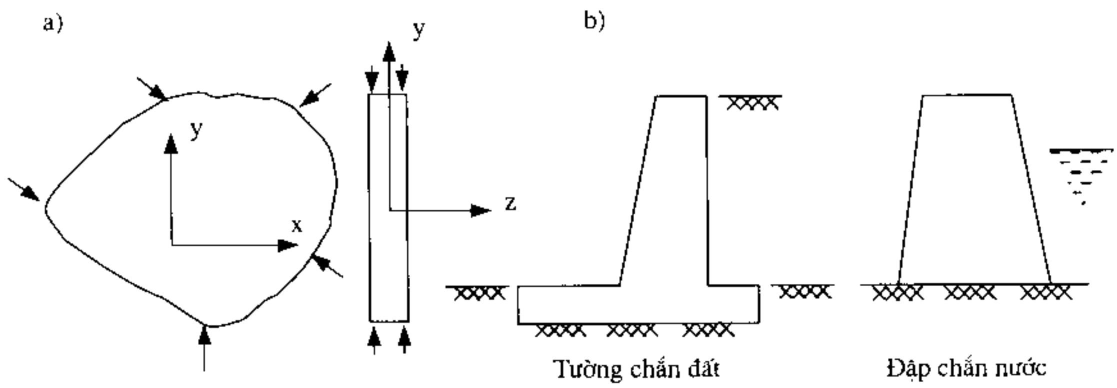
$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_y &= -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}.\tau_{xy} \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Hệ thức nghịch đảo của (1.19) là:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.20)$$

Dưới dạng ma trận:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.20a)$$



Hình 1.6. *a) Ứng suất phẳng; b) Biến dạng phẳng.*

Các thành phần biến dạng cũng có thể biểu thị bằng các thành phần ứng suất:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\upsilon & 0 \\ -\upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\upsilon) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \qquad (1.21)$$

b. Biến dạng phẳng

Trường hợp này xuất hiện khi vật thể dài và có kích thước, hình dạng, tải trọng không đổi trên phương dọc. Tường chắn đất, đập chắn nước (hình 1.6b) là những kết cấu như vậy. Nếu ta xét một mặt cắt ngang bất kỳ, có thể giả thiết rằng chuyển vị dọc trục w = 0 còn các chuyển vị u và v chỉ là những hàm của x, y không phụ thuộc vào z. Có nghĩa là:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \qquad (1.22)$$

Đối với vật liệu đồng tính trên mọi phương, ta có hệ thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \begin{bmatrix} (1-\upsilon) & \upsilon & 0 \\ \upsilon & (1-\upsilon) & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{(1-2\upsilon)}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \qquad (1.23)$$

Đồng thời, ta có các hệ thức:

$$\sigma_z = \upsilon(\sigma_x + \sigma_y) \qquad (1.24a)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0 \qquad (1.24b)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{(1+\upsilon)}{E} \begin{bmatrix} (1-\upsilon) & -\upsilon & 0 \\ -\upsilon & (1-\upsilon) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \qquad (1.25)$$

Trong đó, **D** là ma trận cấu trúc vật liệu cấp 3 x 3. Như trong phần đầu đã trình bày, để thiết lập được hệ phương trình cân bằng cho mỗi phần tử hữu hạn, cần phải vận dụng một số nguyên lý cơ bản sau đây.

§1.6. NGUYÊN LÝ THẾ NĂNG CỰC TIỂU

Ta định nghĩa thế năng toàn phần của một vật thể đàn hồi là tổng của năng lượng biến dạng toàn phần và công của ngoại lực và nội lực.

TNT = U (năng lượng biến dạng) + W (công ngoại lực và nội lực)

Đối với vật liệu đàn hồi tuyến tính, năng lượng biến dạng của vật rắn trên hình (1.2) là:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}'\varepsilon dv \tag{1.26}$$

Công của nội lực và ngoại lực là (hình 1.2)

$$W = -\int_V \mathbf{u}'\mathbf{f}dv - \int_V \mathbf{u}'\mathbf{T}ds - \sum u_i'P_i \tag{1.27}$$

Vậy thế năng toàn phần của vật thể đàn hồi (hình 1.2) là:

$$TNT = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}'\varepsilon dV - \int_V \mathbf{u}'\mathbf{f}dv - \int_s \mathbf{u}'\mathbf{T}d_s - \sum u_i'P_i \tag{1.28}$$

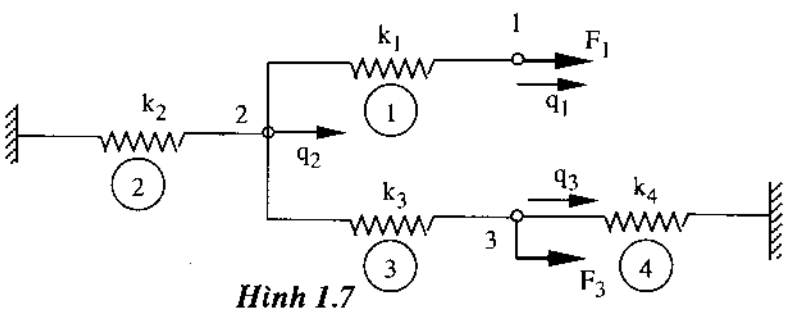
Các ký hiệu **σ, ε, u, f, T, P** đã được định nghĩa trong phần trước. Ở đây, ta chỉ nghiên cứu các hệ bảo toàn trong đó công của ngoại lực không phụ thuộc vào đường đi. Nói một cách khác, nếu hệ chuyển dời từ một điểm nào đó rồi quay về điểm đó thì công của ngoại lực triệt tiêu, dù cho đường đi như thế nào.

Nguyên lý thế năng cực tiểu phát biểu như sau:

Đối với hệ bảo toàn, trong mọi trường chuyển vị cho phép về mặt động học, chỉ có trường chuyển vị làm cho thế năng toàn phần có giá trị cực tiểu mới thỏa mãn được điều kiện cân bằng ổn định của hệ.

Chuyển vị cho phép về mặt động học là chuyển vị thỏa mãn tính chất đơn trị của nó và các điều kiện biên.

Để minh họa nguyên lý trên, ta hãy nghiên cứu ví dụ sau:



Hình 1.7

Ví dụ 1.1: Cho một hệ thống lò xo như trên hình (1.7). Thế năng toàn phần của hệ có thể viết:

$$TNT = \frac{1}{2}k_1\delta_1^2 + \frac{1}{2}k_2\delta_2^2 + \frac{1}{2}k_3\delta_3^2 + \frac{1}{2}k_4\delta_4^2 - F_1q_1 - F_3q_3$$

Trong đó:

δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 là độ giãn của 4 lò xo; k_1, k_2, k_3, k_4 là các độ cứng tương ứng; q_1, q_2, q_3 là các chuyển vị.

Vì $\delta_1 = q_1 - q_2$, $\delta_2 = q_2$, $\delta_3 = q_3 - q_2$, $\delta_4 = -q_3$ nên

$$TNT = \frac{1}{2}k_1(q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{2}k_2q_2^2 + \frac{1}{2}k_3(q_3 - q_2)^2 + \frac{1}{2}k_4q_3^2 - F_1q_1 - F_3q_3$$

Để hệ cân bằng ổn định, ta cần cực tiểu hóa thế năng toàn phần nghĩa là phải triệt tiêu đạo hàm của nó đối với các chuyển vị q_i:

$$\frac{\partial TNT}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \tag{1.29}$$

Sau khi thực hiện các phép tính, ta được:

$$\frac{\partial TNT}{\partial q_1} = k_1(q_1 - q_2) - F_1 = 0$$

$$\frac{\partial TNT}{\partial q_2} = -k_1(q_1 - q_2) + k_2q_2 - k_3(q_3 - q_2) = 0$$

$$\frac{\partial TNT}{\partial q_3} = k_3(q_3 - q_2) + k_4q_3 - F_3 = 0$$

Các phương trình trên có thể viết dưới dạng ma trận:

Kq = F hay

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_3 \end{bmatrix} \tag{1.30}$$

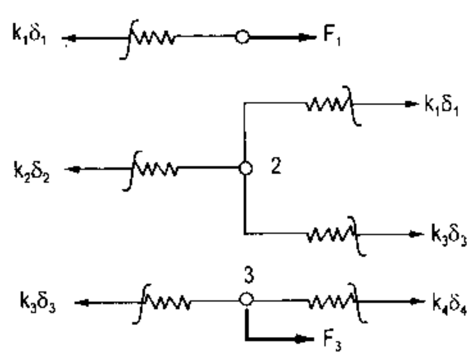
Ta cũng có thể cắt rời các lò xo (hình 1.8) để lập các phương trình cân bằng:

$$k_1\delta_1 = F_1$$

$$k_2\delta_2 - k_1\delta_1 - k_3\delta_3 = 0$$

$$k_3\delta_3 - k_4\delta_4 = F_3$$

Kết quả trên hoàn toàn giống với kết quả khi vận dụng nguyên lý thế năng cực tiểu.



Hình 1.8

§1.7. NGUYÊN LÝ CÔNG ẢO

Ta đã biết rằng công là tích của lực nhân với chuyển dời tương ứng:

$$W = P.\, r$$

Khi chuyển dời r không phải do lực P gây ra, ta gọi W là công ảo và r gọi là chuyển vị ảo.

Dưới đây, trình bày nguyên lý về công ảo.

Đối với kết cấu hai chiều, công ảo của ngoại lực có thể viết:

$$\delta W_c = \iint f_x \delta_u + f_y \delta_v) d_x d_y + \int \left(T_x \delta_u + T_y \delta_v \right) d_s \tag{1.31}$$

Công ảo của nội lực có thể viết:

$$\delta U = \iint \left(\sigma_x \delta_{\varepsilon x} + \sigma_y \delta_{\varepsilon y} + \tau_{xy} \delta\gamma_{xy} \right) \; d_x d_y$$

f_x, f_y , f_z - lực thể tích; T_x, T_y - lực biên

δ_u, δ_v - chuyển vị ảo trên phương x và y

$\delta\varepsilon_x$, $\delta\varepsilon_y$, $\delta\gamma_{xy}$ - biến dạng ảo

Đối với kết cấu 3 chiều, ta có:

$$\delta W_c = \iiint \left(f_x \delta_u + f_y \delta_v + f_z \delta_w \right) dV + \iint_s \left(T_x \delta_u + T_y \delta_v + T_z \delta_w \right) ds \tag{1.33}$$

$$\delta U = \iiint \left(\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_{xy} \delta\gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta\gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta\gamma_{zx} \right) dV \tag{1.34}$$

Dưới dạng ma trận, các hệ thức trên có thể viết:

$$\delta We = \iiint \boldsymbol{\delta'}_u . \mathbf{f} . dv + \iint_s \boldsymbol{\delta'}_u . \mathbf{T} . ds \tag{1.35}$$

Trong đó: $\delta'_u = [\delta_u \; \delta_v \; \delta_w]$; $\mathbf{f'} = [\, f_x \; f_y \; f_z]$

$$\mathbf{T'} = [T_x \; T_y \; T_z\,] \tag{1.36}$$

$$\delta U = \iiint \; \boldsymbol{\delta'}_{\varepsilon} . \sigma \, dV \tag{1.37}$$

Cần chú ý rằng chuyển vị ảo và biến dạng ảo là những đại lượng có giá trị bất kỳ.

Nguyên lý công ảo phát biểu như sau:

Để một vật thể biến dạng ở thế cân bằng, công ảo của ngoại lực phải bằng công ảo của nội lực.

Nghĩa là hệ thức sau đây phải được thỏa mãn.

$$\delta W_c = \delta U \tag{1.38}$$

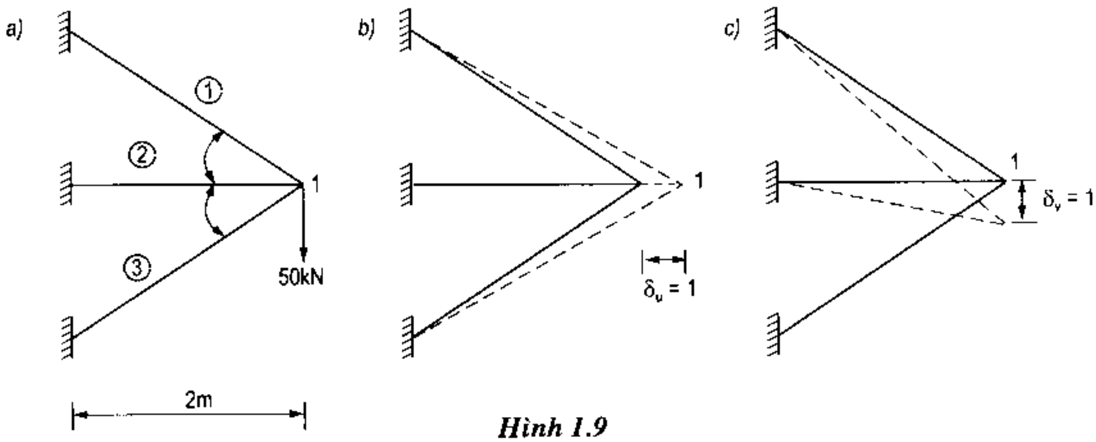
Trong trường hợp tổng quát (hệ 3 chiều), δW_c tính theo (1.35) và δU tính theo (1.37).

Trong các chương sau, nguyên lý công ảo sẽ được áp dụng để suy ra biểu thức ma trận độ cứng của phần tử hữu hạn.

Sau đây là một thí dụ nhằm minh họa nguyên lý trên.

Ví dụ 1.2:

Cho một kết cấu giàn với kích thước và tải trọng biểu thị trên hình (1.9).



Hình 1.9

Vận dụng nguyên lý công ảo để tính các chuyển vị u, v tại nút 1, ứng suất và biến dạng trong thanh giàn.

Giải:

Với các thành phần chuyển vị thực tế u và v, biến dạng trong các thanh giàn 1,2,3 có thể viết:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{u\cos 45^0 + v\sin 45^0}{2\sqrt{2}} = \frac{u+v}{4} \\ \varepsilon_2 &= u/2 \\ \varepsilon_3 &= \frac{u\cos 45^0 - u\sin 45^0}{2\sqrt{2}} = \frac{u-v}{4} \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Với chuyển vị ảo $\delta_u = 1$, các biến dạng ảo trong (a) trở thành:

$$\left.\begin{aligned} \delta\varepsilon_1' &= 1/4 \\ \delta\varepsilon_2' &= 1/2 \\ \delta\varepsilon_3' &= 1/4 \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

Công ảo của nội lực trong một thanh giàn

$$= \iiint \sigma_x . \sigma_\varepsilon . dV$$

$$= E.\ A.\ L.\ \varepsilon\ .\ \delta'_\varepsilon$$

Kết hợp 2 hệ phương trình (a) và (b), ta có tổng công ảo của nội lực do chuyển vị ảo $\delta_u = 1$ gây ra bằng:

$$\delta U = E.A.2\sqrt{2}\frac{(u+v)}{4}\frac{1}{4} + EA2\frac{u}{2}.\frac{1}{2} + EA2\sqrt{2}\frac{(u-v)}{4}\frac{1}{4}$$

$$= EAu\left\{\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}\right\} + EAu\left\{\frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8}\right\}$$

$$= EAu\left\{\frac{2\sqrt{2}+4}{8}\right\}$$

Công ảo của ngoại lực: $\delta W_c = 0 \times 1$

Theo (1.38) :

$$\delta W_c = \delta U$$

$$EAu\left\{\frac{2\sqrt{2}+4}{8}\right\} = 0 \text{ do đó } u = 0 \qquad (c)$$

Với chuyển vị ảo $\delta v = 1$, tính toán tương tự như trên, ta có:

$$\delta\varepsilon_1^{'} = \frac{1}{4}$$

$$\delta\varepsilon_1^{'} = 0$$

$$\delta\varepsilon_1^{'} = -\frac{1}{4}$$

Tổng cộng ảo của nội lực do chuyển vị ảo $\delta_v = 1$:

$$\delta U = EA\ 2\sqrt{2}\left(\frac{u+v}{4}\right).\frac{1}{4} + EA\ 2\sqrt{2}\ \left(\frac{u-v}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)$$

Thay u = 0: $\delta U = EA.v\left\{\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8}\right\} = \frac{EA\ v\ \sqrt{2}}{4}$

Công ảo của ngoại lực: $\delta W_c = 50 \times 1$

Vì $\delta W_c = \delta U$, ta được :

$$EA\ v\ \frac{\sqrt{2}}{4} = 50, \text{ do đó } v = \frac{200}{\sqrt{2}\ AE} \qquad (d)$$

Cuối cùng, ta được: $u = 0$ và $v = \frac{200}{\sqrt{2}AE}$

Thay các giá trị trên vào (a), ta được biến dạng trong các thanh giàn:

$$\varepsilon_1 = \frac{50}{\sqrt{2}AE}$$

$$\varepsilon_2 = 0$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{50}{\sqrt{2}.A.E}$$

Lực dọc trong các thanh giàn:

$$F_1 = AE\,\frac{50}{\sqrt{2}AE} = 25\sqrt{2}\ \text{kN (kéo)}$$

$$F_2 = 0$$

$$F_3 = -\,25\ \sqrt{2}\ \text{kN (nén)}$$

§1.8. NGUYÊN LÝ BẢO TOÀN NĂNG LƯỢNG

Nguyên lý bảo toàn năng lượng phát biểu như sau:

Để một vật thể biến dạng ở thể cân bằng đàn hồi, công của ngoại lực W_{ng} phải bằng công của nội lực W_n.

$$W_{ng} = W_n \tag{1.39}$$

Nguyên lý này được áp dụng cho hệ thanh (giàn, khung) để suy ra ma trận độ cứng tổng thể của toàn bộ kết cấu.

Trong hệ tọa độ chung, phương trình cân bằng của toàn bộ kết cấu có dạng:

$$\mathbf{F = K.\,Q} \tag{1.40}$$

Trong đó: **F** - vectơ tải trọng;

Q - véc tơ chuyển vị;

K - ma trận độ cứng tổng thể.

Trong hệ tọa độ riêng, hệ thức giữa véc tơ nội lực S và véc tơ chuyển vị q có dạng:

$$\mathbf{S = k_c.q} \tag{1.41}$$

Trong đó: $\mathbf{k_c}$ là ma trận độ cứng riêng.

Vì có hệ toạ độ riêng và hệ toạ độ chung, ta chuyển đổi vectơ chuyển vị trong hệ tọa độ riêng thành vectơ chuyển vị trong hệ tọa độ chung qua hệ thức:

$$\mathbf{q = R.\,Q} \tag{1.42}$$

R gọi là ma trận xoay

Theo (1.39), ta có: $\frac{1}{2}\mathbf{Q'F} = \frac{1}{2}\mathbf{q'S}$

Theo (1.40), (1.41) và (1.42):

$$\mathbf{Q'KQ = Q'R'S = Q'R'.k_c.q\ = Q'R'k_eR\ Q}$$

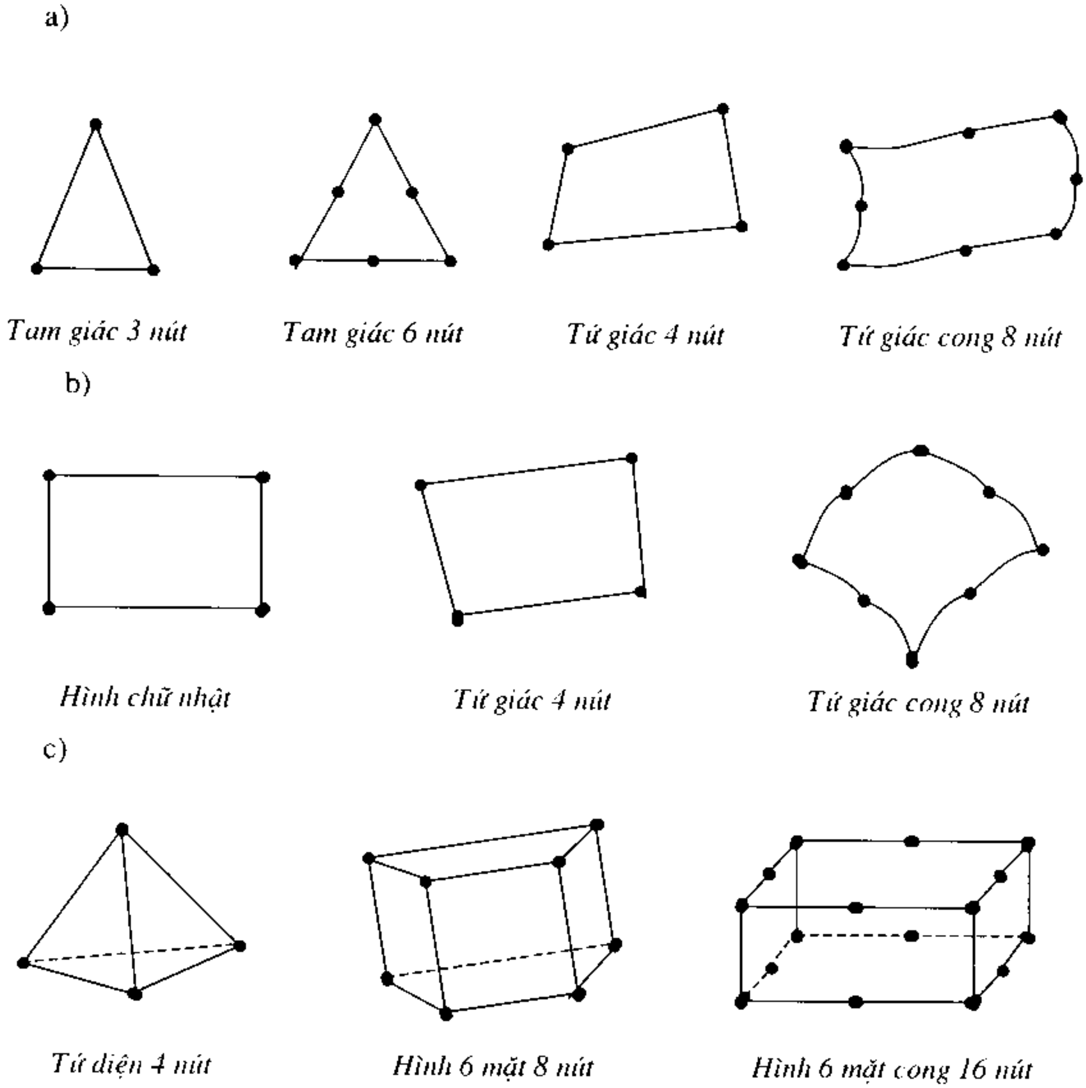
Vậy:

$$\mathbf{K = R'.\,k_e\,.\,R} \tag{1.43}$$

Công thức ma trận độ cứng tổng thể **K** ở trên sẽ được áp dụng cho hệ giàn và hệ khung.

Chương 2
TÍNH CHẤT CỦA CÁC PHẦN TỬ HỮU HẠN

Như trong chương 1 đã trình bày, phần tử hữu hạn là một mô hình quan trọng để tính ứng suất và biến dạng trong kết cấu. Chương này tập trung giới thiệu một số phần tử hữu hạn cùng với tính chất của chúng. Các khái niệm về hàm hình dạng, ứng suất và biến dạng trong phần tử hữu hạn, ma trận độ cứng sẽ được đề cập một cách khái quát.



***Hình 2.1.** Một số phần tử hữu hạn có tính chất tiêu biểu.*

Các phần tử hữu hạn trên hình (2.1a) áp dụng cho bài toán ứng suất phẳng và biến dạng phẳng.

Các phần tử hữu hạn trên hình (2.1b) áp dụng cho bản chịu uốn và vỏ.

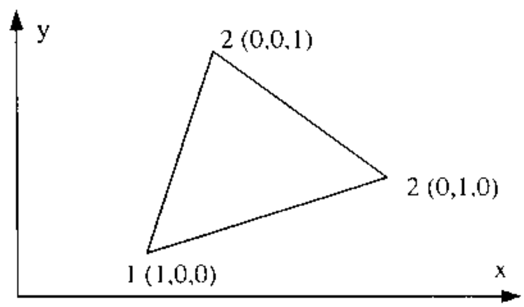
Các phần tử hữu hạn trên hình (2.1c) áp dụng cho bài toán ứng suất 3 chiều.

Phương pháp phần tử hữu hạn dựa trên giả thiết phân tích sự biến thiên của các thành phần chuyển vị trong phần tử hữu hạn. Một mô hình phân tích như vậy gọi là *mô hình chuyển vị*.

§2.1. MÔ HÌNH CHUYỂN VỊ

Bước đầu tiên là dùng các hàm thích hợp để biểu thị sự biến thiên gần đúng của các thành phần chuyển vị trong phần tử hữu hạn. Thông thường, các hàm đó có dạng đa thức mà ta sẽ nghiên cứu trong phần sau.

Giả sử phần tử hữu hạn có hình tam giác như trên hình (2.2)



***Hình 2.2.** Phần tử hữu hạn tam giác*

Sự biến thiên của các thành phần chuyển vị u (trên phương trục x) và v (trên phương trục y) có thể biểu thị bằng các hàm sau:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \tag{2.1}$$

Trong đó: $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_6$ là các hệ số chưa biết mà ta gọi là *tọa độ khái quát*. Biểu thị (2.1) dưới dạng ma trận, ta có:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \tag{2.2a}$$

hoặc: $$\mathbf{U} = \boldsymbol{\phi}.\boldsymbol{\alpha} \tag{2.2b}$$

Nói chung, nếu đa thức có bậc n, các thành phần chuyển vị trong một phần tử hữu hạn 2 chiều có thể viết:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + ... + \alpha_m y^n \\ v &= \alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} x + \alpha_{m+3} y + \alpha_{m+4}.x^2 + \alpha_{m+5} xy + \alpha_{m+6} y^2 + ... + \alpha_{2m} y^n \end{aligned} \tag{2.3}$$

Viết các phương trình dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_2' & 0' \\ 0' & \phi_2' \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \tag{2.4}$$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}' \boldsymbol{\alpha}$$

$$\boldsymbol{\phi}_2' = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & \dots & y^n \end{bmatrix} \tag{2.4a}$$

$$\boldsymbol{\alpha}' = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \cdots & \alpha_{2m} \end{bmatrix} \tag{2.4b}$$

Trong trường hợp phần tử hữu hạn 3 chiều, các hàm chuyển vị có dạng:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xz + \ldots + \alpha_m z^n \\ v &= \alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} x + \alpha_{m+s3} y + \ldots + \alpha_{2m} z^n \\ w &= \alpha_{2m+1} + \alpha_{2m+2} x + \alpha_{2m+s3} y + \ldots + \alpha_{3m} z^n \end{aligned} \tag{2.5}$$

Dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_3' & 0' & 0' \\ 0' & \phi_3' & 0' \\ 0' & 0' & \phi_3' \end{bmatrix} .\boldsymbol{\alpha}$$

hay $\mathbf{u} = \boldsymbol{\Phi}.\boldsymbol{\alpha}$ (2.6)

Trong đó: $\boldsymbol{\phi}_3' = \begin{bmatrix} 1 & x & y & \ldots\ldots & z & xz & \ldots\ldots & z^n \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{\alpha}' = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \cdots & \alpha_{3m} \end{bmatrix} \tag{2.6a}$$

§2.2. HỆ THỨC GIỮA BẬC TỰ DO CỦA CÁC NÚT VÀ CÁC TỌA ĐỘ KHÁI QUÁT

Các hệ số chưa biết α trong các đa thức có thể biểu thị bằng các thành phần chuyển vị tại các nút của phần tử hữu hạn, ta gọi các thành phần chuyển vị này là các *bậc tự do* tại các nút. Lấy ví dụ phần tử hữu hạn có hình tam giác trên hình (2.2). Thay tọa độ của các nút vào phương trình (2.2), ta có:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

hoặc: $\mathbf{q} = \mathbf{A}.\boldsymbol{\alpha}$ (2.8)

Trong đó: x_1, y_1: tọa độ của nút 1 trên phương x và y;
x_2, y_2: tọa độ của nút 2 trên phương x và y.

x_3, y_3: tọa độ của nút 3 trên phương x và y.

u_1, v_1: các thành phần chuyển vị của nút 1 trên phương x và y.

u_2, v_2: các thành phần chuyển vị của nút 2 trên phương x và y.

u_3, v_3: các thành phần chuyển vị của nút 3 trên phương x và y.

Phương trình trên biểu thị mối quan hệ giữa các bậc tự do tại các nút và các tọa độ khái quát. Ta tính các phần tử của ma trận **A** bằng cách thay tọa độ của các nút của phần tử hữu hạn vào hàm chuyển vị. Nói chung, **A** là một ma trận vuông, tổng số các tọa độ khái quát bằng tổng số tọa độ của các nút.

Giải phương trình (2.8) đối với α, ta được :

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{q} \tag{2.9}$$

Thay α vào (2.2b):

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}.\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{q} \tag{2.10}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}.\mathbf{q}$$

Trong đó: $\mathbf{N} = \boldsymbol{\phi}.\mathbf{A}^{-1}$; **q** là vectơ các thành phần chuyển vị tại các nút của phần tử hữu hạn.

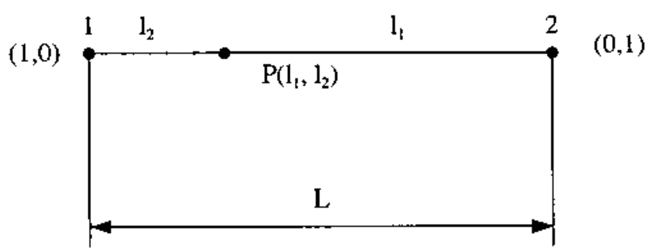
N gọi là *hàm hình dạng*. Phương trình (2.11) biểu thị mối quan hệ giữa các thành phần chuyển vị **u** tại một điểm bất kỳ trong phần tử hữu hạn và các thành phần chuyển vị tại các nút của nó.

§2.3. HỆ TỌA ĐỘ TỰ NHIÊN

Hệ tọa độ tự nhiên rất thuận tiện cho việc biểu thị các tính chất của phần tử hữu hạn. Nó là một hệ cục bộ trong đó một điểm trong phần tử hữu hạn được biểu thị bằng các số không có thứ nguyên và có giá trị không bao giờ lớn hơn đơn vị hoặc bằng không. Cách biểu thị tọa độ như vậy làm cho việc tính tích phân được dễ dàng.

2.3.1. Hệ tọa độ tự nhiên một chiều

Hình (2.3) biểu thị hệ tọa độ tự nhiên một chiều.



Hình 2.3. *Hệ tọa độ tự nhiên một chiều*

Tọa độ tự nhiên của một điểm P bất kỳ (hình 2.3) được định nghĩa như sau:

$$l_1 = 1 - \frac{x}{L}$$
$$l_2 = \frac{x}{L} \qquad (2.12)$$

Tọa độ của điểm P bây giờ là l_1, l_2. Hệ thức giữa tọa độ vuông góc và tọa độ tự nhiên như sau:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \qquad (2.13)$$

Hệ thức ngược lại giữa tọa độ tự nhiên và tọa độ vuông góc:

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \qquad (2.14)$$

Theo nguyên tắc tính đạo hàm, có thể viết:

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial l_1} \cdot \frac{\partial l_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial l_2} \cdot \frac{\partial l_2}{\partial x}$$

Từ (2.12): $\frac{\partial l_1}{\partial x} = -\frac{1}{L}; \quad \frac{\partial l_2}{\partial x} = \frac{1}{L}$

Vậy $$\frac{d}{dx} = \frac{1}{L}\left(\frac{\partial}{\partial l_1} - \frac{\partial}{\partial l_2}\right) \qquad (1.15)$$

Tích phân trên chiều dài L:

$$\int_L l_1^p . l_2^l dl = \frac{p!q!}{(p+q+1)\ !} L \qquad (2.16)$$

Trong đó 0! được định nghĩa bằng đơn vị.

2.3.2. Phần tử hữu hạn tam giác hai chiều

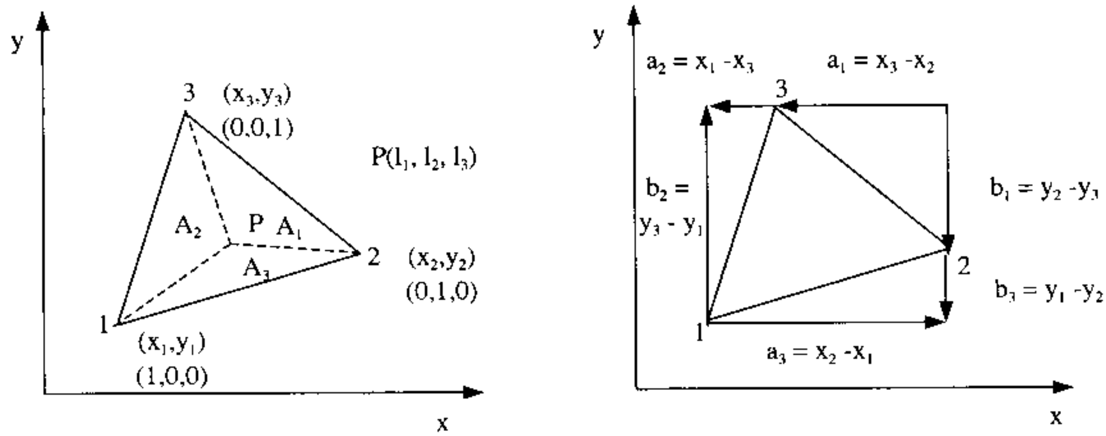
Xét một phần tử hữu hạn tam giác trên hình (2.4). Một điểm P trong hình tam giác được biểu thị bằng các tọa độ tự nhiên như sau:

$$l_1 = \frac{A_1}{A} \qquad l_2 = \frac{A_2}{A} \qquad l_3 = \frac{A_3}{A} \qquad (2.17)$$

Trong đó: A_1, A_2, A_3 là diện tích của 3 tam giác con tạo thành bởi điểm P và các cạnh đối diện của tam giác (hình 2.4); A là diện tích của tam giác lớn.

Do quan hệ hình học

$$A_1 + A_2 + A_3 = A$$
$$l_1 + l_2 + l_3 = 1 \qquad (2.18)$$



***Hình 2.4:** Tọa độ cục bộ của phần tử hữu hạn tam giác*

Tọa độ tự nhiên của các nút 1, 2, 3 là:

Nút 1: (1, 0, 0)

Nút 2: (0, 1, 0)

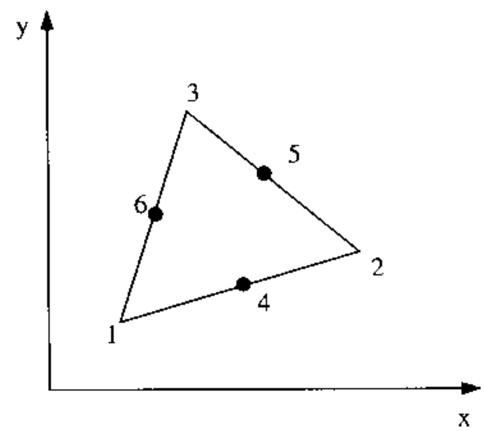
Nút 3: (0, 0, 1)

Tọa độ tự nhiên của các điểm giữa của các cạnh tam giác (hình 2.5) là:

Nút 4: (1/2, 1/2, 0)

Nút 5: (0, 1/2, 1/2)

Nút 6: (1/2, 0, 1/2)



Hình 2.5

Diện tích của tam giác biểu thị bằng hàm của các tọa độ x, y tại các nút 1, 2, 3:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \qquad (2.19)$$

Diện tích của các tam giác con (hình 2.4) là:

$$A_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \qquad (2.20)$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix}$$

Trong đó: x,y là tọa độ của một điểm P bất kỳ nằm trong phần tử hữu hạn hoặc nằm trên biên của nó.

Theo tài liệu [3], hệ thức giữa tọa độ vuông góc và tọa độ tự nhiên như sau:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

Hệ thức ngược lại giữa tọa độ tự nhiên và tọa độ vuông góc:

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} (x_2y_3 - x_3y_2) & (y_2 - y_3) & (x_3 - x_2) \\ (x_3y_1 - x_1y_3) & (y_3 - y_1) & (x_1 - x_3) \\ (x_1y_2 - x_2y_1) & (y_1 - y_2) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

Để xác định các tính chất của phần tử hữu hạn, cần phải tính đạo hàm đối với các tọa độ vuông góc:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial l_1}\cdot\frac{\partial l_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial l_2}\cdot\frac{\partial l_2}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial l_3}\cdot\frac{\partial l_3}{\partial x} = \frac{b_1}{2A}\cdot\frac{\partial f}{\partial l_1} + \frac{b_2}{2A}\cdot\frac{\partial f}{\partial l_2} + \frac{b_3}{2A}\cdot\frac{\partial f}{\partial l_3}$$

Trong đó: $b_1 = y_2 - y_3$;

$b_2 = y_3 - y_1$;

$b_3 = y_1 - y_2$. (xem hình 2.4)

Tương tự như trên , ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sum_{i=1}^{3}\frac{a_i}{2A}\cdot\frac{\partial f}{\partial l_i} \tag{2.23b}$$

Trong đó: $a_1 = x_3 - x_2$;

$a_2 = x_1 - x_3$;

$a_3 = x_2 - x_1$. (xem hình 2.4)

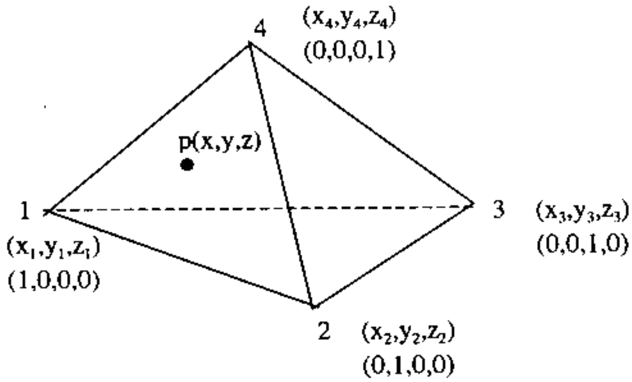
Theo tài liệu [5], tích phân diện tích tính theo công thức:

$$\int_A l_1^p . l_2^q . l_3^r . dA = \frac{p!q!r!}{(p+q+r+2)\ !}.2A \tag{2.24}$$

Trong đó: 0! được định nghĩa bằng đơn vị.

§ 2.3.3. Phần tử hữu hạn tứ diện 3 chiều

Xét khối tứ diện 3 chiều biểu thị trên hình (2.6)



Hình 2.6. *Khối tứ diện 3 chiều*

Một điểm P bất kỳ trong khối tứ diện (hình 2.6) được xác định bằng các tọa độ tự nhiên như sau:

$$l_i = \frac{V_i}{V} \tag{2.25}$$

Trong đó: V_i là thể tích của khối tứ diện con tạo bởi điểm P và mặt đối diện với điểm i (i = 1, 2, 3, 4), V là thể tích của khối tứ diện lớn (hình 2.6). Chẳng hạn V_1 là khối tứ diện tạo bởi điểm P và mặt 234 (đối diện với nút 1). l_1 là tỷ số giữa thể tích V_1 và thể tích V. Thể tích V được xác định bằng định thức* của các tọa độ tại các nút như sau:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \tag{2.26}$$

Theo tài liệu [5], hệ thức giữa tọa độ vuông góc và tọa độ tự nhiên của điểm P có dạng:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

Cần chú ý rằng:

$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = 1$$

Hệ thức ngược lại giữa tọa độ tự nhiên và toạ độ vuông góc:

* Trong cuốn sách này, nhất quán sử dụng ký hiệu | | để biểu thị định thức của ma trận.

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{6V}\begin{bmatrix} v_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ v_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ v_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\ v_4 & a_4 & b_4 & c_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

Trong đó:

V_i là thể tích của khối tứ diện con tạo bởi điểm P và mặt đối diện với điểm nút i; a_i, b_i, c_i lần lượt là diện tích hình chiếu của mặt đối diện với nút i lên các mặt phẳng tọa độ x y z ; a_i, b_i, c_i có dạng như sau:

$$\begin{aligned} a_i &= \left(z_j y_k - z_k y_j\right) + \left(z_k y_l - z_l y_k\right) + \left(z_l y_j - z_j y_l\right) \\ b_i &= \left(z_j x_k - z_k x_j\right) + \left(z_k x_l - z_l x_k\right) + \left(z_l x_j - z_j x_l\right) \\ c_i &= \left(y_j x_k - y_k x_j\right) + \left(y_k x_l - y_l x_k\right) + \left(y_l x_j - y_j x_l\right) \end{aligned} \tag{2.29}$$

Các chỉ số i, j, k, l theo thứ tự vòng tròn ($1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$)

Các đạo hàm riêng của tọa độ tự nhiên đối với tọa độ vuông góc:

$$\frac{\partial l_i}{\partial x} = \frac{a_i}{6V} \qquad \frac{\partial l_i}{\partial y} = \frac{b_i}{6V}; \qquad \frac{\partial l_i}{\partial z} = \frac{c_i}{6V} \tag{2.30}$$

Tích phân thể tích của phần tử hữu hạn có dạng:

$$\int_V l_1^p l_2^q l_3^r l_4^s dV = \frac{p!q!r!s!}{(p+q+r+s+3)\ !} 6V \tag{2.31}$$

§2.4. HÀM ĐỊNH DẠNG (HÀM NỘI SUY)

Trong phương pháp phần tử hữu hạn, ta dùng mô hình chuyển vị và nêu lên giả thiết về sự biến thiên của các thành phần chuyển vị vì ta chưa biết sự biến thiên thực tế của chúng. Về mặt toán học, người ta nêu lên những hàm mà dạng giải tích của nó hoàn toàn chưa biết hoặc gặp phải nhiều khó khăn trong các phép tính. Vì vậy, người ta tìm cách thay các hàm đó bằng hàm đơn giản hơn gọi là *hàm hình dạng* hoặc *hàm nội suy*. Có 2 loại hàm nội suy:

1. Hàm nội suy Lagrange.

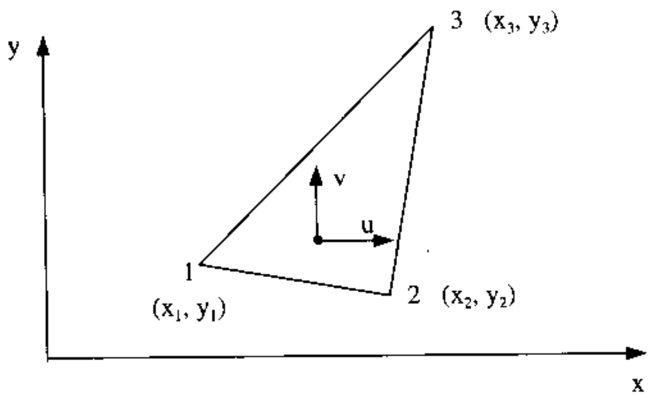
2. Hàm nội suy Hecmit

Trong mục này ta chỉ nghiên cứu hàm nội suy Lagrange còn được gọi là *hàm hình dạng*.

Hàm hình dạng Lagrange có thể suy ra từ các phương trình (2.10) và (2.11). Việc sử dụng hệ tọa độ tự nhiên như đã trình bày trong phần trước, tỏ ra có nhiều ưu điểm trong quá trình tính toán.

2.4.1. Hàm hình dạng đối với phần tử hữu hạn tam giác bậc nhất

Sự biến thiên tuyến tính của các thành phần chuyển vị trong phần tử hữu hạn tam giác (hình 2.7) có thể biểu thị bằng các tọa độ tự nhiên như sau:



Hình 2.7: Phần tử hữu hạn tam giác 3 nút

Một trong các thành phần chuyển vị trên phương x tại các nút 1, 2, 3 của phần tử hữu hạn có thể viết:

$$u = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 \tag{2.32}$$

Nếu kết hợp cả 3 thành phần chuyển vị, ta có dạng ma trận:

Dưới dạng ma trận: $\mathbf{u} = \phi_2.\alpha$ (2.33)

Trong đó: $\phi_2 = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix}$;

$\boldsymbol{\alpha}' = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}$

Thay tọa độ tự nhiên của các nút 1, 2, 3 vào hệ thức trên ta có véctơ các thành phần chuyển vị $\mathbf{d_u}$ như sau:

$$\mathbf{d_u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \boldsymbol{\alpha} \tag{3.34}$$

do đó:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

Từ phương trình (2.33) ta có:

$$\mathbf{u} = \phi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \mathbf{d_u}$$

Ma trận trên có thể viết:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N'_2 d_u} \tag{2.36a}$$

Trong đó:

$$\mathbf{N}'_2 = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

Một cách tương tự, các thành phần chuyển vị trên phương y tại các nút 1, 2, 3 có dạng ma trận:

$$\mathbf{v} = \mathbf{N_{2n}.d_V} \tag{2.36b}$$

Sự biến thiên của các thành phần chuyển vị u và v trên phương x và y biểu thị trên hình (2.8).

Cuối cùng, ma trận các thành phần chuyển vị tại 1 điểm bất kỳ trong phần tử hữu hạn có dạng:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}'_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}'_2 \end{bmatrix} . \ q \tag{2.38}$$

tức là:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N.q} \tag{2.39}$$

Trong đó:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{d_u} \\ \mathbf{d_v} \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

Trong đó: **u** là vectơ các thành phần chuyển vị tại một điểm bất kỳ trong phần tử hữu hạn theo các phương x và y; **q** là vectơ các thành phần chuyển vị tại các nút 1, 2, 3 trên các phương x và y; **N** là ma trận hàm hình dạng.

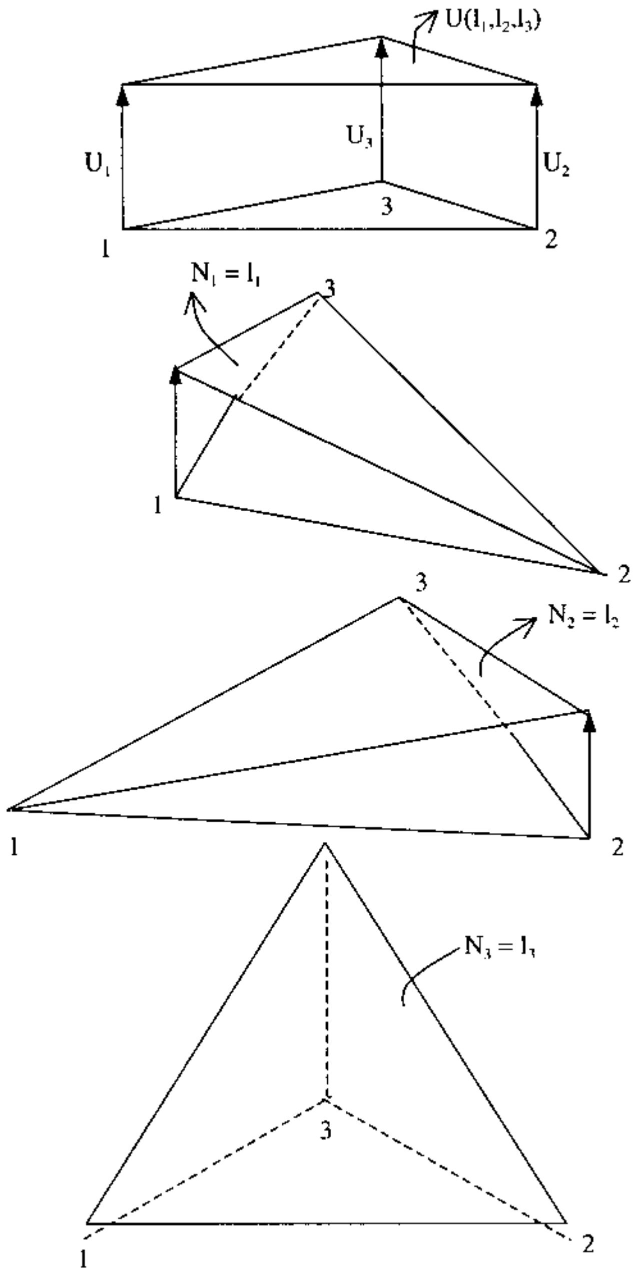
Đối với phần tử hữu hạn tam giác 3 nút:

$$N_1 = l_1 \qquad N_2 = l_2 \qquad N_3 = l_3$$

Do đó, các thành phần chuyển vị u và v tại một điểm bất kỳ trong phần tử hữu hạn theo các phương x và y, có thể viết:

$$\begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \\ v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Cần lưu ý rằng hàm hình dạng N_i (i = 1, 2, 3) có giá trị bằng đơn vị tại nút i và có giá trị bằng không tại những nút còn lại.

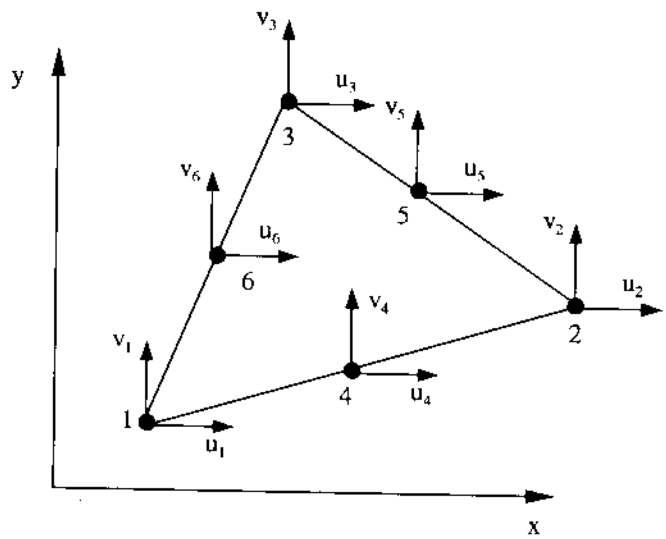


Hình 2.8: Hàm hình dạng đối với phần tử hữu hạn tam giác 3 nút

2.4.2. Hàm hình dạng đối với phần tử hữu hạn tam giác bậc hai.

Sự biến thiên bậc hai của các thành phần chuyển vị trong một phần tử hữu hạn tam giác 6 nút (hình 2.9) có thể biểu thị bằng hệ thức:

$$u = \alpha_1 l_1^2 + \alpha_2 l_2^2 + \alpha_3 l_3^2 + \alpha_4 l_1 l_2 + \alpha_5 l_2 l_3 + \alpha_6 l_3 l_1 \qquad (2.43)$$



Hình 2.9: Phần tử hữu hạn tam giác 6 nút

Thay tọa độ tự nhiên của các nút 1, 2, 3, 4, 5, 6 vào hệ thức (2.43) ta có:

$$\mathbf{d_u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \qquad (2.44)$$

tức là:

$$\mathbf{d_u} = \mathbf{A}.\boldsymbol{\alpha} \qquad (2.45)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{d_u} \qquad (2.46)$$

Nghịch đảo của ma trận A có dạng:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad (2.47)$$

Có thể viết:

$$N'_2 = \phi_2 . A^{-1} = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 & l_1l_2 & l_2l_3 & l_3l_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\left(l_1^2 - l_1l_2 - l_3l_1\right) \quad \left(l_2^2 - l_1l_2 - l_2l_3\right) \quad \left(l_3^2 - l_2l_3 - l_3l_1\right) \quad 4l_1l_2 \quad 4l_2l_3 \quad 4l_3l_1 \right] \tag{2.48a}$$

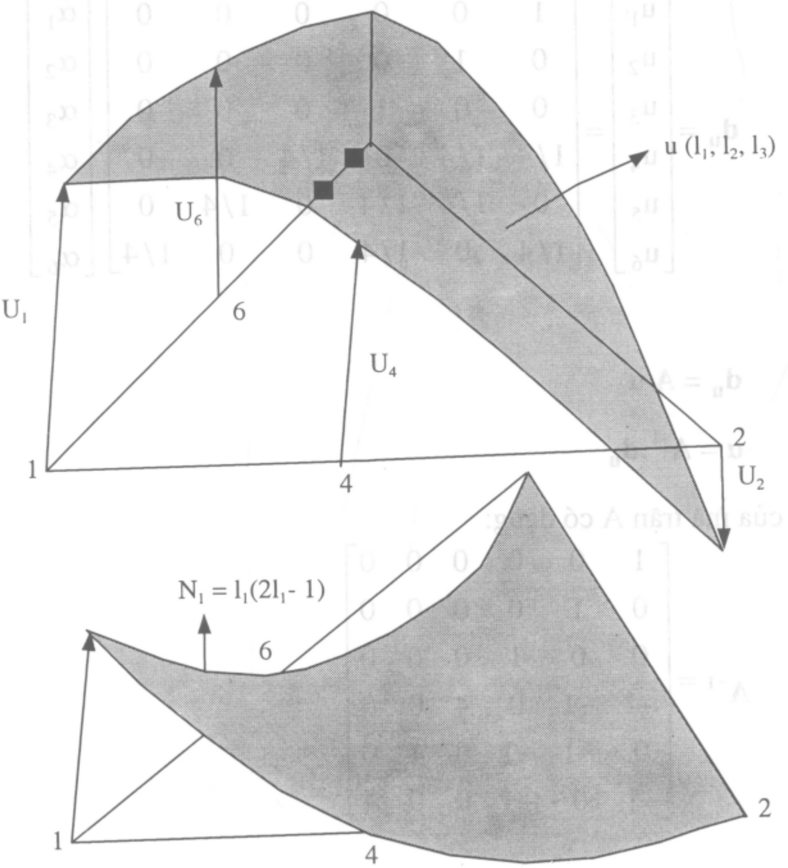
Sau khi đơn giản hoá (căn cứ vào $l_1 + l_2 + l_3 = 1$):

$$N'_2 = \left[l_1(2l_1 - 1) \quad l_2(2l_2 - 1) \quad l_3(2l_3 - 1) \quad 4l_1l_2 \quad 4l_2l_3 \quad 4l_3l_4 \right] \tag{2.48b}$$

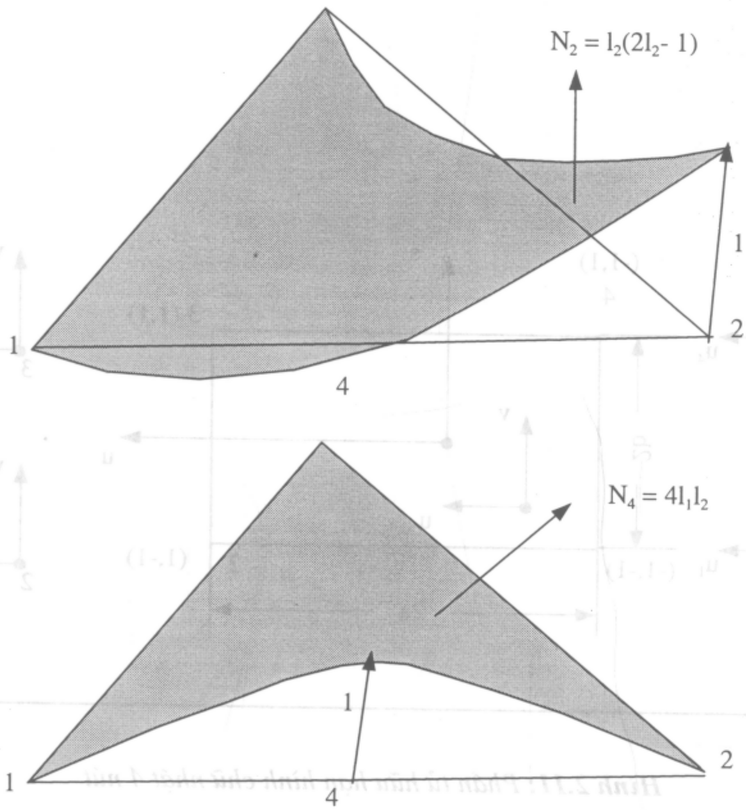
Dưới dạng ngắn gọn:

$$N'_2 = \left[N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6 \right] \tag{2.48}$$

Trong đó, các hàm hình dạng $N_i(1, 2, 3\ldots6)$ được biểu thị trong (2.48b). Hình (2.10a, b) cho ta thấy sự biến thiên phi tuyến tính của các hàm hình dạng N_1, N_2, N_4



Hình 2.10



***Hình 2.10b**: Sự biến thiên phi tuyến tính của các hàm hình dạng trong phần tử hữu hạn tam giác 6 nút.*

Vậy là các thành phần chuyển vị u và v tại một điểm bất kỳ trong phần tử hữu hạn được biểu thị bằng hệ thức ma trận:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_2' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_2' \end{bmatrix} .\mathbf{q} \qquad (2.49a)$$

hay $$\mathbf{u} = \mathbf{N.q} \qquad (2.49)$$

Trong đó: $\mathbf{N}_2'$ tính theo (2.48b)

$$\mathbf{q}' = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{bmatrix} \qquad (2.50)$$

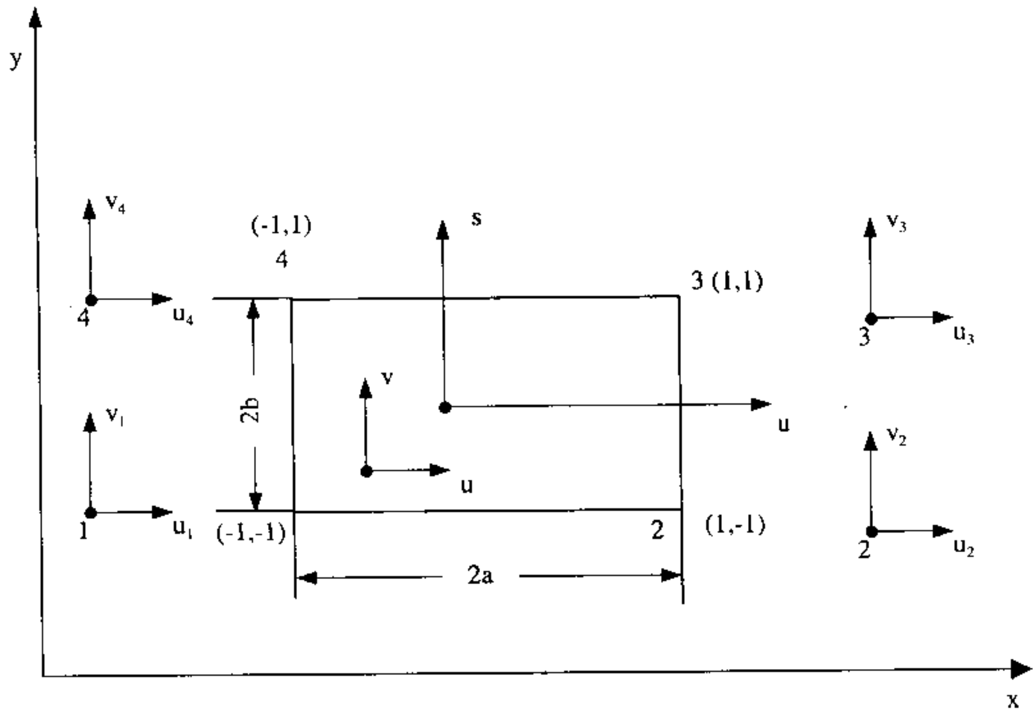
(xem hình 2.9)

2.4.3. Hàm hình dạng đối với phần tử hữu hạn hình chữ nhật bậc nhất.

Tọa độ tự nhiên đối với phần tử hữu hạn hình chữ nhật (hình 2.11) được xác định như sau:

$$r = \frac{x - x_c}{a} \qquad s = \frac{y - y_c}{b} \qquad (2.51)$$

Trong đó: x_c và y_c là toạ độ của tâm phần tử hữu hạn hình chữ nhật.



Hình 2.11: Phần tử hữu hạn hình chữ nhật 4 nút

Một trong các thành phần chuyển vị trên phương x tại các nút 1, 2, 3, 4 có thể biểu thị bằng hàm đa thức:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 rs \tag{2.52}$$

Thay tọa độ tự nhiên tại các nút vào (2.52), ta được vectơ các thành phần chuyển vị trên phương x tại các nút (hình 2.11) như sau:

$$\mathbf{d_u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \tag{2.53}$$

Do đó: $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d_u}$

Ma trận nghịch đảo:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} \tag{2.54}$$

Vậy:

$$N_2' = \phi_2 .A^{-1} = [c \quad r \quad s \quad r \quad s].\begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

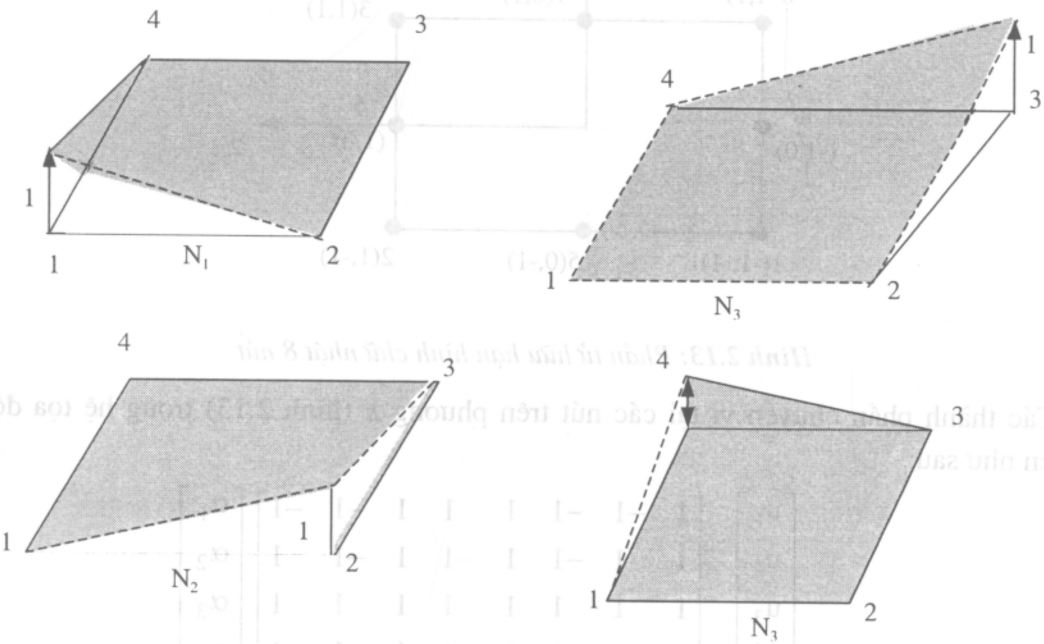
và

$$N_2' = \left[\frac{(1-r)(1-s)}{4} \quad \frac{(1+r)(1-s)}{4} \quad \frac{(1+r)(1+s)}{4} \quad \frac{(1-r)(1+s)}{4} \right] \quad (2.56a)$$

Hệ thức trên có thể viết:

$$N_2' = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$$

Trong đó các hàm hình dạng N_1, N_2, N_3, N_4 tính theo (2.56a). Sự biến thiên của các hàm hình dạng N_1, N_2, N_3, N_4 biểu thị trên hình (2.12).



Hình 2.12: Hàm hình dạng đối với phần tử hữu hạn hình chữ nhật 4 nút

Ma trận hàm hình dạng đối với phần tử hữu hạn hình chữ nhật 4 nút có dạng:

$$N = \begin{bmatrix} N_2' & 0 \\ 0 & N_2' \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Trong đó: N_2' tính theo (2.56) và (2.56a)

Cuối cùng ta có hệ thức:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}.\mathbf{q} \tag{2.58}$$

Trong đó:

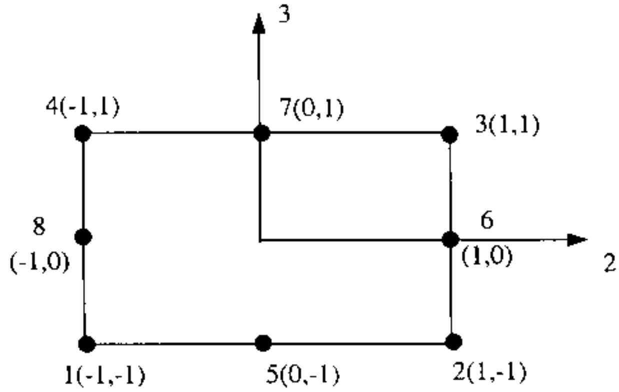
$$\mathbf{q}' = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} \tag{2.59}$$

(xem hình 2.11)

2.4.4. Hàm hình dạng đối với phần tử hữu hạn hình chữ nhật bậc hai.

Sự biến thiên của một trong các thành phần chuyển vị u (trên phương x) có thể biểu thị bằng đa thức trong hệ tọa độ tự nhiên như sau:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 r^2 + \alpha_5 rs + \alpha_6 s^2 + \alpha_7 r^2 s + \alpha_8 rs^2 \tag{2.60}$$



Hình 2.13: Phần tử hữu hạn hình chữ nhật 8 nút

Các thành phần chuyển vị tại các nút trên phương x (hình 2.13) trong hệ tọa độ tự nhiên như sau:

$$\mathbf{d_u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

Do đó:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d_u} \tag{2.62}$$

Nghịch đảo của ma trận **A**:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

Vậy: $$\mathbf{N}_2' = \phi_2 . \mathbf{A}^{-1} \tag{2.64}$$

$$\phi_2' = \begin{bmatrix} 1 & r & s & r^2 & rs & s^2 & r^2 s & rs^2 \end{bmatrix} \tag{2.65}$$

Thay (2.65) vào (2.64) và đơn giản hoá, ta có:

$$\mathbf{N}_2' = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1-r)(1-s)(-r-s-1) & \frac{1}{4}(1+r)(1-s)(r-s-1) \\ \frac{1}{4}(1+r)(1+s)(r+s-1) & \frac{1}{4}(1-r)(1+s)(-r+s-1) \\ \frac{1}{4}(1+r)(1-r)(1-s) & \frac{1}{4}(1+r)(1+s)(1-s) \\ \frac{1}{4}(1+r)(1-r)(1+s) & \frac{1}{4}(1-r)(1+s)(1-s) \end{bmatrix} \tag{2.64b}$$

Ma trận $\mathbf{N'}_2$ có thể viết:

$$\mathbf{N}_2' = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 & N_7 & N_8 \end{bmatrix} \tag{2.64}$$

Các hàm hình dạng $N_1, N_2, \ldots, N_8$ tính theo (2.64b)

Cuối cùng, ma trận hàm hình dạng có thể viết:

$$\mathbf{N}' = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_2' & \mathbf{0}' \\ \mathbf{0}' & \mathbf{N}_2' \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

Ma trận các thành phần chuyển vị tại một điểm trong phần tử hữu hạn.

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}.\mathbf{q} \tag{2.67}$$

Trong đó: $$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

§2.5. ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG TRONG PHẦN TỬ HỮU HẠN

Hệ thức (1.11) trong chương một sẽ giúp ta tính biến dạng tại một điểm trong phần tử hữu hạn thông qua các thành phần chuyển vị tại các nút.

Nói chung, hệ thức biến dạng - chuyển vị của phần tử hữu hạn có dạng:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B.q} \tag{2.69}$$

Trong đó:

ε là véctơ biến dạng tại một điểm bất kỳ trong phần tử hữu hạn; **q** là vectơ các thành phần chuyển vị tại các nút của phần tử hữu hạn.

B gọi là ma trận biến dạng - chuyển vị. Theo (1.16) (chương một) và (2.69), ta có hệ thức giữa ứng suất pháp và chuyển vị của phần tử hữu hạn như sau:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}.\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D.B.q} \tag{2.70}$$

Trong đó: **σ** là vectơ các thành phần ứng suất tại một điểm trong phần tử hữu hạn;

D là ma trận cấu trúc vật liệu (xem công thức 1.17);

q đã được định nghĩa ở phần trên.

Ví dụ: Suy ra ma trận **B** đối với phần tử hữu hạn tam giác 3 nút biểu thị trên hình (2.7). Ta làm như sau:

Theo (2.39) và (2.41) ta có:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix}.\mathbf{q}$$

Mặt khác, từ (1.11) đối với bài toán 2 chiều, ta có:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Theo (2.23a) và (2.23b) ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{b_1}{2A}u_1 + \frac{b_2}{2A}u_2 + \frac{b_3}{2A}u_3 = \frac{1}{2A}\left(b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3\right)$$

Một cách tương tự, ta có:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2A}\left(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2A}\left(a_1 + a_2 + a_3u_3 + b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3\right)$$

Vậy:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}.\mathbf{q}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B.q}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

§2.6. MA TRẬN ĐỘ CỨNG VÀ VECTƠ TẢI TRỌNG CỦA PHẦN TỬ HỮU HẠN

Trong các phần trước, ta đã suy ra các biểu thức về ma trận hàm hình dạng **N** và ma trận biến dạng - chuyển vị **B**.

Tiếp theo, cần phải suy ra ma trận độ cứng và vectơ tải trọng của phần tử hữu hạn để lập phương trình cân bằng. Nguyên lý công ảo trình bày trong chương một sẽ giúp ta làm việc này.

Trong bài toán tổng quát 3 chiều, theo (1.37) công ảo của nội lực có dạng:

$$\delta u = \iiint \delta_\varepsilon'.\boldsymbol{\sigma} dv \tag{2.71}$$

Theo (1.35) công ảo của ngoại lực có dạng:

$$\delta u = \iiint \delta'_u.\mathbf{f}dv + \iint \delta'_u.\mathrm{T}ds \tag{2.72}$$

Theo (2.39), (2.69) và (2.70), ta có:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N.q} \tag{2.73}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B.q} \tag{2.74}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D.B.q} \tag{2.75}$$

Từ (2.73) ta suy ra:

$$\delta_u = \mathbf{N}.\delta_q \tag{a}$$

Từ (2.74) ta suy ra:

$$\delta_\varepsilon = \mathbf{B}.\delta_q \tag{b}$$

Thay (b) và (2.75) vào (2.71), ta có:

$$\delta U = \iiint \mathbf{B}\delta'_q.\mathbf{D.B.q}.dV = \delta'_q \iiint \mathbf{B'.D.B.q}.dV \tag{2.76}$$

Thay (a) vào (2.72), ta có:

$$\begin{aligned} \delta w_e &= \iiint \delta'\mathbf{q}.\mathbf{N}'.\mathbf{f}.dV + \iint \delta'_q.\mathbf{N}'.\mathbf{T}.ds \\ &= \delta'_q \iiint \mathbf{N}'.\mathbf{f}.dV + \delta'_q \iint \mathbf{N}'.\mathbf{T}.ds \end{aligned} \tag{2.77}$$

Theo (1.38), ta có:

$$\delta w_e = \delta U \Rightarrow \iiint (\mathbf{B'.D.B}dv)\mathbf{q} + \iiint \mathbf{N'}.\mathbf{f}dV + \iint \mathbf{N'^s}.\mathbf{T}.ds$$

Phương trình trên có thể viết:

$$\mathbf{k.q} = \mathbf{t} \tag{2.78}$$

Trong đó: $\mathbf{k} = \iiint \mathbf{B}'.\mathbf{D}.\mathbf{B}.dV$ (2.79)

$\mathbf{t} = \iiint \mathbf{N}'.\mathbf{f}.dV + \iint \mathbf{N}'^{s}.\mathbf{T}.ds$ (2.80)

(2.78) là hệ phương trình cân bằng của phần tử hữu hạn.

k gọi là *ma trận độ cứng* của phần tử hữu hạn.

t gọi là *vectơ tải trọng* của phần tử hữu hạn.

$\mathbf{N}'^{s}$ là ma trận hàm hình dạng ứng với mặt có lực biên T tác dụng.

f véctơ lực thể tích (do trọng lượng)

$$\mathbf{f}' = \begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \end{bmatrix}$$

T vectơ các lực biên:

$$\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} T_x & T_y & T_z \end{bmatrix}$$

Các công thức (2.79) và (2.80) áp dụng cho bài toán 3 chiều

Trong bài toán 2 chiều, giả sử bề dày h của kết cấu không đổi, ta có:

$$dV = dA.h\ , \qquad ds = h.dl$$

dA - phân tố diện tích;

dl - phân tố đoạn thẳng men theo đó có lực biên T tác dụng

Giả sử **B** chứa các hằng số. Thay các hệ thức trên vào (2.78), ta có:

$\mathbf{k} = h\int \mathbf{B}'.\mathbf{D}.\mathbf{B}dA = h.\mathbf{B}'.\mathbf{D}.\mathbf{B}\int_A dA$, do đó:

$$\mathbf{k} = Ah\mathbf{B}'.\mathbf{D}.\mathbf{B} \qquad (2.81)$$

Trong đó: A - diện tích tấm hai chiều.

Một cách tương tự, ta có:

$$\mathbf{t} = h\iint \mathbf{N}'.\mathbf{f}.dA + h\int \mathbf{N}'^{s}\mathbf{T}dl \qquad (2.82a)$$

hay

$$\mathbf{t} = h\iint \mathbf{N}'.\mathbf{f}.dx.dy + h\int \mathbf{N}'^{s}\mathbf{T}dl \qquad (2.82)$$

Trong bài toán một chiều:

$$dV = Adx, \qquad ds = dx, \qquad \mathbf{D} = E$$

Trong đó: A - diện tích tiết diện của mặt cắt ngang;

dx- phân tố đoạn thẳng trên trục x;

E - môđun đàn hồi.

Vậy ma trận độ cứng:

$$\mathbf{k}_e = \int \mathbf{B}'.E.\mathbf{B}.Adx = \mathbf{B}'.E.\mathbf{B}.A\int_e dx$$

Nếu **B** là hằng số:

$$\mathbf{k}_e = AL_e E\mathbf{B'}.\mathbf{B} \tag{2.83a}$$

Nếu **B** không phải là hằng số:

$$\mathbf{k}_e = AL_e E\int \mathbf{B'}.\mathbf{B}dx \tag{2.83b}$$

Trong đó: L_e - chiều dài của phần tử hữu hạn;

E - môđun đàn hồi (trong kết cấu một chiều, **D** = E).

Theo (2.80) vectơ tải trọng:

$$\mathbf{t} = \int \mathbf{N'}.\mathbf{f}.Adx + \int \mathbf{N'}^s.\mathbf{T}dx \Rightarrow$$

$$\mathbf{t} = A.\mathbf{f}\int \mathbf{N'}dx + \mathbf{T}\int \mathbf{N'}^s dx \tag{2.84}$$

Chương 3
BÀI TOÁN MỘT CHIỀU

§3.1. ĐẶC ĐIỂM CỦA BÀI TOÁN MỘT CHIỀU

Trong bài toán một chiều, ứng suất, biến dạng, chuyển vị và tải trọng chỉ phụ thuộc vào một biến là x. Như vậy, chuyển vị u, ứng suất σ, biến dạng ε, véc tơ lực thể tích **f**, véc tơ lực biên **T** là những hàm của x.

$$u = u\,(x) \qquad \sigma = \sigma\,(x) \qquad \varepsilon = \varepsilon\,(x) \qquad f = f(x) \qquad T = T\,(x) \tag{3.1}$$

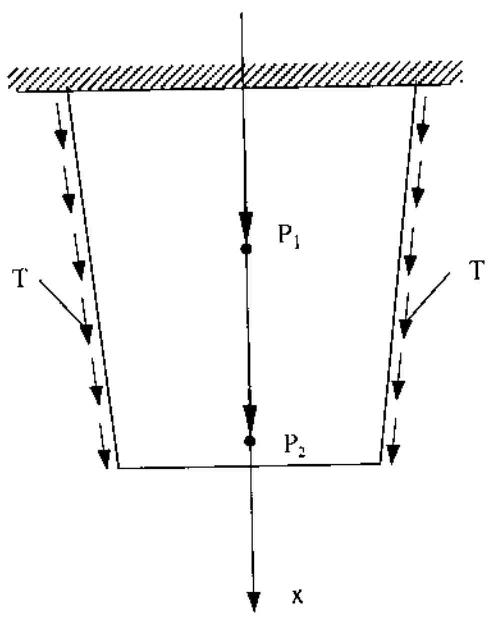
Các hệ thức ứng suất - biến dạng và ứng suất - chuyển vị

$$\sigma = E\,.\,\varepsilon, \qquad \varepsilon = \frac{du}{dx} \tag{3.2}$$

Thể tích của phần tử hữu hạn:

$$dV = Adx \tag{3.3}$$

Trong đó: A là diện tích tiết diện của phần tử hữu hạn một chiều (thực ra là một đoạn thanh thẳng).



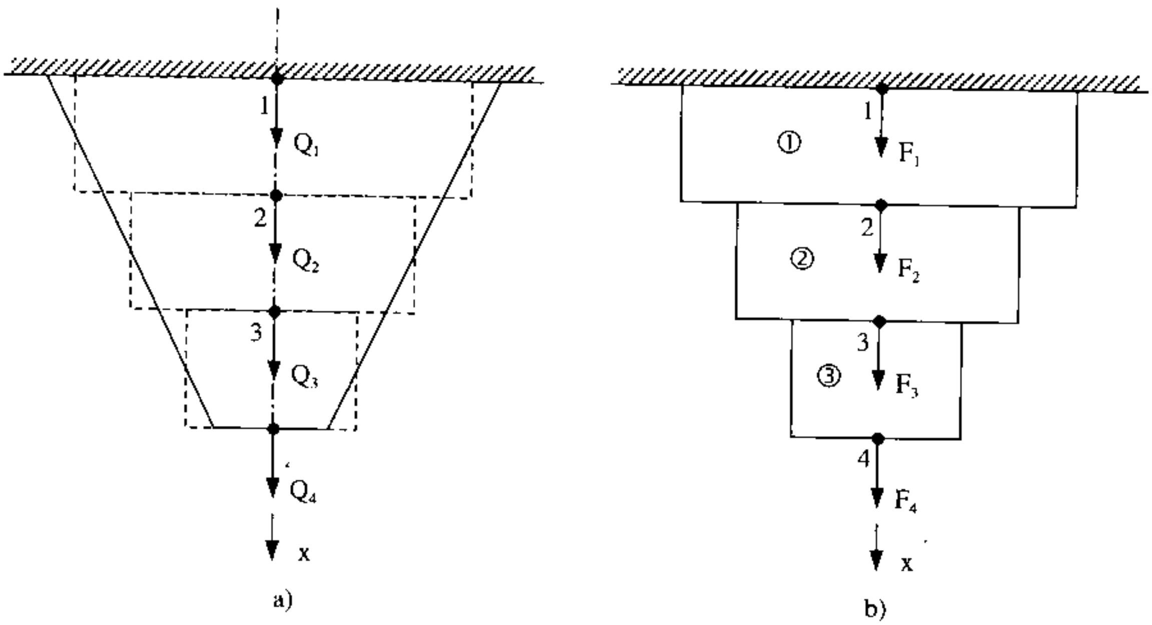
Hình 3.1. *Thanh một chiều chịu tác dụng của các lực*

Tải trọng gồm có: lực thể tích f không biểu thị trên hình vẽ, lực biên T, tải trọng điểm P_i. Lực thể tích (chẳng hạn như trọng lượng) tác dụng lên thể tích của vật thể và được tính trên đơn vị thể tích. Lực biên T tác dụng trên mặt biên của vật thể và được tính trên đơn vị diện tích. Các lực này biểu thị trên hình (3.1). Lực ma sát, lực nhờn, lực tiếp xúc là những ví dụ về lực biên. Cuối cùng, P_i là lực tác dụng tại điểm i.

Dưới đây, sẽ nghiên cứu mô hình phần tử hữu hạn áp dụng cho kết cấu một chiều.

§3.2. MÔ HÌNH PHẦN TỬ HỮU HẠN ÁP DỤNG CHO KẾT CẤU MỘT CHIỀU

Ta hãy xét thanh trên hình (3.2a). Trước hết, ta chia nó ra thành một số miền gọi là phần tử hữu hạn, chẳng hạn chia thành 3 miền, mỗi miền có diện tích mặt cắt ngang không thay đổi (hình 3.2b).



Hình 3.2. Mô hình phần tử hữu hạn đối với thanh thẳng

Mô hình phần tử hữu hạn cùng 4 điểm nút biểu thị trên hình (3.2b). Số thứ tự các phần tử hữu hạn được khoanh tròn để phân biệt với số thứ tự các điểm nút. Mặt cắt ngang, lực thể tích và lực biên được xem như không đổi trong mỗi phần tử hữu hạn. Chúng chỉ thay đổi từ phần tử hữu hạn này đến phần tử hữu hạn khác. Cần chú ý rằng, kết quả tính toán càng chính xác khi số phần tử hữu hạn càng nhiều. Để tiện cho việc tính toán, ta đặt nút tại điểm có tải trọng tập trung tác dụng.

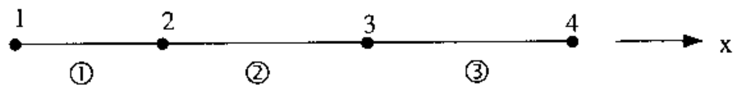
Trong bài toán một chiều, mỗi điểm nút chỉ được phép chuyển vị trên phương x, nghĩa là mỗi điểm nút chỉ có một bậc tự do. Trên hình (3.2b), mô hình phần tử hữu hạn có 4 nút nghĩa là toàn hệ có 4 bậc tự do. Chuyển vị tại các nút được biểu thị bằng các đại lượng Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. Véc tơ cột $\mathbf{Q} = [Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_4]'$ gọi là véc tơ chuyển vị tổng thể. Véc tơ tải trọng tổng thể:

$\mathbf{F}' = [F_1\ F_2\ F_3\ F_4]$ gồm các tải trọng tác dụng tại các nút (xem hình 3.2)

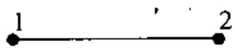
Dấu của chuyển vị và tải trọng quy ước là dương khi cùng chiều với chiều dương của trục x, là âm trong trường hợp ngược lại.

Điều kiện biên: $Q_1 = 0$ tại điểm ngàm

Mỗi phần tử hữu hạn có hai nút. Sơ đồ liên kết giữa các phần tử biểu thị trên hình (3.3).



Số thứ tự các phần tử và số thứ tự nút tổng thể



Số thứ tự nút cục bộ

Số thứ tự nút cục bộ và số thứ tự nút tổng thể (xem bảng dưới)

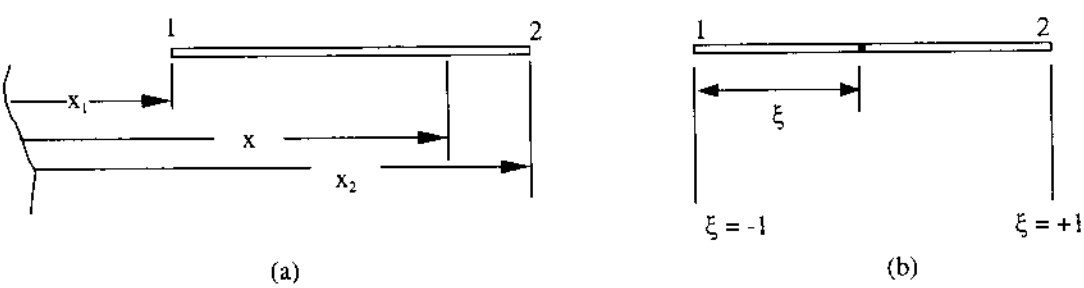
Phần tử	Số thứ tự nút cục bộ		Số thứ tự nút tổng thể	
1	1	2	1	2
2	1	2	2	3
3	1	2	3	4

***Hình 3.3.** Sơ đồ liên kết giữa các phần tử hữu hạn*

Bảng thống kê các phần tử và các nút tương ứng biểu thị trên hình (3.3). Ở đây, các số thứ tự 1 và 2 tại các nút của mỗi phần tử là những chỉ số có tính chất cục bộ.

§3.3. TỌA ĐỘ TỰ NHIÊN VÀ HÀM HÌNH DẠNG

Giả sử một phần tử hữu hạn e biểu thị như trên hình (3.4a).



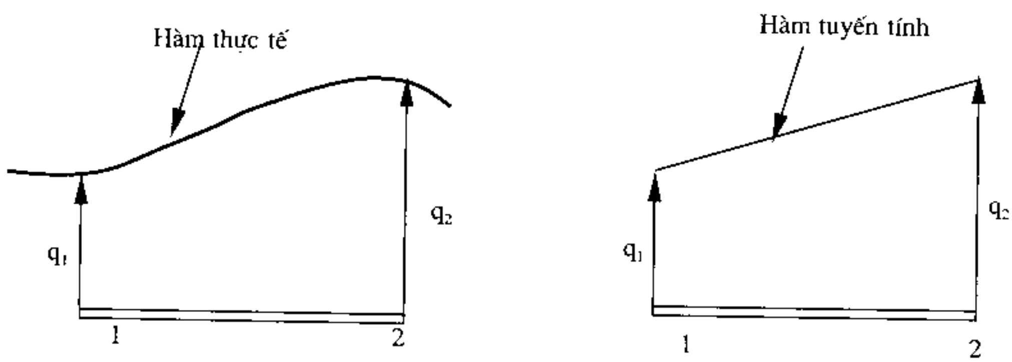
***Hình 3.4.** Phần tử hữu hạn trong tọa độ x và tọa độ tự nhiên*

Số thứ tự của nút đầu tiên là 1, của nút thứ 2 là 2. Nút 1 có toạ độ x_1, nút 2 có toạ độ x_2. Hệ toạ độ tự nhiên được định nghĩa như sau:

$$\xi = \frac{2}{x_2 - x_1}(x - x_1) - 1 \tag{3.4}$$

Từ hệ thức trên, ta có ξ = - 1 tại nút 1 và ξ = 1 tại nút 2 (hình 3.4b). Ta sẽ dùng hệ tọa độ tự nhiên này dễ suy ra hàm hình dạng.

Trường chuyển vị chưa biết trong phạm vi phần tử hữu hạn sẽ được nội suy qua sự phân bố tuyến tính (hình 3.5).



Hình 3.5. *Hàm nội suy tuyến tính của chuyển vị trong phần tử hữu hạn*

Đây là một giả thiết gần đúng nhưng kết quả tính toán càng chính xác khi số phần tử hữu hạn càng lớn.

Ta đưa vào các hàm biến dạng như sau:

$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \tag{3.5}$$

$$N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \tag{3.6}$$

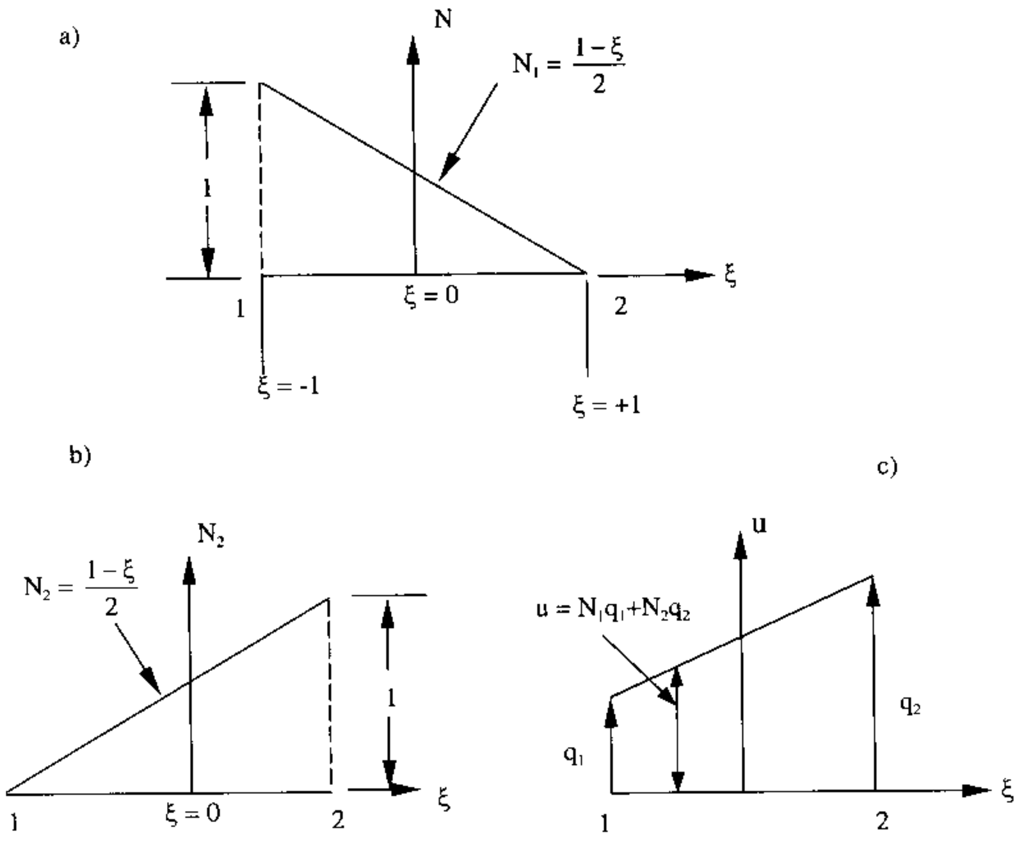
Các hàm hình dạng này biểu thị trên các hình (3.6a) và (3.6b). Khi các hàm hình dạng được xác định, trường chuyển vị tuyến tính trong phạm vi phần tử hữu hạn có thể biểu thị bằng các thành phần chuyển vị q_1 và q_2 tại các nút.

$$u = N_1 q_1 + N_2 q_2 \tag{3.7a}$$

Dưới dạng ma trận $\quad \mathbf{u} = \mathbf{N}.\,\mathbf{q}$ (3.7b)

Trong đó: $\quad \mathbf{N} = [N_1\ N_2] \qquad \mathbf{q'} = [q_1\ q_2]$ (3.8)

Trong các phương trình trên, **q** là véc tơ các thành phần chuyển vị tại các nút của phần tử hữu hạn. Từ phương triình (3.7a), u = q_1 tại nút 1 và u= q_2 tại nút 2 và chuyển vị u trong phần tử hữu hạn biến đổi tuyến tính.



Hình 3.6:

a) Hàm hình dạng N_1; b) Hàm hình dạng N_2 ; c) Hàm nội suy tuyến tính.

Cần chú ý rằng từ phương trình (3,4), có thể thực hiện phép biến đổi từ toạ độ tự nhiên ξ sang tọa độ x;

$$x = N_1x_1 + N_2x_2 \tag{3.9}$$

So sánh (3.7a) với (3.9), ta thấy rằng chuyển vị u và toạ độ x đã được nội suy trong phạm vi phần tử hữu hạn, thông qua các hàm hình dạng hoàn toàn như nhau. Ta gọi phép biến đổi này là *phép biến đổi cùng tham số.*

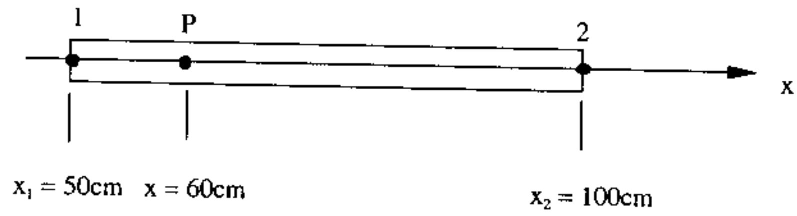
Nói chung, các hàm hình dạng phải thỏa mãn các điều kiện sau:

1. Đạo hàm bậc nhất phải hữu hạn trong phạm vi phần tử hữu hạn.
2. Chuyển vị phải liên tục trên biên của phần tử hữu hạn.

Ví dụ 3.1. Cho một thanh trên hình (3.7)

a) Tính ξ, N_1 và N_2 tại điểm P.

b) Nếu q_1 = 0,2cm, q_2 = 0,5cm, xác định giá trị chuyển vị u tại điểm P.



Hình 3.7

Giải:

a) Theo (3.4), ta có: $$\xi = \frac{2}{(100-50)}(60-50)-1 = -0,6$$

Theo (3,5) và (3,6) $$N_1 = \frac{1-(-0,6)}{2} = 0,8$$

$$N_2 = \frac{1-0,6}{2} = 0,2$$

b) Theo (3.7a) $$u_p = 0,8 \times 0,2 + 0,2 \times 0,5 = 0,26 \text{ cm}$$

Theo (3.2), hệ thức biến dạng - chuyển vị:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

Theo quy tắc tính đạo hàm

$$\varepsilon = \frac{du}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} \tag{3.10}$$

Theo (3.4) $$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{x_2 - x_1} \tag{3.11}$$

Do đó: $$u = N_1 q_1 + N_2 q_2 = \frac{1-\xi}{2}q_1 + \frac{1+\xi}{2}q_2$$

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{-q_1 + q_2}{2} \tag{3.12}$$

Theo (3.10): $$\varepsilon = \frac{1}{x_2 - x_1}(-q_1 + q_2) \tag{3.13}$$

Dưới dạng ma trận: $$\varepsilon = \mathbf{B} \cdot \mathbf{q} \tag{3.14}$$

Trong đó: $$\mathbf{B} = \frac{1}{x_2 - x_1}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

$$\mathbf{q}' = [q_1 \; q_2] \tag{3.16}$$

B *là ma trận biến dạng - chuyển vị* cấp 1×2 đồng thời là ma trận chứa các hằng số.

Theo định luật Húc, ứng suất trong phần tử hữu hạn

$$\sigma = E.\ \varepsilon$$

Thay (3.14) vào hệ thức trên, ta có:

$$\sigma = E\,(\mathbf{B}\ .\ \mathbf{q}) \tag{3.17}$$

Theo (3.17), ứng suất σ là một hằng số trong phạm vi phần tử hữu hạn. Nó được xem như tác dụng tại trọng tâm của tiết diện.

§3.4. MA TRẬN ĐỘ CỨNG VÀ VÉC TƠ TẢI TRỌNG CỦA PHẦN TỬ HỮU HẠN

Trong phần trên, ta đã suy ra các biểu thức của ứng suất, biến dạng, hàm hình dạng N, ma trận biến dạng - chuyển vị **B**. Tiếp theo, cần phải suy ra ma trận độ cứng và vectơ tải trọng của phần tử hữu hạn để lập phương trình cân bằng.

3.4.1. Ma trận độ cứng

Ta sẽ vận dụng nguyên lý công ảo đã trình bày trong chương một dễ suy ra ma trận độ cứng.

Áp dụng công thức (2.83a) ta có ma trận độ cứng:

$$\mathbf{k}_e = A.E.\ L_e\,(\mathbf{B'B}) \tag{3.18}$$

Trong đó: A - diện tích mặt cắt ngang của thanh;

E - mô đun đàn hồi;

L_e - chiều dài của phần tử hữu hạn.

Thay (3.15) vào (3.18), ta có:

$$\mathbf{k}_e = AEL_e\frac{1}{L_e}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\times\frac{1}{L_e}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}$$

Sau khi thực hiện phép nhân ma trận, hệ thức trên trở thành:

$$\mathbf{k}_e = \frac{A_eE_e}{L_e}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix} \tag{3.19}$$

3.4.2. Vectơ tải trọng của phần tử hữu hạn

Áp dụng công thức (2.84), ta có vectơ tải trọng:

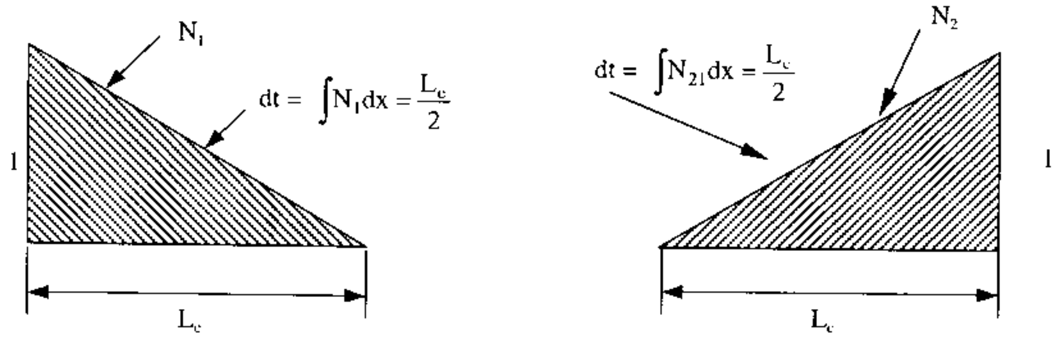
$$\mathbf{t}_e = A_e\ .\ f_e\int \mathbf{N}'dx + T_e\int \mathbf{N}'dx \tag{3.20}$$

Trong đó: f_e - Vectơ lực thể tích của phần tử e;

T_e - Vectơ lực biên của phần tử e;

N - hàm hình dạng.

Các hàm hình dạng N_1 và N_2 biểu thị trên hình (3.8).



Hình 3.8. Tích phân $\int N_1 dx$ *và* $\int N_2 dx$

Áp dụng công thức (3.8) vào (3.20), ta có:

$$\mathbf{t}_e = A_e . f_e \int \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} dx + T_e \int \begin{bmatrix} N_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} dx$$

$$= A_e . f_e \begin{bmatrix} \int N_1 dx \\ \int N_2 dx \end{bmatrix} + T_e \begin{bmatrix} \int N_1 dx \\ \int N_2 dx \end{bmatrix}$$

Căn cứ vào giá trị tích phân trên hình (3.8), ta có:

$$\mathbf{t}_e = \frac{A_e . L_e . f_e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{T_e L_e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

Ý nghĩa vật lý của công thức (3.21) như sau. Tích $A_e l_e f_e$ biểu thị tổng lực thể tích của phần tử hữu hạn e; tích $T_e . L_e$ biểu thị tổng lực biên tác dụng trên phần tử hữu hạn. Các lực này đều chia đều cho hai đầu của phần tử hữu hạn.

Sau khi tính được ma trận độ cứng và vec tơ tải trọng của các phần tử hữu hạn, ta ghép chúng lại để được *ma trận độ cứng tổng thể* và *vec tơ tải trọng tổng thể*.

Gọi **K** là ma trận độ cứng tổng thể và **F** là vectơ tải trọng tổng thể. Ta có sơ đồ ghép như sau:

$$\mathbf{K} \leftarrow \sum \mathbf{k}_e \tag{3.22}$$

$$\mathbf{F} \leftarrow \sum \mathbf{t}_e + \mathbf{P} \tag{3.23}$$

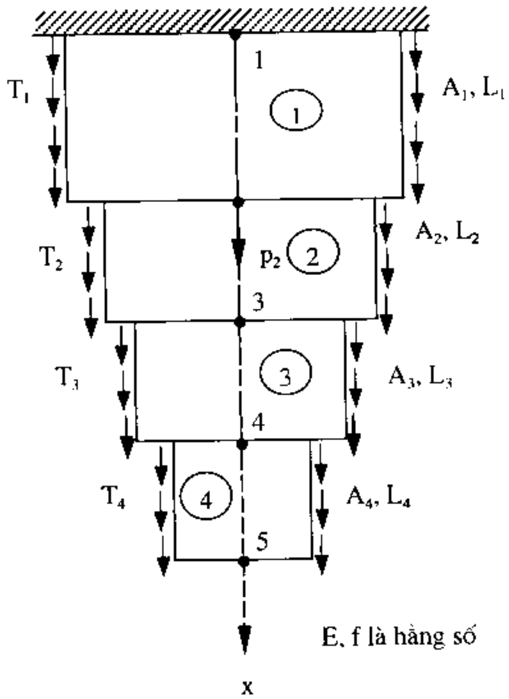
Trong đó: **P** là véc tơ tải trọng tập trung nếu có.

Ví dụ 3.2. Cho 1 thanh biểu thị trên hình (3.9). Mỗi phần tử chịu tác dụng của lực biên T trên đơn vị dài và lực thể tích f trên đơn vị thể tích. Ngoài ra, có tải trọng tập trung P tác dụng tại nút 2. Xác định ma trận độ cứng tổng thể và véc tơ tải trọng tổng thể.

Giải:

Theo (3.19), ta có ma trận độ cứng của phần tử hữu hạn thứ i (i = 1, 2,3,4) như sau:

$$k_i = \frac{EA_i}{L_i}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



Hình 3.9

Bảng 3.1. Sơ đồ liên kết các nút giữa các phần tử

Phần tử	Số thứ tự nút tổng thể	
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5

Ma trận độ cứng tổng thể có thể xác định bằng cách tính tổng của các ma trận.

$$\mathbf{K} = \frac{EA_1}{L_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EA_2}{L_2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+\frac{EA_3}{L_3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EA_4}{L_4}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Cách làm trên bất lợi khi tính trên máy tính điện tử vì phải lưu vào bộ nhớ quá nhiều con số 0.

Cách làm dưới đây thuận lợi cho việc lập trình. Ta đã biết rằng mỗi phần tử hữu hạn có hai bậc tự do mang các chỉ số 1 và 2. Đối với toàn hệ, nó có hai bậc tự do mang các chỉ số biểu thị như trên hình (3.9) và bảng (3.1).

Đặt $\frac{EA_i}{L_i} = e_i\left(i = 1,2,3,4\right)$, ta có các ma trận riêng (tức ma trận của các phần tử hữu hạn) như sau:

Phần tử 1: $$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \underset{(11)}{e_1} & \underset{(12)}{-e_1} \\ \underset{(21)}{-e_1} & \underset{(22)}{e_1} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

Phần tử 2: $$\mathbf{k}_2 = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \underset{(22)}{e_2} & \underset{(23)}{-e_2} \\ \underset{(32)}{-e_2} & \underset{(33)}{e_2} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Phần tử 3: $$\mathbf{k}_3 = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \underset{(33)}{e_3} & \underset{(34)}{-e_3} \\ \underset{(43)}{-e_3} & \underset{(44)}{e_3} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

Phần tử 4: $$\mathbf{k}_4 = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 4 & 5 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \underset{(44)}{e_4} & \underset{(45)}{-e_4} \\ \underset{(54)}{-e_4} & \underset{(55)}{e_4} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 4 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

Trong các ma trận độ cứng riêng trình bày trên, các số bên ngoài biểu thị số thứ tự của các bậc tự do trong toàn hệ. Các chỉ số (ij) biểu thị vị trí của các phần tử ma trận trong ma trận độ cứng tổng thể. Chẳng hạn - $e_{4\ (54)}$ là phần tử - e_4 của ma trận k_4 nằm ở hàng thứ 5 và cột thứ 4 của ma trận độ cứng tổng thể.

Để xác định ma trận độ cứng tổng thể **k** ta lần lượt đặt các ma trận độ cứng riêng vào ma trận độ cứng tổng thể ở những vị trí thích hợp. Nguyên tắc ghép các ma trận riêng như sau: nếu các phần tử của các ma trận riêng cùng chỉ số ij thì chúng được cộng với nhau. Chẳng hạn $e_1(22) + e_2(22)$, $e_2=(33) + e_3(33)$, e_3 $(44) + c_4(44)$.

Sau khi thực hiện các bước trên, ta được:

$$\mathbf{K} = E \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \dfrac{A_1}{L_1} & -\dfrac{A_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{A_1}{L_1} & \left(\dfrac{A_1}{L_1}+\dfrac{A_2}{L_2}\right) & -\dfrac{A_2}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{A_2}{L_2} & \left(\dfrac{A_2}{L_2}+\dfrac{A_3}{L_3}\right) & -\dfrac{A_3}{L_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{A_3}{L_3} & \left(\dfrac{A_3}{L_3}+\dfrac{A_4}{L_4}\right) & -\dfrac{A_4}{L_4} \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{A_4}{L_4} & \dfrac{A_4}{L_4} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \end{array} \tag{3.24}$$

Theo (3.21), ta có vectơ tải trọng

$$t_i = \frac{A_iL_if_i}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \frac{T_iL_i}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \qquad i = 1,2,3,4.$$

Cách ghép các vectơ tải trọng riêng cũng làm tương tự như trên.

Phần tử 1:

$$\mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{A_1L_1f_1}{2} + \dfrac{T_1L_1}{2} \\[2ex] \dfrac{A_1L_1f_1}{2} \quad \dfrac{T_1L_1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\[6ex] 2 \end{matrix}$$

Phần tử 2:

$$\mathbf{t}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{A_2L_2f_2}{2} + \dfrac{T_2L_2}{2} + P_2 \\[2ex] \dfrac{A_2L_2f_2}{2} \quad \dfrac{T_2L_2}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\[6ex] 3 \end{matrix}$$

Phần tử 3:

$$\mathbf{t}_3 = \begin{bmatrix} \dfrac{A_3L_3f_3}{2} + \dfrac{T_3L_3}{2} \\[2ex] \dfrac{A_3L_3f_3}{2} \quad \dfrac{T_3L_3}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\[6ex] 4 \end{matrix}$$

Phần 4:

$$\mathbf{t}_4 = \begin{bmatrix} \dfrac{A_4L_4f_4}{2} + \dfrac{T_4L_4}{2} \\[2ex] \dfrac{A_4L_4f_4}{2} \quad \dfrac{T_4L_4}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\[6ex] 5 \end{matrix}$$

Các số bên phải biểu thị số thứ tự các bậc tự do. Để ghép các vectơ tải trọng, ta cộng với nhau các phần tử trong vectơ tải trọng cùng có bậc tự do (tức số thứ tự của hàng) như nhau.

Chẳng hạn, phần tử thứ 2 trong $\mathbf{t}_1$ cộng với phần tử thứ nhất trong $\mathbf{t}_2$, phần tử thứ 2 trong $\mathbf{t}_2$ cộng với phần tử thứ nhất trong $\mathbf{t}_3$, phần tử thứ 2 trong $\mathbf{t}_3$ cộng với phần tử thứ nhất trong $\mathbf{t}_4$.

Cuối cùng, vectơ tải trọng tổng thể có dạng như sau:

$$\left\{\begin{matrix} \dfrac{A_1L_1f}{2}+\dfrac{L_1T_1}{2} \\ \left(\dfrac{A_1L_1f}{2}+\dfrac{L_1T_1}{2}\right)+\left(\dfrac{A_2L_2f}{2}+\dfrac{L_2T_2}{2}\right) \\ \left(\dfrac{A_2L_2f}{2}+\dfrac{L_2T_2}{2}\right)+\left(\dfrac{A_3L_3f}{2}+\dfrac{L_3T_3}{2}\right) \\ \left(\dfrac{A_3L_3f}{2}+\dfrac{L_3T_3}{2}\right)+\left(\dfrac{A_4L_4f}{2}+\dfrac{L_4T_4}{2}\right) \\ \dfrac{A_4L_4f}{2}+\dfrac{L_4T_4}{2} \end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix} 0 \\ P_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}$$

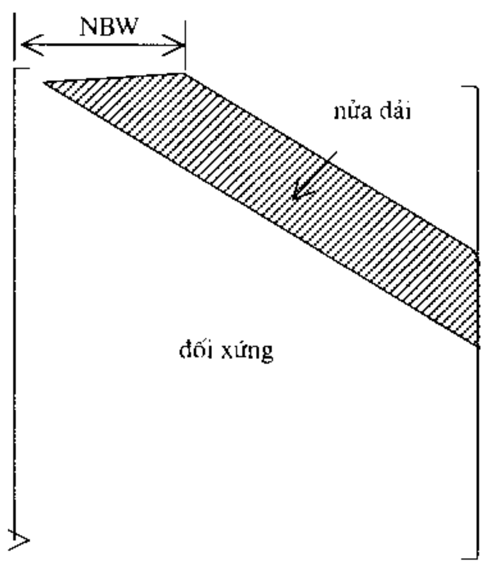
§3.5. CÁC TÍNH CHẤT CỦA MA TRẬN ĐỘ CỨNG TỔNG THỂ K

Ma trận độ cứng tổng thể **K** trong bài toán một chiều có các tính chất quan trọng sau đây:

1. Ma trận **K** có cấp $n \times n$,trong đó n là số bậc tự do hoặc số nút vì mỗi nút chỉ có một bậc tự do.

2. Ma trận **K** đối xứng (xem 3.24)

4. **K** là ma trận dải (hình 3.10)



Hình 3.10. Ma trận dải đối xứng

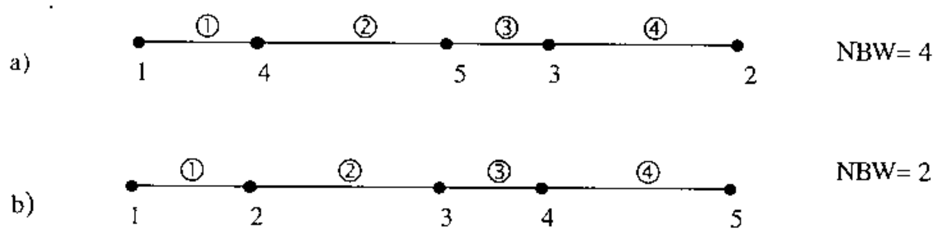
Trong ma trận dải, các phần tử của ma trận phân bố trong một dải đối xứng, các phần tử còn lại đều triệt tiêu. Trong ví dụ (3.2), ma trận **K** ở (3.34) là một ma trận dải đối xứng, bề rộng nửa dải NBW = 2. Để tiết kiệm bộ nhớ khi tính trên máy tính điện tử, ta lưu các phần tử của ma trận vào một bảng hình chữ nhật như sau:

$$\overset{\longleftarrow\ NBW = 2\ \longrightarrow}{}$$

$$K_d = E\begin{bmatrix} \dfrac{A_1}{L_1} & -\dfrac{A_1}{L_1} \\ \dfrac{A_1}{L_1}+\dfrac{A_2}{L_2} & -\dfrac{A_2}{L_2} \\ \dfrac{A_2}{L_2}+\dfrac{A_3}{L_3} & -\dfrac{A_3}{L_3} \\ \dfrac{A_3}{L_3}+\dfrac{A_4}{L_4} & -\dfrac{A_4}{L_4} \\ \dfrac{A_4}{L_4} & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận $\mathbf{K_d}$ có cấp $\mathbf{n} \times$ NBW trong đó NBW là bề rộng nửa dải tức là số phần tử trong một hàng của nửa dải. Trong các bài toán 1 chiều, mỗi phần tử hữu hạn thứ i có 2 nút i và i + 1 do đó NBW = 2. Bề rộng nửa dải có thể tính theo công thức sau:

NBW = max (hiệu các bậc tự do trong một phần tử hữu hạn)+1 (3.25)



Hình 3.11. *Cách đặt số thứ tự các nút và bề rộng nửa dải tương ứng*

Chẳng hạn đối với mô hình 4 phần tử hữu hạn trên hình (3.11a), ta có:

NBW = max (4-1, 5-4, 5-3, 3-2) + 1 = 4.

Theo hình (3.11b) NBW = max (2-1, 3-2, 4-3, 5-4) + 1 = 2

Rõ ràng là cách đặt số thứ tự các nút trên hình (3.11b) có tính chất tối ưu vì bề rộng nửa dải bé nhất do đó tiết kiệm được bộ nhớ của máy tính điện tử.

§3.6. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CÂN BẰNG CỦA TOÀN BỘ KẾT CẤU. CÁCH XỬ LÝ CÁC ĐIỀU KIỆN BIÊN

3.6.1. Hệ phương trình cân bằng tổng thể

Trong chương hai, ta đã thiết lập được hệ phương trình cân bằng của một phần tử hữu hạn thứ i theo công thức (2.78).

$$\mathbf{k}_i\mathbf{q}_i = \mathbf{t}_i \quad (3.26)$$

Trong đó: $\mathbf{k}_i$ - ma trận độ cứng của phần tử thứ i;

$\mathbf{q}_i$ - vectơ chuyển vị của phần tử thứ i;

$\mathbf{t}_i$ - vectơ tải trọng của phần tử thứ i.

Trong phần trước, ta đã trình bày cách ghép các ma trận độ cứng riêng và các vectơ tải trọng riêng để được ma trận độ cứng tổng thể **K** và vectơ tải trọng tổng thể **F**.

Bây giờ ta xếp các thành phần chuyển vị trong toàn hệ theo số thứ tự bậc tự do để được vectơ chuyển vị tổng thể **Q**:

$$\mathbf{Q} = [Q_1\ Q_2\ Q_3 \ldots\ldots Q_n]'$$

Trong đó n là số bậc tự do của toàn hệ.

Xuất phát từ (3.26), ta có hệ phương trình cân bằng tổng thể:

$$\mathbf{K.Q} = \mathbf{F} \quad (3.27)$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị Q_i. Sau khi áp dụng các công thức (3.14), (3.17), ta tính được biến dạng và ứng suất trong mỗi phần tử hữu hạn.

Trong kết cấu nói chung, có thể xảy ra trường hợp chuyển vị tại một điểm nào đó triệt tiêu hoặc có giá trị biết trước. Đây là những điều kiện biên cần phải xét đến trong quá trình giải hệ phương trình cân bằng tổng thể. Vấn đề này sẽ được nghiên cứu trong phần sau.

3.6.2. Cách xử lý các điều kiện biên

3.6.2.1. Các loại điều kiện biên

Có hai loại điều kiện biên.

Đối với loại thứ nhất, chuyển vị tại một điểm nào đó có giá trị cho trước. Chẳng hạn như:

$$Q_{d1} = a_1\ ;\ Q_{d2} = a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots Q_{dr} = a_r \quad (3.28)$$

Trong đó Q_{di} là chuyển vị trên phương bậc tự do d_i của toàn hệ ; a_i là giá trị chuyển vị cho trước (chẳng hạn như độ lún của nền móng); r - số bậc tự do có chuyển vị cho trước.

Các hệ thức (3.28) có thể áp dụng cho bài toán 2 chiều, 3 chiều và hệ thanh.

Loại thứ hai gọi là các *ràng buộc nhiều điểm*.

Nó có dạng:

$$\beta_1 Q_{d1} + \beta_2 Q_{d2} = \beta_0 \quad (3.29)$$

Trong đó: β_0, β_1, β_2 là những hằng số cho trước. Loại điều kiện biên này áp dụng cho các gối tựa lăn, liên kết cứng.

Có hai phương pháp xử lý các điều kiện biên:

- Phương pháp loại trừ
- Phương pháp mô hình lò xo.

3.6.2.2. Phương pháp loại trừ

Trước hết, ta hãy suy ra biểu thức của thế năng toàn phần.

Gọi **F** là vectơ tải trọng tổng thể;

Q là vectơ chuyển vị tổng thể.

Năng lượng biến dạng của phần tử hữu hạn có dạng:

$$U_e = \frac{1}{2}\int \sigma' \varepsilon.A.dx$$

Thay σ = E **Bq** vào ε = **Bq** vào hệ thức trên, ta có:

$$U_e = \frac{1}{2}\int_e \mathbf{q'B.E.B.q}Adx$$

Vì **q**, **B**, E, A là những hằng số nên :

$$U_e = \frac{1}{2}\mathbf{q}'\left(A'ELe\mathbf{B'B}\right)\mathbf{q}$$

Trong đó: A - diện tích mặt cắt ngang;

L_e - chiều dài của thanh 1 chiều;

E - mô đun đàn hồi.

Theo (2.83):

$$U_e = \frac{1}{2}\mathbf{q'k_eq}$$

Đối với toàn hệ, ta có năng lượng biến dạng toàn phần:

$$U = \frac{1}{2}\ \mathbf{Q'K.Q}$$

Vậy thế năng toàn phần của hệ kết cấu có thể viết:

$$TNT = \frac{1}{2}\mathbf{Q'KQ} - \mathbf{Q'.F} \tag{3.30}$$

Ta sẽ vận dụng nguyên lý thế năng cực tiểu để xử lý các điều kiện biên loại một. Giả sử chỉ có một điều kiện biên $Q_1 = a_1$. Đối với kết cấu có N bậc tự do, ta có:

$$\mathbf{Q} = [Q_1\ Q_2\ ......\ Q_N]'$$

$$\mathbf{F} = [\ F_1 \qquad F_2\ ......\ F_N]'$$

Ma trận độ cứng tổng thể có dạng:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & & & \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Cần chú ý rằng **K** là ma trận đối xứng. Thế năng toàn phần trong (3.30) có thể khai triển như sau:

$$\begin{aligned} \mathrm{TNT} = \frac{1}{2}(&Q_1K_{11}Q_1 + Q_1K_{12}Q_2 + \cdots + Q_1K_{1N}Q_N \\ &+ Q_2K_{21}Q_1 + Q_2K_{22}Q_2 + \ldots + Q_2K_{2N}Q_N \\ &------------------------ \\ &+ Q_NK_{N1}Q_1 + Q_NK_{N2}Q_2 + \cdots + Q_NK_{NN}Q_N) \\ &- (Q_1F_1 + Q_2F_2 + \cdots + Q_NF_N) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Thay điều kiện biên $Q_1 = a_1$ vào (3.32)

$$\begin{aligned} \mathrm{TNT} = \frac{1}{2}(&a_1K_{11}a_1 + a_1K_{12}Q_2 + \cdots + a_1K_{1N}Q_N \\ &+ Q_2K_{21}a_1 + Q_2K_{22}Q_2 + \cdots + Q_2K_{2N}Q_N \\ &------------------------ \\ &+ Q_NK_{N1}a_1 + Q_NK_{N2}Q_2 + \cdots + Q_NK_{NN}Q_N) \\ &- (a_1F_1 + Q_2F_2 + \cdots + Q_NF_N \end{aligned} \quad (3.33)$$

Cần chú ý rằng chuyển vị Q_1 đã bị loại trừ khỏi biểu thức thế năng toàn phần nêu trên. Để cực tiểu hóa thế năng toàn phần, ta triệt tiêu đạo hàm của nó đối với chuyển vị Q_i:

$$\frac{d\mathrm{TNT}}{dQ_i} = 0 \qquad i = 2, 3, \cdots, N \quad (3.34)$$

Từ (3.33) và (3.34), ta có:

$$\begin{aligned} &K_{22}Q_2 + K_{23}Q_3 + \cdots + K_{2N}Q_N = F_2 - K_{21}a_1 \\ &K_{32}Q_2 + K_{33}Q_3 + \cdots + K_{3N}Q_N = F_3 - K_{31}a_1 \\ &------------------------ \\ &K_{N2}Q_2 + K_{N3}Q_3 + \cdots + K_{NN}Q_N = F_N - K_{N1}a_1 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & \cdots & K_{2N} \\ K_{32} & K_{33} & \cdots & K_{3N} \\ \vdots & & & \\ K_{N2} & K_{N3} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 & - & K_{21}a_1 \\ F_3 & - & K_{31}a_1 \\ \vdots & & \\ F_N & - & K_{N1}a_1 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Qua trên, ta thấy rằng cấp của ma trận **K** bây giờ là (N-1) × (N-1) vì đã loại trừ hàng thứ nhất và cột thứ nhất (ứng với Q_1) từ ma trận gốc cấp N × N.

Từ hệ phương trình cân bằng tổng thể **KQ** = **F** với ma trận **K** có cấp (N-1) × (N-1), ta xác định vectơ chuyển vị tổng thể **Q** theo phương pháp Gauss và từ đó tính ứng suất và biến dạng.

Phản lực R_1 tại gối tựa có chuyển vị a_1 tính từ phương trình sau:

$$K_{11}Q_1 + K_{12}Q_2 + ... + K_{1n}Q_n = F_1 + R_1 \quad (3.37)$$

Trong đó: Các chuyển vị $Q_1, Q_2, ...Q_N$ đã biết;

F_1 là lực đặt tại gối tựa (nếu có).

Vậy:

$$R_1 = K_{11}\,Q_1 + K_{12}Q_2 + ...K_{1N}Q_N - F_1 \quad (3.38)$$

Cần chú ý rằng các phần tử của ma trận $K_{11}, K_{12}, ...K_{1N}$ cần được lưu riêng vào bộ nhớ vì chúng đã bị loại trừ khỏi ma trận gốc **K.**

Phương pháp trên có thể áp dụng cho trường hợp tổng quát trong đó có nhiều điều kiện biên.

Phương pháp loại trừ có thể tóm tắt như sau:

$$Q_{d1} = a_1;\ Q_{d2} = a_2 ....Qd_r = a_r$$

Bước 1: Lưu vào bộ nhớ các dòng thứ d_1, thứ d_2, ...thứ d_r của ma trận tổng thể **K** và vectơ tải trọng tổng thể **F**.

Bước 2: Loại trừ khỏi ma trận **K** các hàng và cột thứ d_1, thứ d_2, ...thứ d_r (d_i là số thứ tự bậc tự do trong toàn hệ). Ma trận **K** bây giờ có cấp (N-r)×(N-r) và vectơ tải trọng có cấp (N-r) × 1. Biến đổi mỗi thành phần của vectơ tải trọng như sau:

$$F_i = F_i - (K_{id_1} \cdot a_1 + K_{id_2}\,a_2 + ...+K_{idr} \cdot a_r) \quad (3.39)$$

Trong đó, bậc tự do i không phải là gối tựa (tức là ứng với chuyển vị cần phải tìm). Căn cứ vào ma trận $\mathbf{K}^*$ và $\mathbf{F}^*$ đã được biến đổi, giải hệ phương trình.

$$\mathbf{K}^*\mathbf{Q} = \mathbf{F}^*$$

để xác định vectơ chuyển vị **Q.**

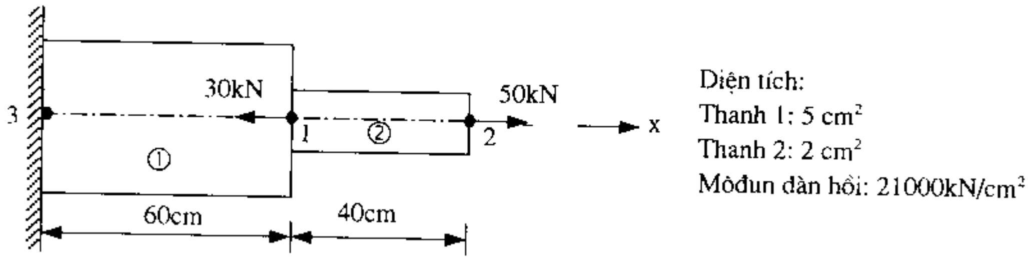
Bước 3: Đối với mỗi phân tử hữu hạn, căn cứ vào vectơ tải trọng **q**, xác định ứng suất và biến dạng.

Bước 4: Căn cứ vào các số liệu lưu trữ ở bước 1, tính các phản lực tại mỗi gối tựa.

$$\begin{aligned} R_{d1} &= K_{d1.1}\,Q_1 + K_{d1.2}\,Q_2 + ...+ K_{d1.N}\,Q_N - F_{d1} \\ R_{d2} &= K_{d2.1}Q_1 + K_{d2.2}Q_2 + ... + K_{d2.N}\,Q_N - F_{d2} \\ &.. \quad (3.40) \\ R_{dr} &= K_{dr,1}Q_1 + Q_{dr,2}\,Q_2 + ...+ Q_{dr.n}Q_N - F_{dr} \end{aligned}$$

Trong đó: $K_{i,j}$ là phần tử của ma trận **K** nằm trên hàng thứ i và cột (thứ j (ở đây, có nhiều chỉ số con nên phải dùng dấu phẩy); R_{dj} - phản lực men theo bậc tự do d_j.

Ví dụ 3.3: Cho kết cấu một chiều như trên hình (3.12)



Hình : 3.12

Dùng phương pháp loại trừ tính:
- Chuyển vị;
- Ứng suất;
- Phản lực.

Giải: Số thanh :2

Số BTD có chuyển vị: 2

Tổng số BTD: 3

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 1

Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 3

1) Căn cứ vào (3.19) xác lập các ma trận độ cứng riêng:

Thanh 1:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 3 & \quad 1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1750 & -1750 \\ & 1750 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ 3 \\ 1 \end{array}$$

Thanh 2:

$$\mathbf{k}_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & \quad 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1050 & -1050 \\ & 1050 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

2) Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể:

$$\mathbf{K} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & \qquad 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \begin{array}{c} 1750 \\ +1050 \\ \hline 2800 \end{array} & -1050 \\ -1050 & 1050 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

3) Căn cứ vào các tải trọng tác dụng lên kết cấu (không có lực thể tích và lực biên), ta có vectơ tải trọng.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 30 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4) Giải hệ phương trình

$$\mathbf{KQ = F}$$

Ta được giá trị các thành phần chuyển vị:

$$(q_1, q_2) = (1{,}143 \quad 5{,}905).10^{-2}\ \text{cm}$$

5) Tính ứng suất theo (3.15) và (3.17)

Thanh 1: $\sigma_1 = 21000.\dfrac{1}{60}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 \\ 1{,}143 \times 10^{-2} \end{bmatrix} = 4\ \text{kN/cm}^2$

Thanh 2: $\sigma_2 = 21000.\dfrac{1}{40}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1{,}143 \times 10^{-2} \\ 5{,}905 \times 10^{-2} \end{bmatrix} = 25\ \text{kN/cm}^2$

6) Tính phản lực theo (3.38)

$$FL = -1050 \times 1{,}143 \times 10^{-2} + 1050 \times 5{,}905 \times 10^{-2} = -20\text{kN}$$

3.6.2.3. Phương pháp mô hình lò xo

Phương pháp mô hình lò xo thuận tiện cho việc lập trình để tính trên máy tính điện tử. Nó đơn giản ngay cả khi được áp dụng vào các ràng buộc nhiều điểm như trong phương trình (3..20). Ta sẽ nghiên cứu vấn đề này trong các trường hợp sau:

Trường hợp điều kiện biên với các chuyển vị cho trước.

Giả sử có điều kiện biên:

$$Q_1 = a_1$$

Trong đó: a_1 là chuyển vị cho trước dọc theo bậc tự do 1 ở gối tựa. Phương pháp mô hình lò xo trình bày như sau:

Gối tựa được mô hình là một lò xo có độ cứng C rất lớn. Giá trị độ cứng này sẽ nghiên cứu sau. Một đầu của lò xo chuyển vị một đoạn a_1 như trên hình (3.13). Chuyển vị Q_1 dọc theo bậc tự do 1 tại gối tựa xấp xỉ bằng a_1 do lực cản của kết cấu tương đối bé.

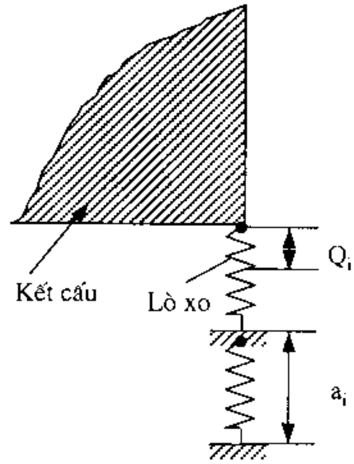
Độ giãn của lò xo là $(Q_1 - a_1)$. Năng lượng biến dạng của lò xo

$$U_1 = \frac{1}{2}C(Q_1 - a_1)^2 \qquad (3.41)$$

Thế năng toàn phần TNT bằng thế năng của kết cấu + thế năng của lò xo.

Kết hợp (3.30) và (3.41), ta có:

$$\text{TNT} = \frac{1}{2}\mathbf{Q'KQ} + \frac{1}{2}C(Q_1 - a_1)^2 - \mathbf{Q'F} \qquad (3.42)$$



***Hình 3.13**. Mô hình lò xo tại gối tựa kết cấu*

Theo nguyên lý thế năng cực tiểu, ta triệt tiêu đạo hàm của TNT đối với Q_i (i = 1,2, ... N) :

$$\frac{d\text{TNT}}{dQ_i} = 0 \qquad (i = 1,2, ...N)$$

Sau các phép tính, ta có hệ thức ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} (K_{11}+C) & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 + C.a_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix} \qquad (3.43)$$

Qua trên, ta thấy rằng ứng với điều kiện biên $Q_1 = a_1$, độ cứng C rất lớn được cộng vào phần tử đầu tiên trên đường chéo chính của ma trận **K** và tích $C.a_1$ được cộng vào phần tử đầu tiên của vectơ **F**. Ta xác định giá trị các thành phần chuyển vị Q_i bằng cách giải hệ phương trình (3.43).

Phản lực men theo bậc tự do d_1 bằng lực của lò xo tác dụng lên kết cấu. Vì độ giãn của lò xo là $(Q_1 - a_1)$ nên phản lực:

$$R_1 = -C(Q_1 - a_1) \qquad (3.44)$$

Phương pháp mô hình lò xo có thể tóm tắt như sau:

Giả sử có các điều kiện biên:

$$Q_{d_1} = a_1 \qquad Q_{d_2} = a_2 \;.............\; Q_{d_2} = a_r$$

Bước 1: Thay đổi ma trận độ cứng tổng thể **K** bằng cách cộng số C rất lớn vào các phần tử thứ d_1, d_2, ...d_r trên đường chéo chính của ma trận **K** (d_i là số thứ tự bậc tự do). Đồng thời, cộng tích $C.a_1$ vào F_{d1}, $C.a_2$ vào F_{d_2} ......, $C.\ a_r$ vào F_{d_r} trong vectơ tải trọng **F**. Giải hệ phương trình $\mathbf{K^*Q^*} = \mathbf{F^*}$ trong đó $\mathbf{K^*}$ và $\mathbf{F^*}$ là những ma trận đã được biến đổi.

Bước 2: Sau khi đã xác định được các thành phần chuyển vị, tính ứng suất và biến dạng trong kết cấu.

Bước 3: Tính phản lực tại gối tựa theo công thức:

$$R_{di} = -C(Q_{di} - a_i)\; i = 1,2, ... \qquad (3.45)$$

Cần chú ý rằng phương pháp mô hình lò xo có tính chất gần đúng. Độ chính xác, đặc biệt đối với phản lực, phụ thuộc vào cách chọn số C.

Cách chọn số C

Phương trình đầu tiên trong (3.43) có dạng:

$$(K_{11} + C)\, Q_1 + K_{12}\, Q_2 + \ldots\ldots + K_{1N}\, Q_N = F_1 + C.\, a_1 \qquad (3.46a)$$

Chia phương trình trên cho C, ta được:

$$\left(\frac{K_{11}}{C} + 1\right) Q_1 + \frac{K_{12}}{C} Q_2 + \ldots\ldots + \frac{K_{1N}}{C} Q_N = \frac{F_1}{C} + a_1 \qquad (3.46b)$$

Từ phương trình trên, ta thấy rằng khi C khá lớn so với các phần tử của ma trận K_{11}, K_{12}, ...K_{1N}, $Q_1 \approx a_1$. Cần chú ý rằng F_1 là tải trọng đặt tại gối tựa (nếu có) và tỷ số F_1/C thường rất bé. Có thể chọn số C như sau:

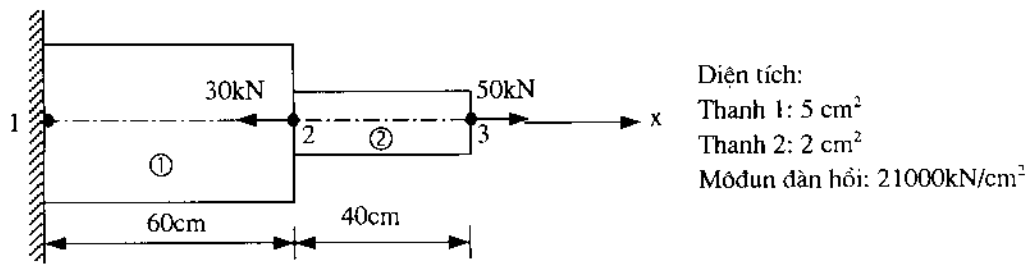
$$C = \max |K_{ij}| \times 10^8$$

$$1 \le i \le N \qquad (3.47)$$

$$1 \le j \le N$$

Kinh nghiệm cho thấy cách chọn thừa số 10^8, nói chung, thỏa mãn yêu cầu của máy tính điện tử.

Ví dụ 3.4: Cho hệ một chiều như trên hình (3.14)



Hình 3.14

Dùng phương pháp mô hình lò xo tính:

- Chuyển vị;
- Ứng suất;
- Phản lực.

Giải: Số thanh: 2

Số BTD có chuyển vị: 2

Tổng số BTD: 3

Số BTD có chuyển vị cho trước: 1

Số thứ tự BTD có chuyển vị cho trước: 1

1) Căn cứ vào (3.19) xác lập các ma trận độ cứng riêng:

Thanh 1:

$$\begin{array}{cl} & \begin{array}{cc} \quad 1 & \qquad 2 \end{array} \quad \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ \mathbf{k}_1 = & \begin{bmatrix} 1750 & -1750 \\ & 1750 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

Thanh 2:

$$\begin{array}{cl} & \begin{array}{cc} \quad 2 & \qquad 3 \end{array} \quad \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ \mathbf{k}_2 = & \begin{bmatrix} 1050 & -1050 \\ & 1050 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

2) Ghép các MTDC riêng thành MTĐC tổng thể:

$$\begin{array}{cl} & \begin{array}{ccc} \quad 1 & \qquad 2 & \qquad 3 \end{array} \\ \mathbf{K} = & \begin{bmatrix} 1750 & -1750 & 0 \\ & \begin{array}{r} 1750 \\ +1050 \\ \hline 2800 \end{array} & -1050 \\ & -1050 & 1050 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

3) Căn cứ vào các tải trọng tác dụng lên hệ một chiều, xác lập vectơ tải trọng (không có lực biên và lực thể tích):

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ 50 \end{bmatrix}$$

4) Biến đổi ma trận **K** và ma trận **F**

Vì số thứ tự BTD có chuyển vị cho trước bằng 1 (ở đây, chuyển vị cho trước bằng 0) nên phần tử thứ nhất trên đường chéo chính của ma trận **K** được cộng thêm số C và phần tử thứ nhất của vectơ tải trọng **F** được cộng thêm giá trị (C. chuyển vị tương ứng). Giá trị cực đại tuyệt đối của các phần tử trong ma trận **K** bằng 2800. Chọn $C = 2800 \times 10^8$.

Vậy:

$$k(1, 1) = 1750 + 28 \times 10^{10} \qquad f(1) = 0 + 2800 \times 10^8 \times 0 = 0$$

5) Căn cứ vào ma trận **K** và ma trận **F** đã được biến đổi, giải hệ phương trình:

$$\mathbf{KQ} = \mathbf{F}$$

Ta được giá trị các chuyển vị:

$$(q_1, q_2, q_3) = (7{,}14286 \times 10^{-12} \quad 1{,}143 \times 10^{-2} \quad 5{,}905 \times 10^{-2})\text{cm}$$

6) Tính ứng suất theo (3.15) và (3.17)

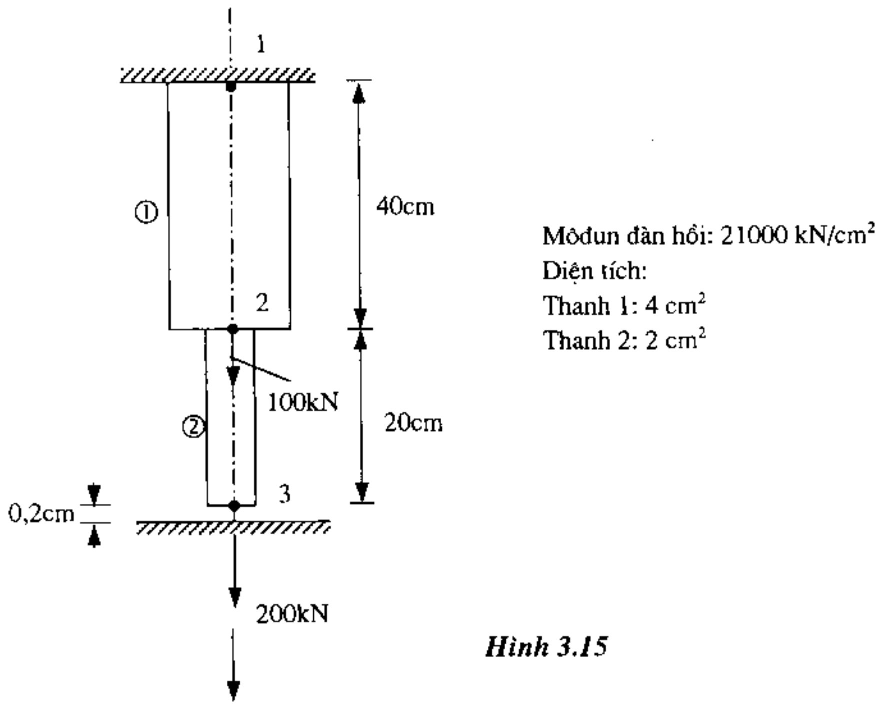
Thanh 1: $\sigma_1 = 21000.\frac{1}{60}[-1 \quad 1].\begin{bmatrix} 0 \\ 1{,}143 \times 10^{-2} \end{bmatrix} = 4\ kN/cm^2$

Thanh 2: $\sigma_2 = 21000.\frac{1}{40}[-1 \quad 1].\begin{bmatrix} 1{,}143 \times 10^{-2} \\ 5{,}905 \times 10^{-2} \end{bmatrix} = 25\ kN/cm^2$

7) Tính phản lực theo (3.38)

Tại nút 1: fl(1) = -28 x 10^{10}(7,14286 x 10^{11} -0) = -20 kN

Ví dụ 3.5: Cho hệ một chiều như trên hình (3.15)



Hình 3.15

Dùng phương pháp mô hình lò xo tính:

- Chuyển vị;
- Ứng suất;
- Phản lực.

Giải: Số thanh: 2

Tổng số BTD có chuyển vị (kể cả chuyển vị cho trước): 3

Số BTD có chuyển vị cho trước: 2

Số thứ tự BTD có chuyển vị cho trước: 1, 3

Chuyển vị tương ứng (xem hình 3.15): 0; 0,2cm.

1) Căn cứ vào (3.19) tính các ma trận độ cứng riêng:

Thanh 1:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{c@{}c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 2100 & -2100 \\ & 2100 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

Thanh 2:

$$\mathbf{k}_2 = \begin{array}{c@{}c} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 2100 & -2100 \\ & 2100 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

2) Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể:

$$\mathbf{K} = \begin{array}{c@{}c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 2100 & -2100 & 0 \\ & \begin{array}{c} 2100 \\ +2100 \\ \hline 4200 \end{array} & -2100 \\ & & 2100 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

3) Căn cứ vào các tải trọng tác dụng lên hệ một chiều (không có lực thể tích và lực biên), xác lập vectơ tải trọng:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 200 \end{bmatrix}$$

4) Biến đổi ma trận **K** và **F**

Vì các chuyển vị cho trước xuất hiện tại BTD có số thứ tự 1 và 3 (hình 3.15), ta phải cộng giá trị C vào phần tử thứ nhất và phần tử thứ 3 trên đường chéo chính của ma trận **K**; cộng giá trị (C × chuyển vị cho trước) vào phần tử thứ nhất và phần tử thứ 3 của ma trận **F**.

Giá trị cực đại tuyệt đối của các phần tử trong ma trận K bằng 4200.

Ta chọn $C = 4200 \times 10^8. = 42 \times 10^{10}$.

Vậy: $k(1, 1) = 2100 + 42 \times 10^{10}$ $\quad k(3,3) = 2100 + 42 \times 10^{10}$

$f(1) = 0 + C.0$ $\quad f(3) = 200 + (42 \times 10^{10}.0,2)$

5) Căn cứ vào ma trận **K** và ma trận **F** đã được biến đổi, giải hệ phương trình:

$$\mathbf{KQ} = \mathbf{F}$$

Kết quả tính:

$$(q_1, q_2, q_3) = (6{,}1905 \times 10^{-11}\ ; 0{,}124\ ; 0{,}2)\text{cm}$$

6) Tính ứng suất theo (3.15) và (3.17)

Thanh 1:

$$\sigma_1 = 21000.\frac{1}{40}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0\\0{,}124\end{bmatrix} = 65\ \text{kN/cm}^2$$

Thanh 2:

$$\sigma_2 = 21000.\frac{1}{20}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0{,}124\\0{,}200\end{bmatrix} = 80\ \text{kN/cm}^2$$

7) Tính phản lực theo (3.45)

Tại nút 1: $fl(1) = -42 \times 10^{10}(6{,}1905 \times 10^{11} - 0) = -260\text{kN}$

Tại nút 3: $fl(3) = -42 \times 10^{10}(0{,}2 - 0{,}2) = -40\text{kN}$

3.6.2.4. Trường hợp ràng buộc nhiều điểm

Trong trường hợp gối tựa nằm nghiêng hoặc liên kết cứng, điều kiện biên có dạng.

$$\beta_1 Q_{d1} + \beta_2 Q_{d2} = \beta_0$$

Trong đó: β_0, β_1, β_2 là các hằng số đã biết. Phương pháp mô hình lò xo sẽ được áp dụng cho điều kiện này như sau:

Thế năng toàn phần có dạng:

$$TNT = \frac{1}{2}\mathbf{Q'KQ} + \frac{1}{2}C\left(\beta_1 Q_{d1} + \beta_2 Q_{d2} - \beta_0\right)^2 - \mathbf{Q'F} \qquad (3.48)$$

Trong đó: C là một số rất lớn. Vì C rất lớn, để TNT có giá trị cực tiểu, $(\beta_1 Q_{d1} + \beta_2 Q_{d2})$ phải rất bé nghĩa là $\beta_1 Q_{d1} + \beta_2 Q_{d2} \approx \beta_0$ như ta mong muốn. Bằng cách triệt tiêu $\frac{dTNT}{dQ_i}\left(i = 1,2.........N\right)$, ta được các hệ thức sau:

$$\begin{bmatrix}K_{d_1d_1} & K_{d_1d_2}\\K_{d_2d_1} & K_{d_2d_2}\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}K_{d_1d_1} + C\beta_1^2 & K_{d_1d_2} + C\beta_1\beta_2\\K_{d_2d_1} + C\beta_1\beta_2 & K_{d_2d_2} + C\beta_2^2\end{bmatrix} \qquad (3.49)$$

$$\begin{bmatrix}F_{d_1}\\F_{d_2}\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}F_{d_1} + C\beta_0\beta_1\\F_{d_2} + C\beta_0\beta_1\end{bmatrix} \qquad (3.50)$$

Từ các phương trình $\partial TNT/\partial Q_{d_1} = 0$ và $\partial TNT/\partial Q_{d_2} = 0$ ta có:

$$\sum_j K_{d_{1j}} Q_j - F_{d_1} = R_{d_1} \quad \text{và} \quad \sum_j K_{d_{2j}} Q_j - F_{d2} = R_{d2}$$

Các phản lực R_{d_1} và R_{d_2} dọc theo các bậc tự do d_1 và d_2:

$$R_{d_1} = -\frac{\partial}{\partial Q_{d_1}}\left[\frac{1}{2}C\left(\beta_1 Q_{d_1} + \beta_2 Q_{d_2} - \beta_0\right)^2\right] \tag{3.51}$$

$$R_{d_2} = -\frac{\partial}{\partial Q_{d_2}}\left[\frac{1}{2}C\left(\beta_1 Q_{d_1} + \beta_2 Q_{d_2} - \beta_0\right)^2\right] \tag{3.51b}$$

Sau khi đơn giản hóa các phương trình (3.51) ta được:

$$R_{d_1} = -C\beta_1\left(\beta_1 Q_{d_1} + \beta_2 Q_{d_2} - \beta_0\right) \tag{3.52a}$$

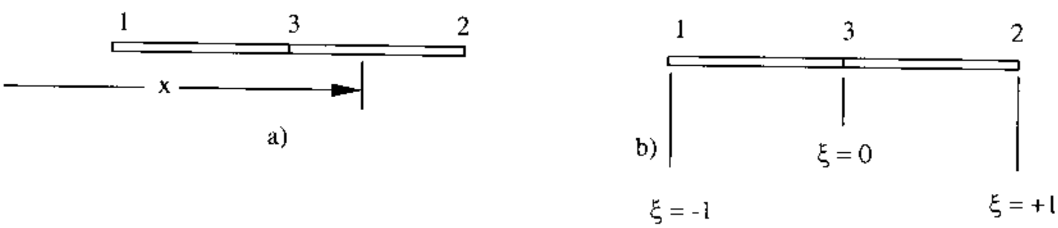
$$R_{d_2} = -C\beta_2\left(\beta_1 Q_{d_1} + \beta_2 Q_{d_2} - \beta_0\right) \tag{3.52b}$$

Các ràng buộc nhiều điểm là loại điều kiện biên tổng quát nhất, vì từ đó có thể suy ra các trường hợp đặc biệt khác.

§3.7. HÀM HÌNH DẠNG BẬC 2

Trong các phần trước, ta đã dùng hàm hình dạng tuyến tính để giải bài toán một chiều. Tuy nhiên, trong một số trường hợp, ta có thể dùng hàm hình dạng phi tuyến tính bậc 2 để được những kết quả tính toán chính xác hơn. Cách suy ra ma trận độ cứng và vectơ tải trọng tương tự như đã làm trước đây.

Ta hãy xét một phần tử hữu hạn bậc hai 3 nút như trên hình (3.16a).



Hình 3.16. *Phần tử hữu hạn bậc 2 trong tọa độ x và tọa độ tự nhiên*

Số thứ tự các nút như sau: nút 1 ở bên trái, nút 2 ở bên phải và nút 3 ở giữa, nút này gọi là nút bên trong. Sở dĩ đưa nó vào để suy ra hàm hình dạng bậc 2. Gọi x là tọa độ của một điểm. Véc tơ chuyển vị $\mathbf{q} = [\,q_1\ q_2\ q_3]$ trong đó q_1, q_2, q_3 là các thành phần chuyển vị tại các nút 1, 2, 3 . Tọa độ x tại 1 điểm trong phần tử hữu hạn được biến đổi thành tọa độ tự nhiên như sau:

$$\xi = \frac{2\left(x - x_3\right)}{x_2 - x_1} \tag{3.53}$$

Từ phương trình trên, ta thấy rằng $\xi = -1$, 0 và +1 tại các nút tương ứng 1, 3, 2 (hình 3.16b).

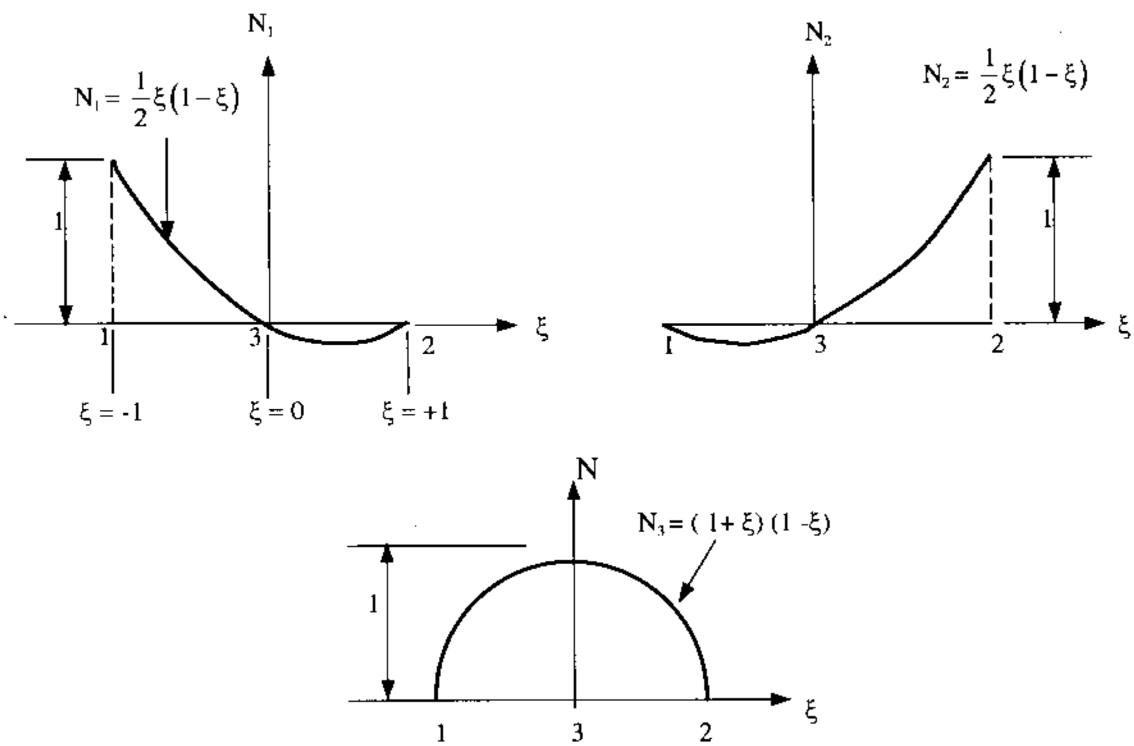
Bây giờ trong tọa độ tự nhiên ξ, ta định nghĩa các hàm hình dạng bậc 2 N_1, N_2, N_3 như sau:

$$N_1(\xi) = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) \tag{3.54a}$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}\xi(1-\xi) \tag{3.54b}$$

$$N_3(\xi) = (1+\xi)(1-\xi) \tag{3.54c}$$

Hàm hình dạng N_1 bằng 1 tại nút 1 và bằng 0 tại các nút 2 và 3. Một cách tương tự, N_2 bằng 1 tại nút 2 và bằng 0 tại 2 nút 1 và 3; N_3 bằng 1 tại nút 3 và bằng 0 tại 2 nút 1 và 2. Các hàm hình dạng N_1, N_2, N_3 biểu thị trên hình (3.17).



Hình 3.17. *Các hàm hình dạng N_1, N_2, N_3*

Ta suy ra các hàm hình dạng trên như sau. Chẳng hạn $N_1 = 0$ tại $\xi = 0$ và $N_1 = 0$ tại $\xi = 1$, vậy N_1 phải chứa tích $\xi(1-\xi)$ nghĩa là nó phải có dạng.

$$N_1 = c\xi(1-\xi).$$

Hằng số c xác định từ điều kiện $N_1 = 1$ tại $\xi = -1$, do đó $c = -\frac{1}{2}$. Cuối cùng, ta có công thức (3-54a). Các hàm hình dạng trên gọi là *hàm hình dạng Lagrange*.

Các thành phần chuyển vị trong phần tử hữu hạn được biểu thị qua các thành phần chuyển vị tại các nút.

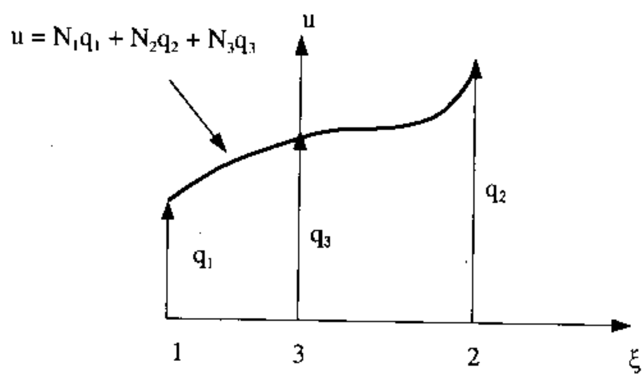
$$u = N_1q_1 + N_2q_2 + N_3q_3 \tag{3.53a}$$

Dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{u = N.q} \tag{3.55b}$$

Trong đó: $\mathbf{N} = [N_1\ N_2\ N_3]$ là ma trận cấp 1×3;

$\mathbf{q} = [q_1\ q_2\ q_3]'$ là vectơ chuyển vị cấp 3×1. Ta nhận thấy rằng tại nút 1, $N_1 = 1$, $N_2 = N_3 = 0$ do đó $u = q_1$. Một cách tương tự, $u = q_2$ tại nút 2 và $u = q_3$ tại nút 3. Vậy u trong (3.55a) là hàm nội suy bậc 2 đi qua các điểm q_1, q_2 và q_3 (hình 3.18).



***Hình 3.18.** Hàm nội suy u*

Căn cứ vào (3.53), (3.54) và (3.55), ta có biểu thức biến dạng như sau:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}$$

$$= \frac{2}{x_2 - x_1}\frac{du}{d\xi}$$

$$= \frac{2}{x_2 - x_1}\begin{bmatrix}\frac{dN_1}{d\xi} & \frac{dN_2}{d\xi} & \frac{dN_3}{d\xi}\end{bmatrix}.\mathbf{q}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{2}{x_2 - x_1}\begin{bmatrix}-\frac{1-2\xi}{2} & \frac{1+2\xi}{2} & -2\xi\end{bmatrix}.\mathbf{q} \tag{3.56a}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Bq} \tag{3.56b}$$

$$\mathbf{B} = \frac{2}{x_2 - x_1}\begin{bmatrix}-\frac{1-2\xi}{2} & \frac{1+2\xi}{2} & -2\xi\end{bmatrix} \tag{3.57}$$

Trong đó: ξ tính theo (3.53)

Theo định luật Húc, ta có ứng suất:

$$\sigma = E\,(\mathbf{Bq}) \tag{3.58}$$

Cần chú ý N_i là hàm hình dạng bậc 2, nên **B** trong (3.57) có tính chất tuyến tính đối với ξ. Điều này chứng tỏ *biến dạng và ứng suất biến đổi tuyến tính trong phần tử hữu hạn*, trong khi chúng là những hằng số nếu hàm hình dạng có tính chất tuyến tính (như trong các phần trước đã trình bày).

Bây giờ, ta xuất phát từ phương trình (2,83b) để suy ra ma trận độ cứng của phần tử hữu hạn.

$$\mathbf{k}_e = A.E\int \mathbf{B'}.\mathbf{B}.dx \tag{a}$$

Theo (3.53):

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L_e} \Rightarrow dx = \frac{L_e d\xi}{2} \tag{b}$$

Trong đó, L_e là chiều dài của phần tử hữu hạn. Thay (b) vào (a) ta có:

$$\mathbf{k}_e = \frac{A.E.L_e}{2}\int \mathbf{B'B}\ \ d\xi \tag{c}$$

Thay **B** từ (3.57) vào (c) và tiến hành tính tích phân, ta được:

$$\mathbf{k}_e = \frac{E_e A_e}{3L_e}\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array} \tag{3.59}$$

Theo (2.84), ta có vectơ tải trọng:

$$\mathbf{t}_e = A.\,f\int \mathbf{N'}dx + T\int \mathbf{N'}dx = \frac{A_e L_e f}{2}\int_{-1}^{1} \mathbf{N'}d\xi + \frac{T.L_e}{2}\int_{-1}^{1} \mathbf{N'}d\xi$$

Thay **N** từ (3.54) vào phương trình trên, ta có vectơ tải trọng của phần tử hữu hạn trong trường hợp tổng quát.

$$\mathbf{t}_e = A_e L_e f\begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 2/3 \end{bmatrix} + L_e.T\begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 2/3 \end{bmatrix}\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \tag{3.60}$$

Để được ma trận độ cứng tổng thể **K** và vectơ tải trọng tổng thể **F**, ta phải ghép các ma trận $\mathbf{k}_e$ và các ma trận $\mathbf{t}_e$ như đa làm trong phần trước.

Cuối cùng, giải hệ phương trình cân bằng tổng thể.

$$\mathbf{K.\,Q = F}$$

để xác định các thành phần chuyển vị và từ đó xác định ứng suất và biến dạng trong kết cấu.

§3.8. TÁC DỤNG CỦA NHIỆT ĐỘ

Trong mục này, ta nghiên cứu cách tính ứng suất do sự biến thiên nhiệt độ gây ra trong một vật liệu đàn hồi tuyến tính đồng tính trên mọi phương. Đây là bài toán ứng suất nhiệt.

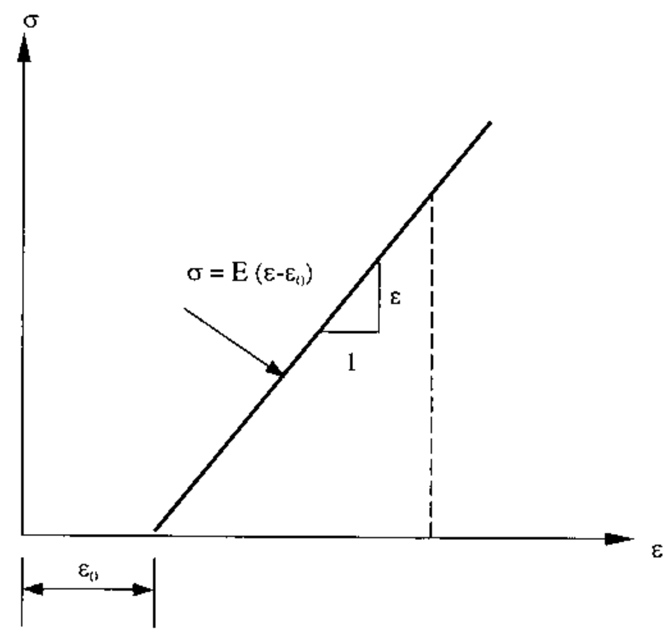
Giả sử đã biết độ biến thiên nhiệt độ Δt (x). Biến dạng ban đầu do nhiệt độ gây ra có thể viết:

$$\varepsilon_0 = \alpha \,.\, \Delta T \tag{3.61}$$

Trong đó, α là hệ số giãn nở do nhiệt.

Cần chú ý rằng khi $\Delta T > 0$, nhiệt độ tăng và khi $\Delta T < 0$ thì nhiệt độ giảm. Định luật ứng suất - biến dạng trong trường hợp có biến dạng ban đầu ε_0 biểu thị trên hình (3.21). Hệ thức ứng suất biến dạng có thể viết:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_0) \tag{3.62}$$



Hình 3.19. *Định luật ứng suất biến dạng khi có ứng suất ban đầu do nhiệt gây ra*

Bây giờ ta suy ra biểu thức ma trận độ cứng và vectơ tải trọng tương đương trong trường hợp có tác dụng của nhiệt độ.

Từ công thức tổng quát (2.71) suy ra cho bài toán 1 chiều:

$$\delta U = \delta_\varepsilon'.\sigma.A.dx$$

Trong bài toán một chiều dV = Adx; **D** = E (mô đun đàn hồi).

Thay $\sigma = E\,(\varepsilon - \varepsilon_0)$ ta có:

$$\delta U = \int \delta_\varepsilon.E(\varepsilon - \varepsilon_0)Adx = \int \delta_\varepsilon.E\varepsilon Adx - \int \delta_\varepsilon.E.\varepsilon_0 Adx$$

Vì $\varepsilon = \mathbf{B}.\,\mathbf{q}$ nên $\delta_\varepsilon = \mathbf{B}\ \boldsymbol{\delta}_q$ do đó:

$$\delta U = \boldsymbol{\delta}'_q\ EA\ \mathbf{B}'.\ \boldsymbol{\varepsilon}.\ \mathbf{q}\ \int dx - \boldsymbol{\delta}'_q EA\varepsilon_0 \mathbf{B}' \int dx$$

$$= \boldsymbol{\delta}'_q .(EAL\ \mathbf{B}'.\mathbf{B})\ \mathbf{q} - \boldsymbol{\delta}'_q .(\mathbf{EA}\ \alpha.\Delta\mathbf{T.LB}') \qquad \text{(a)}$$

Mặt khác, từ (2.72), ta có:

$$\delta W_c = \iiint \boldsymbol{\delta}'_u.\mathbf{f}\ dv + \iint \boldsymbol{\delta}'_u.\mathbf{T}\ ds$$

Trong bài toán một chiều: $dV = Adx$, $ds = dx$:

Vì $\mathbf{u} = \mathbf{N.q}$ nên $\boldsymbol{\delta}_u = \mathbf{N}\ .\ \boldsymbol{\delta}_q$ do đó:

$$\delta W_c = \delta'_q\ .\ f\ .\ A \int \mathbf{N}.dx + \delta_q T \int \mathbf{N}'dx \qquad \text{(b)}$$

Áp dụng nguyên lý công ảo, từ (a) và (b) ta có:

$$\delta U = \delta W \text{ do đó}$$

$$(EAL\mathbf{B}'\mathbf{B})\mathbf{q} = EA\ \alpha\Delta T.L\mathbf{B}' + A.f \int \mathbf{N}'dx + T \int \mathbf{N}'dx \qquad \text{(c)}$$

Phương trình trên có thể viết: $\mathbf{k}_e\ .\ \mathbf{q} = \mathbf{f}$

Trong đó: **k** - ma trận độ cứng của phần tử hữu hạn, đã được suy ra từ (3.18) và (3.19).

f - vectơ tải trọng.

Hai số hạng cuối cùng trong vế phải của (c) đã suy ra từ (3.20) và (3.21). Số hạng đầu tiên ở vế phải của (c).

$$EA\alpha\Delta T.\ L.\ \mathbf{B}' = E.A\alpha.\Delta T.L.\frac{1}{L}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = EA\alpha\Delta T \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Từ các kết quả trên, ta có vectơ tải trọng

$$\mathbf{f} = (E_eA_e\alpha\ \Delta T \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{A_eL_ef_e}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{T_eL_e}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (3.63)$$

Trong đó: $\mathbf{f}_n = E_eA_e\alpha\ \Delta T \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (3.64)$

$\mathbf{f}_n$ gọi là vectơ tải trọng do nhiệt.

Ta ghép các ma trận độ cứng $\mathbf{k}_e$ và vectơ tải trọng **f** như đã làm trong các phần trước để được hệ phương trình cân bằng tổng thể.

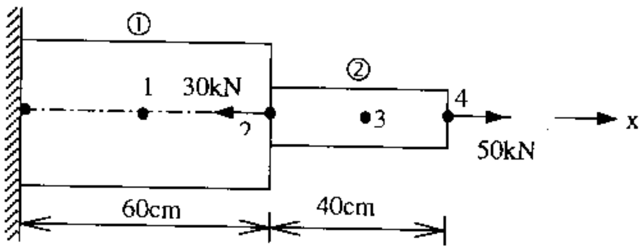
$$\mathbf{K}\ .\ \mathbf{Q} = \mathbf{F}$$

Giải hệ phương trình trên để xác định giá trị các thành phần chuyển vị, từ đó tính biến dạng trong kết cấu. Ứng suất tính theo công thức:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_0) = E(\mathbf{B.q} - \alpha.\Delta T)$$

hay $\sigma_e = \frac{E}{L_e}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\ \mathbf{q}_e - E\alpha\Delta T \qquad (3.65)$

Ví dụ 3.6: Cho hệ một chiều như trên hình (3.20)



Môđun đàn hồi: 21000kN/cm^2
Diện tích:
Thanh 1: 5 cm^2
Thanh 2: 2 cm^2

Hình 3.20

Dùng phương pháp hàm hình dạng bậc 2 tính:

- Chuyển vị;
- Ứng suất.

Giải: Số thanh: 2

Số BTD có chuyển vị: 4 (hình 3.20)

Tổng số BTD: 5

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 1

Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 5 (hình 3.20)

1) Căn cứ vào (3.59), xác lập các ma trận độ cứng riêng:

Thanh 1:
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 5 & 2 & 1 \end{array} \\ \mathbf{k}_1 = & \left[\begin{array}{ccc} 4083,33 & 583,33 & -4666,67 \\ & 4083,33 & -4666,67 \\ & & 9333,33 \end{array}\right] \begin{array}{c} 5 \\ 2 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

Thanh 2:
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 3 \end{array} \\ \mathbf{k}_2 = & \left[\begin{array}{ccc} 2450 & 350 & -2800 \\ & 2450 & -2800 \\ & & 5600 \end{array}\right] \begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

2) Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \mathbf{K} = & \left[\begin{array}{cccc} 4333,33 & -4666,67 & 0 & 0 \\ & 4083,33 & -2800 & 350 \\ & & 5600 & -2800 \\ \text{đối xứng} & & & 2450 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

3) Căn cứ vào các tải trọng tác dụng lên hệ một chiều, ta có vectơ tải trọng (không có lực biên và lực thể tích):

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix}$$

4) Giải hệ phương trình

$$\mathbf{K.Q = F}$$

Kết quả tính:

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = (0{,}571 \ ; \ 1{,}143 \ ; \ 5{,}905) \times 10^{-2} \text{ cm}$$

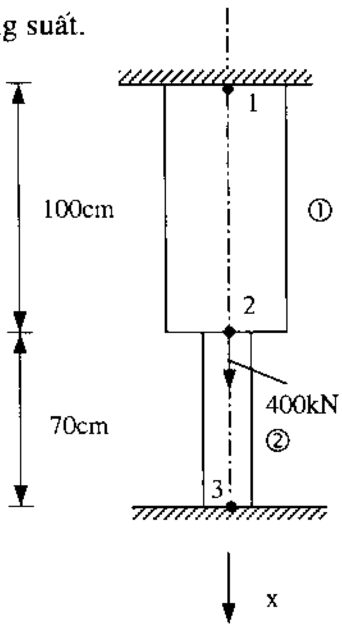
6) Tính ứng suất theo (3.17)

Tại nút 1: $\sigma(1) = 4 \text{ kN/cm}^2$

Tại nút 3: $\sigma(3) = 25 \text{ kN/cm}^2$

***Ví dụ 3.7**:* Hệ một chiều như trên hình (3.21). Dùng phương pháp mô hình lò xo tính:

- Chuyển vị;
- Ứng suất.



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2
Diện tích:
Thanh 1: 6 cm^2
Thanh 2: 4 cm^2
Tỷ trọng: 0,0785 kN/cm^3
Hệ số giãn nở: 11,7 x 10^{-6}/^{0}C
Số gia nhiệt độ: 60^0

Hình 3.21

Giải: Số thanh: 2

Số BTD có chuyển vị (kể cả chuyển vị cho trước): 3

Số BTD có chuyển vị cho trước: 2

Số thứ tự BTD có chuyển vị cho trước: 1, 3

Chuyển vị tương ứng : 0; 0

1) Xác lập các MTĐC riêng theo (3.19)

Thanh 1:
$$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1260 & -1260 \\ & 1260 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

Thanh 2:
$$\mathbf{k}_2 = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1200 & -1200 \\ & 1200 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

2) Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể:

$$\mathbf{K} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1260 & -1260 & 0 \\ & \begin{array}{r} 1260 \\ +\ 1200 \\ \hline 2460 \end{array} & -1200 \\ \text{đối xứng} & & 1200 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

3) Căn cứ vào (3.63) xác lập vectơ tải trọng tổng thể trường hợp xét cả trọng lượng bản thân và tác dụng của nhiệt độ:

Thanh 1:
$$\begin{bmatrix} 23,55 - 88,452 = -64,902 \\ 23,55 + 88,452 = 112,002 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}$$

Thanh 2:
$$\begin{bmatrix} 10,99 - 58,968 = -47,978 \\ 10,99 + 58,968 = 69,958 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array}$$

Sau khi ghép các vectơ tải trọng (xét cả tải trọng tác dụng bên ngoài), ta có vectơ tải trọng tổng thể:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -64,902 \\ 112,002 - 47,978 + 400 = 464,024 \\ 69,958 \end{bmatrix}$$

4) Biến đổi ma trận **K** và ma trận **F**

Giá trị cực đại tuyệt đối của các phần tử trong ma trận **K** bằng 2460. Chọn số C = $2460 \times 10^8 = 246 \times 10^9$. Các phần tử thứ nhất và thứ 3 trên đường chéo chính của ma trận **K** cần được cộng thêm vào số C. Các phần tử thứ nhất và thứ 3 trong ma trận **F** cần được cộng thêm giá trị (C × chuyển vị tương ứng) nhưng vì chuyển vị cho trước đều triệt tiêu nên các thành phần của ma trận **F** không thay đổi. Cuối cùng:

$$k(1,1) = 1260 + 246 \times 10^9 \,; \qquad k(3,3) = 1200 + 246 \times 10^9$$

5) Căn cứ vào ma trận **K** và ma trận **F** đã được biến đổi, giải hệ phương trình:

$$\mathbf{K.Q = F}$$

Kết quả tính:

$$(q_1, q_2, q_3) = (0\ ; 0{,}189\ ; 0)\text{cm}$$

6) Tính ứng suất theo (3.15) và (3.17)

Thanh 1:

$$\sigma_1 = \frac{21000}{100}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0\\0{,}189\end{bmatrix} = 39{,}612\ \text{kN/cm}^2$$

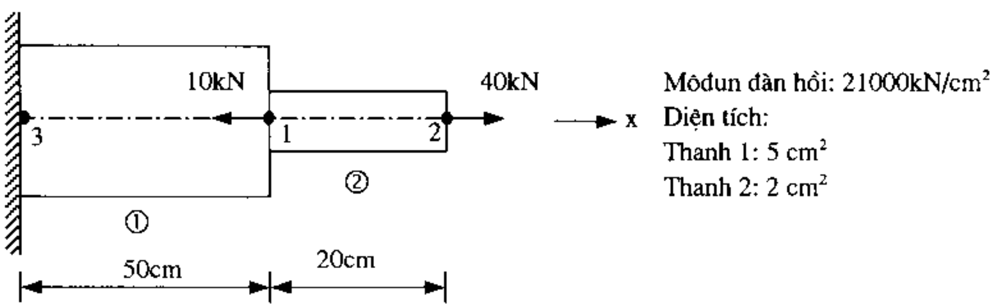
Thanh 2:

$$\sigma_2 = \frac{21000}{70}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0{,}189\\0\end{bmatrix} = -56{,}588\ \text{kN/cm}^2$$

§3.9. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH GIẢI BÀI TOÁN MỘT CHIỀU

3.9.1. Thuật toán giải bài toán một chiều dùng phương pháp loại trừ (CTR1)

Lấy ví dụ trên hình (3.22)



Hình 3.22

1) Nhập số liệu

Số thanh :2

Số BTD có chuyển vị: 2

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 1

Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 3

Tổng số BTD: 3

Cường độ lực biên: 0

Hệ số giãn nở: 0

Số gia nhiệt độ: 0

Tải trọng: -10; 40

Các số liệu còn lại thống kê trong bảng sau:

Phần tử	Chiều dài (cm)	Diện tích (cm^2)	Môđun đàn hồi (kN/cm^2)	Số thứ tự BTD	
				d_1	d_2
1	50	5	21000	3	1
2	20	2	21000	1	2

2) Xác định các MTĐC riêng theo (3.19)

3) Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể

4) Xác lập vectơ tải trọng

Nếu có cả lực thể tích và nhiệt độ tác dụng thì dùng công thức (3.63).

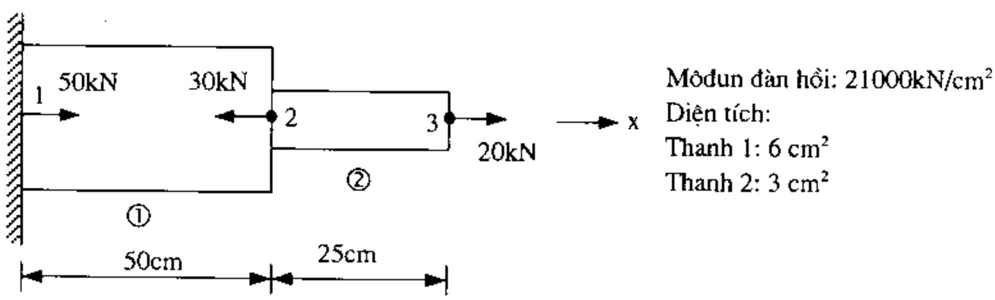
5) Giải hệ phương trình **K.Q = F**

6) Tính ứng suất theo (3.15) và (3.17)

7) Tính phản lực theo (3.38)

3.9.2. Thuật toán lập trình giải bài toán một chiều dùng phương pháp mô hình lò xo (CTR2)

Lấy ví dụ trên hình (3.23)



Hình 3.23

1) Nhập số liệu

Số thanh :2

Số BTD có chuyển vị (kể cả chuyển vị cho trước): 3

Tổng số BTD: 3

Số BTD có chuyển vị cho trước: 1

Số thứ tự BTD có chuyển vị cho trước: 1

Chuyển vị cho trước tương ứng: 0

Cường độ lực biên: 0

Hệ số giãn nở: 0

Số gia nhiệt độ: 0

Cường độ lực thể tích: 0

Thành phần tải trọng: 50; -30; 20

Các số liệu còn lại thống kê trong bảng sau:

Phần tử	Chiều dài (cm)	Diện tích (cm^2)	Môđun đàn hồi (kN/cm^2)	Số thứ tự BTD	
				d_1	d_2
1	50	6	21000	1	2
2	25	3	21000	2	3

2) Xác định các MTĐC riêng theo (3.19)

3) Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể

4) Biến đổi các ma trận **K** và **F** như đã làm trong ví dụ (3.4)

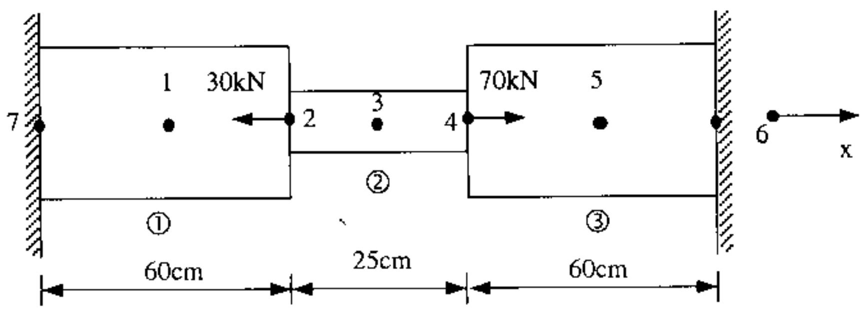
5) Giải hệ phương trình **K*.Q = F***

6) Tính ứng suất theo (3.15) và (3.17)

7) Tính phản lực theo (3.45)

3.9.3. Thuật toán lập trình giải bài toán một chiều dùng hàm hình dạng bậc 2 (CTR3)

Lấy ví dụ trên hình (3.24)



Hình 3.24

1) Nhập số liệu

Số thanh :2

Số BTD có chuyển vị : 5

Tổng số BTD: 7

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 2

Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 6; 7

Cường độ lực biên: 0

Hệ số giãn nở: 0

Số gia nhiệt độ: 0

Tỷ trọng: 0

Thành phần tải trọng: 0; -30; 0; 70; 0

Các số liệu còn lại thống kê trong bảng sau:

Phần tử	Chiều dài (cm)	Diện tích (cm^2)	Môdun đàn hồi (kN/cm^2)	Số thứ tự BTD		
				d_1	d_2	d_3
1	60	6	21000	7	2	1
2	40	3	21000	2	4	3
3	60	6	21000	4	6	5

2) Xác định các MTĐC riêng theo (3.59)

3) Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể

4) Xác lập vectơ tải trọng. Nếu có lực biên, lực thể tích, nhiệt độ tác dụng thì căn cứ vào (3.63)

5) Giải hệ phương trình **K.Q = F**

6) Tính ứng suất theo (3.15) và (3.17)

7) Tính phản lực theo (3.38)