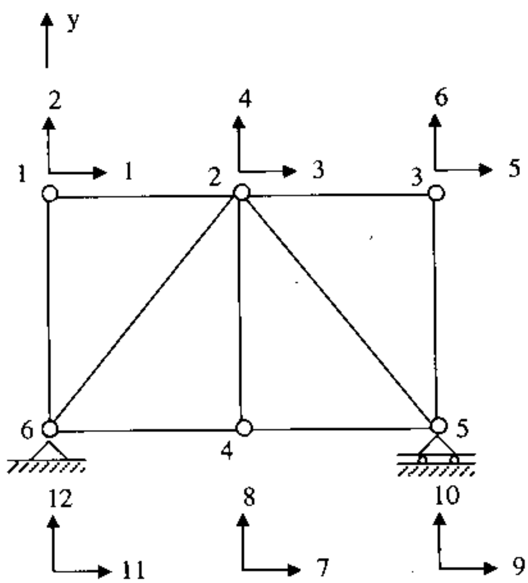
Chương 4
HỆ GIÀN

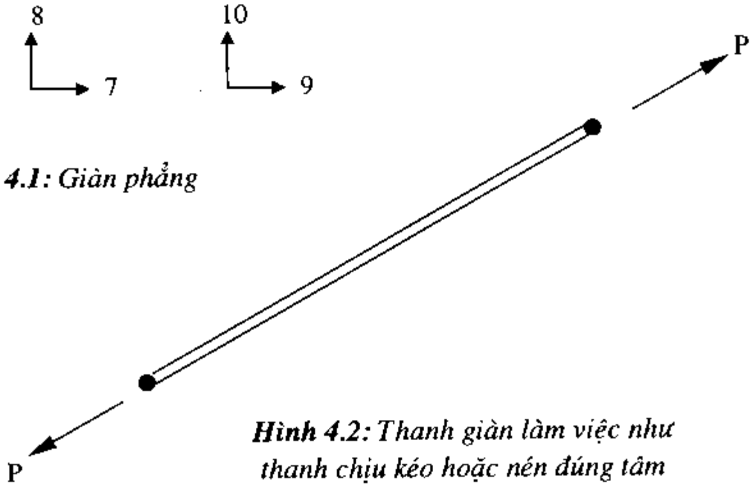
§4.1. KHÁI NIỆM

Giàn là kết cấu gồm các thanh được liên kết với nhau bằng 2 khớp ở 2 đầu (hình 4.1). Điểm quy tụ của các thanh giàn gọi là *nút giàn*. Trong tính toán, người ta thường bỏ qua trọng lượng của thanh giàn, đưa ra giả thiết tải trọng đặt tại các nút giàn và nút giàn là một khớp lý tưởng.

Vì những lẽ trên, thanh giàn làm việc như một thanh chịu kéo hoặc chịu nén đúng tâm (hình 4.2).



Hình 4.1: *Giàn phẳng*



Hình 4.2: *Thanh giàn làm việc như thanh chịu kéo hoặc nén đúng tâm*

Nói một cách khác, lực dọc, ứng suất và biến dạng trùng với trục của thanh gian và ta lại trở về bài toán kết cấu một chiều như đã trình bày trong chương 3.

Trong cơ học kết cấu, ta dùng 2 phương pháp tính giàn tĩnh định: phương pháp tách nút và phương pháp mặt cắt. Tuy nhiên, vẫn không tính được chuyển vị tại các nút giàn. Đối với giàn siêu tĩnh thì việc tính toán lại càng phức tạp hơn.

Trong phương pháp phần tử hữu hạn, ta xem các thanh giàn là những phần tử một chiều (như đã giải thích ở trên). Với phương pháp này, ta vừa xác định được các thành phần chuyển vị tại các nút giàn, vừa xác định được ứng suất và nội lực trong các thanh giàn. Nó có thể áp dụng cho giàn tĩnh định cũng như giàn siêu tĩnh.

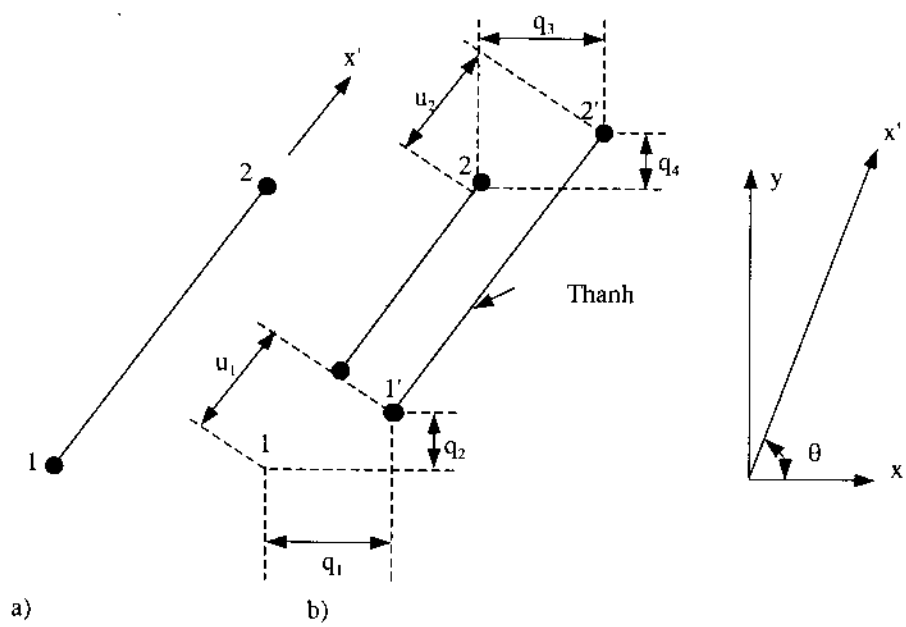
Dưới đây, ta sẽ nghiên cứu cách tính 2 loại giàn: giàn phẳng và giàn không gian.

§4.2. GIÀN PHẲNG

4.2.1. Hệ tọa độ cục bộ và hệ tọa độ tổng thể

Trong giàn phẳng, tải trọng và các thanh giàn cùng nằm trong một mặt phẳng. Ta còn gọi giàn phẳng là *giàn 2 chiều*. Khác với kết cấu 1 chiều đã nghiên cứu trong chương ba, ở đây, các thanh giàn có các hướng khác nhau. Vì vậy, phải đưa vào 2 hệ tọa độ: *hệ tọa độ cục bộ và hệ tọa độ tổng thể.*

Một thanh giàn phẳng trong hệ tọa độ cục bộ và hệ tọa độ tổng thể, biểu thị như trên hình (4.3). Trong hệ tọa độ cục bộ, mỗi thanh giàn có 2 đầu 1 và 2. Gọi x' là trục của thanh giàn (tức hệ trục tọa độ cục bộ), x và y là hệ trục tọa độ tổng thể. Chiều dương của trục x' đi từ đầu 1 đến đầu 2. Trong hệ tọa độ tổng thể, mỗi nút giàn có 2 bậc tự do d_1 (trên phương x) và d_2 (trên phương y). Để tiện cho việc lập trình, số thứ tự bậc tự do tại mỗi nút giàn tính như sau:



Hình 4.3: *a) Thanh giàn trong hệ tọa độ cục bộ;*
b) Thanh giàn trước và sau khi biến dạng trong hệ tọa độ tổng thể.

Tại nút i: $d_1 = 2i - 1$ (trên phương x)

$d_2 = 2i$ (trên phương y) (4.1)

Số thứ tự các bậc tự do biểu thị trên hình (4.1)

Các thành phần chuyển vị có các chỉ số như số thứ tự bậc tự do tương ứng. Chẳng hạn tại nút 4 trên hình (4.1), các thành phần chuyển vị.

Men theo bậc tự do 7 là Q_7

Men theo bậc tự do 8 là Q_8

Giả sử u_1 và u_2 là các chuyển vị dọc trục tại đầu 1 và đầu 2 của thanh giàn trong hệ tọa độ cục bộ (hình 4.3b).

Ta có vectơ chuyển vị trong hệ tọa độ cục bộ là:

$$\mathbf{U} = [u_1 \quad u_2]' \tag{4.2}$$

Vectơ chuyển vị của thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể (hình 4.3b) là:

$$\mathbf{q} = [q_1\ q_2\ q_3\ q_4]' \tag{4.3}$$

Theo quan hệ hình học trên hình (4.3), hệ thức giữa các chuyển vị trong hệ tọa độ cục bộ và chuyển vị trong hệ tọa độ tổng thể như sau:

$$U_1 = q_1\cos\theta + q_2\sin\theta \tag{4.4a}$$

$$U_2 = q_3\cos\theta + q_4\sin\theta \tag{4.4b}$$

Đặt côsin định hướng $l = \cos\theta$, $m = \cos\phi$ (= $\sin\theta$); các côsin định hướng này chính là côsin của các góc tạo thành bởi trục x' và các trục x, y. Dưới dạng ma trận, các phương trình (4.4a) và (4.4b) có thể viết:

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}\mathbf{q} \tag{4.5}$$

Trong đó, **R** gọi là *ma trận xoay* hoặc *ma trận biến đổi*. Nó có dạng:

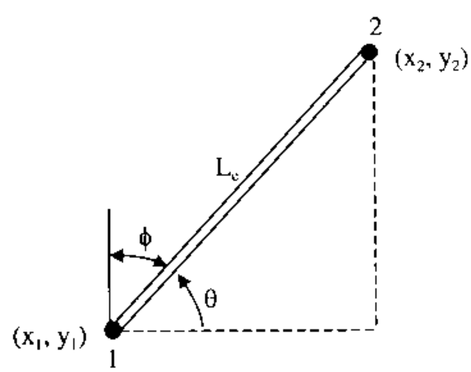
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Các côsin định hướng và chiều dài của thanh giàn tính theo hình (4.4). Giả sử (x_1, y_1) và (x_2, y_2) là tọa độ của các nút 1 và 2. Ta có:

$$l = \frac{x_2 - x_1}{L_e} \qquad m = \frac{y_2 - y_1}{L_e} \tag{4.7}$$

Trong đó: L_e là chiều dài của thanh giàn.

$$L_e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{4.8}$$



Hình 4.4: *Các côsin định hướng*

4.2.2. Ma trận độ cứng của thanh giàn

Như trong phần trên đã trình bày, mỗi thanh giàn là một kết cấu một chiều, do đó có thể vận dụng các công thức trong chương một và chương ba để tính ma trận độ cứng của thanh giàn:

Theo (3.19), ma trận độ cứng của thanh giàn trong hệ tọa độ cục bộ là:

$$\mathbf{k}_e = \frac{A_e Ee}{L_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

Mặt khác, vận dụng nguyên lý bảo toàn năng lượng (chương một), ma trận độ cứng của thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể tính theo công thức (1.43):

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{R}^t.\mathbf{k}_e.\mathbf{R} \tag{4.10a}$$

Thay (4.6), (4.9) vào (4.10a), ta được:

$$K_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & m \end{bmatrix} \times \frac{A_e E_e}{L_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \end{bmatrix}$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận, ta được:

$$\mathbf{K}_e = \frac{E_e A_e}{L_e}\begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Đối với giàn, trong vectơ tải trọng, không xét lực thể tích và lực biên, chỉ có các tải trọng đặt tại các nút giàn trên phương x và phương y, số thứ tự của chúng như đã trình bày trong 4.2.1.

Sau khi ghép các ma trận độ cứng $\mathbf{K}_e$ và các tải trọng, ta được hệ phương trình cân bằng tổng thể:

$$\mathbf{KQ} = \mathbf{F} \tag{4.11}$$

Ta giải hệ phương trình trên để xác định giá trị các thành phần chuyển vị tại các nút giàn, từ đó tính ứng suất trong các thanh giàn.

4.2.3. Tính ứng suất

Vì mỗi thanh giàn là một kết cấu một chiều (chương ba), ứng suất tính theo công thức:

$$\sigma = E.\varepsilon \tag{4.12a}$$

Trong đó: ε là biến dạng tỷ đối (trên đơn vị dài) của thanh giàn.

Từ hình (4.3), ta có:

$$\varepsilon = \frac{U_2 - U_1}{L_e}$$

do đó:
$$\sigma = \frac{E_e}{L_e}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1 \\ U_2\end{bmatrix} \qquad (4.12b)$$

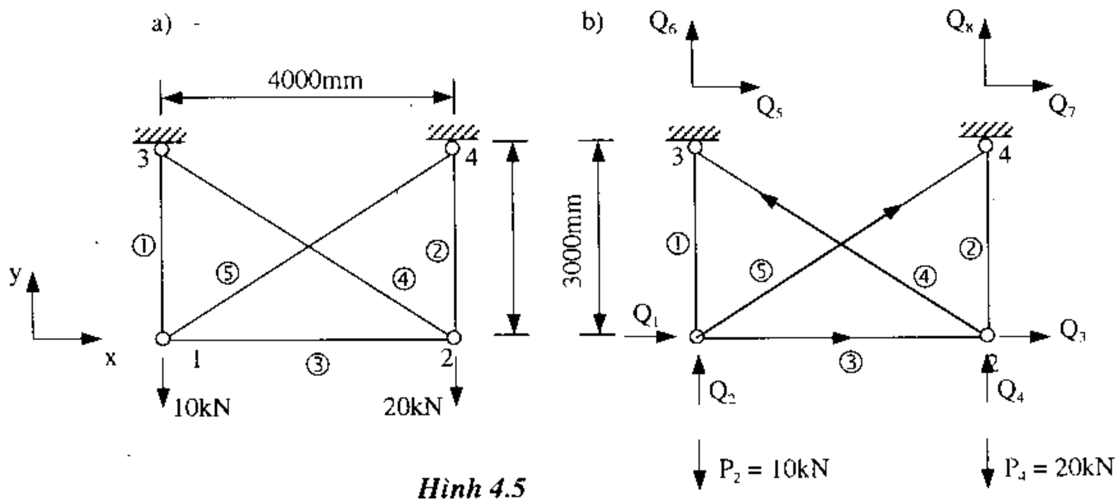
Theo (4.5):
$$\sigma = \frac{E_e}{L_e}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{R}.\,\mathbf{q} \qquad (4.12c)$$

Thay **R** từ (4.6) vào (4.12c):

$$\sigma = \frac{E_e}{L_e}\begin{bmatrix}-1 & -m & 1 & m\end{bmatrix}\mathbf{q} \qquad (4.13)$$

Cần chú ý rằng ứng suất σ có dấu dương khi thanh giàn chịu kéo và có dấu âm khi thanh giàn chịu nén.

Ví dụ 4.1:



Hình 4.5

Cho 1 giàn phẳng với kích thước và tải trọng như trên hình (4.5a). Diện tích tiết diện của các phần tử 1 và 2 bằng 2000m², của các phần tử còn lại là 600mm². E = 210kN/mm².

Xác định ma trận độ cứng của mỗi thanh giàn;

Ghép các ma trận độ cứng trên để được ma trận độ cứng tổng thể **K;**

Dùng phương pháp loại trừ, tính chuyển vị tại các nút;

Tính ứng suất trong mỗi thanh giàn;

Tính phản lực tại các gối tựa.

Giải:

Trước hết, căn cứ vào (4.1) ta xếp số thứ tự các bậc tự do tại các nút như trên hình (4.5b). Vectơ chuyển vị tổng thể:

$$\mathbf{Q} = [Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_4\ Q_5\ Q_6\ Q_7\ Q_8]'$$

Điều kiện biên: $Q_5 = Q_6 = Q_7 = Q_8 = 0.$

Vectơ tải trọng: $\mathbf{F} = [0 \quad P_2 \quad 0 \quad P_4 \quad R_5 \quad R_6 \quad R_7 \quad R_8]'$

Trong đó: P_2 và P_4 - tải trọng thẳng đứng đặt tại các nút 1 và 2;

R_5, R_6, R_7, R_8 - các phản lực tại các gối tựa 3 và 4.

Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau:

Tọa độ các nút

Nút	x	y
1	0	0
2	4000	0
3	0	3000
4	4000	3000

Số thứ tự bậc tự do

Nút	u	v
1	1	2
2	3	4
3	5	6
4	7	8

Số thứ tự bậc tự do tại đầu 1 và đầu 2.

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2
1	1	3
2	2	4
3	1	2
4	2	3
5	1	4

Đặc trưng hình học của các phần tử.

Phần tử	$(x_2 - x_1)$	$(y_2 - y_1)$	L	l	m	A	$\frac{AE}{L}$
1	0	3000	3000	0	1,0	2000	140
2	0	3000	3000	0	1,0	2000	140
3	4000	0	4000	1,0	0	600	31,5
4	-4000	3000	5000	-0,8	0,6	600	25,2
5	4000	3000	5000	0,8	0,6	600	25,2

a) Ma trận độ cứng của các thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể:

Căn cứ vào (4.10), ta có:

Phần tử 1:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & 6 \end{array} \\ K_1 = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 140 & 0 & -140 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -140 & 0 & 140 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

Phần tử 2:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 7 & 8 \end{array} \\ K_2 = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 140 & 0 & -140 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -140 & 0 & 140 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

Phần tử 3:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ K_3 = & \begin{bmatrix} 31{,}5 & 0 & -31{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -31{,}5 & 0 & 31{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

Phần tử 4:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ K_4 = & \begin{bmatrix} 16{,}13 & -12{,}10 & -16{,}13 & 12{,}10 \\ -12{,}10 & 9{,}07 & 12{,}10 & -9{,}07 \\ -16{,}13 & 12{,}10 & 16{,}13 & -12{,}10 \\ 12{,}10 & -9{,}07 & -12{,}10 & 9{,}07 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

Phần tử 5:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 7 & 8 \end{array} \\ K_5 = & \begin{bmatrix} 16{,}13 & 12{,}10 & -16{,}13 & -12{,}10 \\ 12{,}10 & 9{,}07 & -12{,}10 & -9{,}07 \\ -16{,}13 & -12{,}10 & 16{,}13 & 12{,}10 \\ -12{,}10 & -9{,}07 & 12{,}10 & 9{,}07 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

b) Sau khi ghép các ma trận trên, ta có ma trận độ cứng tổng thể của toàn hệ:

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8
\end{array}
\leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể}
$$

$$
\mathbf{K} = \begin{pmatrix}
\begin{matrix}0\\31{,}5\\\underline{16{,}13}\\47{,}63\end{matrix} & \begin{matrix}0\\0\\\underline{12{,}10}\\12{,}10\end{matrix} & -31{,}5 & 0 & 0 & 0 & -16{,}18 & -12{,}10 \\[2ex]
\begin{matrix}0\\0\\\underline{12{,}10}\\12{,}10\end{matrix} & \begin{matrix}140\\0\\\underline{9{,}07}\\149{,}07\end{matrix} & 0 & 0 & 0 & -140 & -12{,}10 & -9{,}07 \\[2ex]
-31{,}5 & 0 & \begin{matrix}0\\31{,}5\\\underline{16{,}13}\\47{,}63\end{matrix} & \begin{matrix}0\\-12{,}10\end{matrix} & -16{,}13 & 12{,}10 & 0 & 0 \\[2ex]
0 & 0 & \begin{matrix}0\\\underline{-12{,}10}\\-12{,}10\end{matrix} & \begin{matrix}140\\\underline{9{,}07}\\149{,}07\end{matrix} & 12{,}10 & -9{,}07 & 0 & -140 \\[2ex]
0 & 0 & -16{,}13 & 12{,}10 & \begin{matrix}0\\16{,}13\end{matrix} & \begin{matrix}0\\-12{,}10\end{matrix} & 0 & 0 \\[2ex]
0 & -140 & 12{,}10 & -9{,}07 & \begin{matrix}0\\\underline{-12{,}10}\\-12{,}10\end{matrix} & \begin{matrix}140\\\underline{9{,}07}\\149{,}07\end{matrix} & 0 & 0 \\[2ex]
-16{,}13 & -12{,}10 & 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{matrix}0\\\underline{16{,}13}\\16{,}13\end{matrix} & \begin{matrix}0\\\underline{12{,}10}\\12{,}10\end{matrix} \\[2ex]
-12{,}10 & -9{,}07 & 0 & -140 & 0 & 0 & \begin{matrix}0\\\underline{12{,}10}\\12{,}10\end{matrix} & \begin{matrix}140\\\underline{9{,}07}\\149{,}07\end{matrix}
\end{pmatrix}
\begin{array}{c}
1\\[6ex] 2\\[6ex] 3\\[6ex] 4\\[5ex] 5\\[4ex] 6\\[5ex] 7\\[5ex] 8
\end{array}
$$

Vậy:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể}
\end{array}\\[4pt]
K = \left[\begin{array}{cccc|cccc}
47{,}63 & 12{,}10 & -31{,}5 & 0 & 0 & 0 & -16{,}13 & -12{,}10 \\
12{,}10 & 149{,}07 & 0 & 0 & 0 & -140 & -12{,}10 & -9{,}07 \\
-31{,}5 & 0 & 47{,}63 & -12{,}10 & -16{,}13 & 12{,}10 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -12{,}10 & 149{,}07 & 12{,}10 & -9{,}07 & 0 & -140 \\
\hline
0 & 0 & -16{,}13 & 12{,}10 & 16{,}13 & -12{,}10 & 0 & 0 \\
0 & -140 & 12{,}10 & -9{,}07 & -12{,}10 & 149{,}07 & 0 & 0 \\
-16{,}13 & -12{,}10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16{,}13 & 12{,}10 \\
-12{,}10 & -9{,}07 & 0 & -140 & 0 & 0 & 12{,}10 & 149{,}07
\end{array}\right]
\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8 \end{array}
\end{array}
\tag{4.14}
$$

Để tính chuyện vị và phản lực, ta chia ma trận độ cứng tổng thể **K** trong (4.14) thành 4 khối M_1, M_2, M_3, M_4. Hệ phương trình cân bằng tổng thể của toàn hệ có thể viết:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể}
\end{array}\\[4pt]
\left[\begin{array}{c|c}
M_1 & M_2 \\
\hline
M_3 & M_4
\end{array}\right]
\times
\left[\begin{array}{c} Q_1\\Q_2\\Q_3\\Q_4\\ \hline Q_5\\Q_6\\Q_7\\Q_8 \end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c} 0\\-10\\0\\-20\\ \hline R_5\\R_6\\R_7\\R_8 \end{array}\right]
\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8 \end{array}
\end{array}
\tag{4.15}
$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận chia khối, ta được các hệ thức ma trận sau:

$$
\begin{bmatrix}
47{,}63 & 12{,}10 & -31{,}5 & 0 \\
12{,}10 & 149{,}07 & 0 & 0 \\
-31{,}5 & 0 & 47{,}63 & -12{,}10 \\
0 & 0 & -12{,}10 & 149{,}07
\end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix} Q_1\\Q_2\\Q_3\\Q_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0\\-10\\0\\-20 \end{bmatrix}
\tag{4.16}
$$

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & -16{,}13 & 12{,}10 \\
0 & -140 & 12{,}10 & -9{,}07 \\
-16{,}13 & -12{,}10 & 0 & 0 \\
-12{,}10 & -9{,}07 & 0 & -140
\end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix} Q_1\\Q_2\\Q_3\\Q_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} R_5\\R_6\\R_7\\R_8 \end{bmatrix}
\tag{4.17}
$$

c) Tính chuyển vị tại các nút

Giải hệ phương trình (4.16), ta được giá trị các thành phần chuyển vị.

$$\mathbf{Q} = [Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_4]' = 10^{-2}[-1,12 \quad -6,62 \quad -4,24 \quad -13,76]\ \text{mm}$$

d) Tính ứng suất trong các thanh giàn theo (4.13)

$$\sigma_i = \frac{E_i}{L_i}\left[(q_3 - q_1)l_i - (q_4 - q_2)m_i\right]$$

Phần tử 1:

$$\sigma_1 = \frac{210 \times 10^{-2}}{3000}\left[0 - (0 + 6,62)\right] = -4,634 \times 10^{-3}\,\text{kN/mm}^2$$

Phần tử 2:

$$\sigma_2 = \frac{210 \times 10^{-2}}{3000}\left[0 - (0 + 13,76)\right] = -9,632 \times 10^{-3}\,\text{kN/mm}^2$$

Phần tử 3:

$$\sigma_3 = \frac{210 \times 10^{-2}}{4000}\left[(-4,24 + 1,12) \times 1,0 + 0\right] = -1,638 \times 10^{-3}\ \text{kN/mm}^2$$

Phần tử 4:

$$\sigma_4 = \frac{210 \times 10^{-2}}{5000}\left[(0 + 4,24) \times (-0,8) + (0 + 13,76) \times 0,6\right]$$

$$= 2,043 \times 10^{-3}\ \text{kN/mm}^2$$

Phần tử 5:

$$\sigma_5 = \frac{210 \times 10^{-2}}{5000}\left[(0 + 4,24) \times 0,8 + (0 + 13,76) \times 0,6\right]$$

$$= 4,892\ \text{kN/mm}^2$$

e) Tính phản lực theo (4.17)

$$R_5 = -16,13 \times 10^{-2}(-4,24) + 12,10 \times 10^{-2}(-13,76) = -0,982\text{kN}$$

$$R_6 = 10^{-2}[-140 \times (-6,62) + 12,10 \times (-4,24) - 9,07 \times (-13,76)] = 10\text{kN}$$

$$R_7 = 10^{-2}[-16,13 \times (-1,12) - 12,10 \times (-6,62)] = 0,982\text{kN}$$

$$R_8 = 10^{-2}[-12,10 \times (-1,12) - 9,07 \times (-6,62) - 140 \times (-13,76)] = 20\text{kN}$$

4.2.4. Tác dụng của nhiệt độ và sự chế tạo không chính xác

4.2.4.1. Trường hợp tác dụng của nhiệt độ.

Trong chương 3, ta đã suy ra công thức tính vectơ tải trọng tương đương trong trường hợp tác dụng của nhiệt độ (công thức 3.64):

$$f^*_{td} = EA\alpha\Delta T\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Trong đó: α - hệ số giãn nở do nhiệt độ;

ΔT - độ biến thiên (tăng hoặc giảm) của nhiệt độ.

Công thức trên áp dụng cho kết cấu một chiều. Đối với giàn, nó chỉ áp dụng cho mỗi thanh giàn trong hệ tọa độ cục bộ.

Bây giờ, ta sẽ biểu thị (4.18) trong hệ tọa độ tổng thể. Áp dụng nguyên lý bảo toàn năng lượng, ta có:

$$\mathbf{U}'\mathbf{f}^*_{td} = \mathbf{q}'\mathbf{f}_{td} \quad (4.19)$$

Trong đó: **U'** - vectơ chuyển vị của thanh giàn trong hệ tọa độ cục bộ;

$\mathbf{f}^*_{td}$ - vectơ tải trọng tương đương trong hệ tọa độ cục bộ;

q - vectơ chuyển vị của thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể;

$\mathbf{f}_{td}$ - vectơ tải trọng tương đương trong hệ tọa độ tổng thể,

Theo (4.5) : $\mathbf{U} = \mathbf{Rq}$

Thay hệ thức trên vào (4.19).

$$\mathbf{q}'\mathbf{R}'\mathbf{f}^*_{td} = \mathbf{q}'\mathbf{f}_{td} \quad (4.20)$$

do đó: $$\mathbf{f}_{td} = \mathbf{R}'\mathbf{f}^*_{td} \quad (4.21)$$

Thay **R** từ (4.6) vào (4.21) và (4.18):

$$\mathbf{f}^*_{td} = E_e A_e \alpha.\Delta T\begin{bmatrix}-l\\-m\\l\\m\end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Vectơ tải trọng tương đương do nhiệt độ sẽ được ghép với các tải trọng khác để được vectơ tải trọng tổng thể **F**.

Sau khi xác định các thành phần chuyển vị, ta tính ứng suất.

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_0) \quad (4.23)$$

Kết hợp với công thức (4.13), ta có:

$$\sigma_i = \frac{E_i}{L_i}\begin{bmatrix}-l_i & -m_i & l_i & m_i\end{bmatrix}.q_i - E_i.\alpha.\Delta T \quad (4.24)$$

Trong đó: chỉ số i ứng với thanh giàn thứ i:

4.2.4.2. Trường hợp chế tạo không chính xác

Một thanh giàn chế tạo không chính xác có nghĩa là khi lắp ráp, thanh đó ngắn hơn hoặc dài hơn so với chiều dài quy định trong thiết kế. Để thanh có chiều dài quy định, ta kéo giãn nó ra hoặc dập co vào một đoạn Δ. Điều này tương đương với việc cho tác dụng lên thanh giàn độ biến thiên nhiệt độ.

$$\Delta T = \frac{\Delta}{\alpha_i . L_i} \qquad (4.25)$$

Vậy bài toán chế tạo không chính xác được đưa về bài toán tác dụng của nhiệt độ.

Ví dụ 4.2: Đầu đề giống ví dụ (4.1) nhưng ngoài tải trọng, còn có tác dụng của nhiệt độ. Độ biến thiên của nhiệt độ bằng 20^0, $\alpha = 10 \times 10^{-6}/^0C$.

Tính các thành phần chuyển vị;

Tính ứng suất trong các thanh giàn.

Giải:

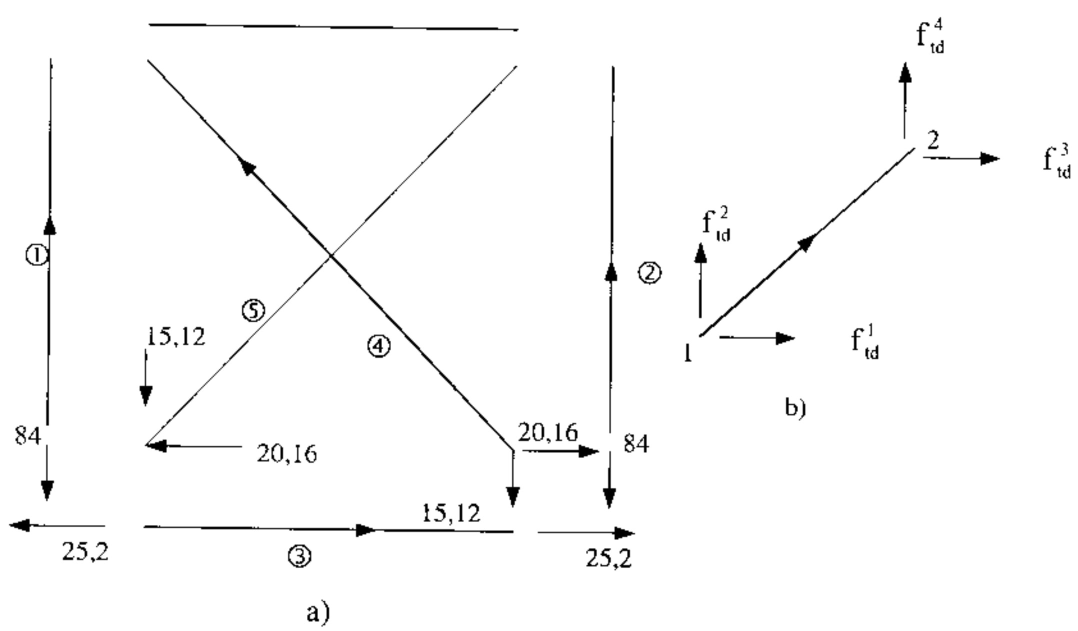
Ta áp dụng nguyên lý cộng tác dụng để giải bài toán này nghĩa là chuyển vị bằng tổng của chuyển vị đã tính trong ví dụ (4.1) (do tải trọng) và chuyển vị tính trong ví dụ 4.2 (do nhiệt độ). Đối với ứng suất, ta cũng làm tương tự.

Các số liệu ban đầu đã thống kê trong ví dụ (4.1). Đồng thời, ma trận độ cứng tổng thể **K** cũng đã tính trong ví dụ đó.

Bây giờ chỉ xét tác dụng của nhiệt độ. Áp dụng (4.22), ta có:

$$f_{cd}^{i} = E_i A_i . \alpha . \Delta T [-l_i \quad -m_i \quad l_i \quad m_i]'$$

Trong đó: chỉ số i áp dụng cho thanh giàn thứ i.



Hình 4.6: *Tải trọng tương đương do nhiệt độ*

Phần tử 1: $f_{td}^{1} = 210 \times 10 \times 10^{-6} \times 20 \times 2000 \times 0 = 0$

$f_{td}^{2} = 210 \times 10 \times 10^{-6} \times 20 \times 2000 \times (-1,0) = -8,4kN$

Phần tử 2: $f'_{td} = 0$

$f_{td}^{2} = 42 \times 10^{-3} \times 2000 \times (-1,0) = -84kN$

Phần tử 3: $f'_{td} = 42 \times 10^{-3} \times 600 \times (-1) = -25,2kN$

$f_{td}^{2} = 0$

$f_{td}^{3} = 25,2kN$

$f_{td}^{4} = 0$

Phần tử 4: $f_{td}^{1} = 42 \times 10^{-3} \times 600 \times (0,8) = 20,16$

$f_{td}^{2} = 42 \times 10^{-3} \times 600 \times (-0,6) = -15,12$

Phần tử 5: $f_{td}^{1} = 42 \times 10^{-3} \times 600 \times (-0,8) = -20,16$

$f_{td}^{2} = 42 \times 10^{-3} \times 600 \times (-0,6) = -15,12$

Trong đó: 1, 2, 3, 4 là số thứ tự các bậc tự do ở 2 đầu thanh trong hệ tọa độ tổng thể (hình 4.6b). Các tải trọng tương đương ghi trên hình (4.6a).

Ghép các tải trọng tương đương trên phương các bậc tự do tổng thể:

$F_1 = -20,16 - 25,20 = -45,36kN$

$F_2 = -84 - 25,12 = -99,12kN$

$F_3 = 25,20 + 20,16 = 45,36kN$

$F_4 = -84 - 15,12 = -99,12kN$

Hệ phương trình cân bằng tổng thể có dạng:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & \mathbf{K} & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -45,36 \\ -99,12 \\ 45,36 \\ -99,12 \end{bmatrix}$$

Trong đó: **K** tính theo (4.16)

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị do nhiệt độ:

$$\mathbf{Q}^{n} = [-0,4775 \quad -0,6262 \quad -0,4775 \quad -0,6262]' \text{ mm}$$

Tổng chuyển vị do tải trọng và do nhiệt độ:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{t} + \mathbf{Q}^{n}$$

$\mathbf{Q}^{t}$ đã tính trong mục c ví dụ (4.1).

Tính ứng suất

Ứng suất do nhiệt độ tính theo (4.24).

$$\sigma_i^n = \frac{E_i}{L_i}\left[(q_3 - q_1)l_i + (q_4 - q_2)m_i - E\alpha\Delta T\right]$$

Phần tử 1: $\sigma_1^n = \frac{210}{3000}\left[0 + 0,6262 \times 1,0\right] - 210 \times 10 \times 10^{-6} \times 20$

$= 1,834 \times 10^{-2} kN/mm^2$

Phần tử 2: $\sigma_2^n = \frac{210}{3000}\left[0 + 0,6262 \times 1,0\right] - 210 \times 10 \times 10^{-6} \times 20$

$= 4,34 \times 10^{-2} kN/mm^2$

Phần tử 3: $\sigma_3^n = \frac{210}{4000}\left[(-0,475 + 0,4775) \times 1,0 + 0\right] - 210 \times 10 \times 10^{-6} \times 20$

$= -4,187 \times 10^{-2} kN/mm^2$

Phần tử 4: $\sigma_4^n = \frac{210}{5000}\left[0,4775 \times (-0,8) + 0,6262 \times (0,6)\right] - 210 \times 10 \times 10^{-6} \times 20$

$= -4,226 \times 10^{-2} kN/mm^2$

Phần tử 5: $\sigma_5^n = \frac{210}{5000}\left[0,4775 \times (0,8) + 0,6262 \times (0,6)\right] - 210 \times 10 \times 10^{-6} \times 20$

$= -1,018 \times 10^{-2} kN/mm^2$

Tổng ứng suất pháp do tải trọng và do nhiệt độ là tổng của ứng suất pháp tính trong mục d) của ví dụ (4.1) và ứng suất pháp vừa tính trên.

§4.3. GIÀN KHÔNG GIAN

4.3.1. Ma trận độ cứng của thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể

Giàn không gian là một kết cấu trong đó các thanh giàn và tải trọng không cùng nằm trong một mặt phẳng. Giàn không gian còn gọi là *giàn 3 chiều.*

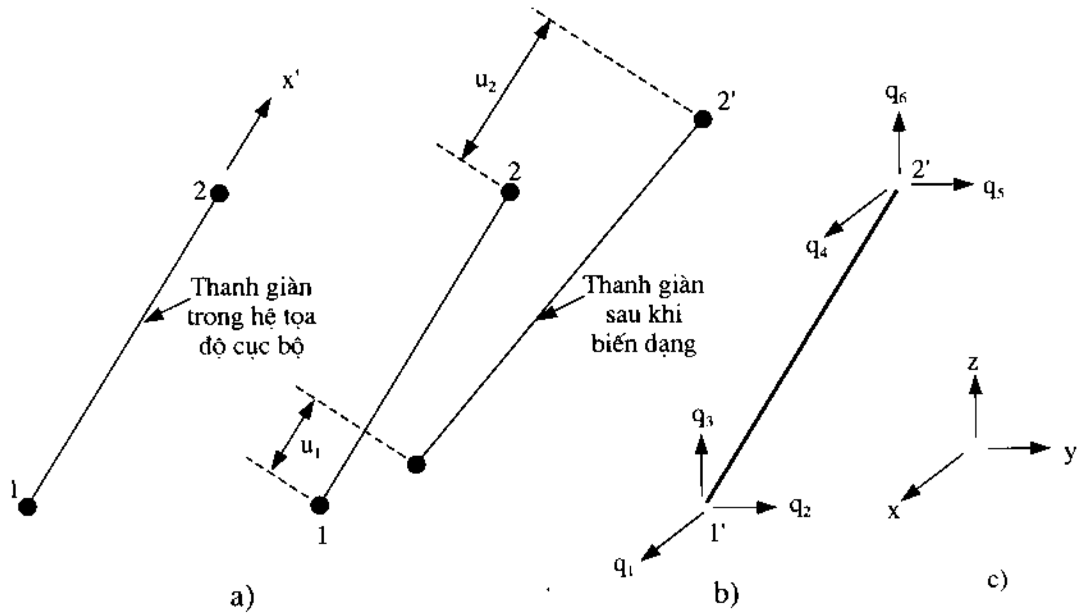
Giống như giàn phẳng, mỗi thanh giàn làm việc như kết cấu 1 chiều. Vì vậy, cần có 2 hệ trục tọa độ: hệ tọa độ cục bộ x' trùng với trục của thanh giàn (hình 4.7a), chiều dương của trục x' đi từ đầu 1 đến đầu 2; hệ trục tọa độ x, y, z biểu thị trên hình 4.7b, 4.7c.

Vectơ chuyển vị của mỗi thanh giàn trong hệ tọa độ cục bộ (hình 4.7a) là:

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2]' \tag{4.26}$$

Vectơ chuyển vị ở 2 đầu thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể là (hình 4.7b):

$$\mathbf{q} = [q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5\ q_6]' \tag{4.27}$$



Hình 4.7

Tương tự như trong §4.2, hệ thức giữa **u** và **q** như sau:

$$u_1 = q_1 l + q_2 m + q_3 n$$

$$u_2 = q_4 l + q_5 m + q_6 n$$

Dưới dạng ma trận

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}.\mathbf{q} \tag{4.28}$$

Trong đó:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} l & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & n \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

R gọi là trận xoay hoặc ma trận biến đổi.

Trong đó: l, m, n là các côsin định hướng của trục x' đối với các trục x, y, z.

Ma trận độ cứng của mỗi thanh giàn trong hệ tọa độ cục bộ tính theo công thức (4.9).

$$\mathbf{k}_e = \frac{A_e E_e}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

Áp dụng công thức (1.43), ta có ma trận độ cứng của mỗi thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{R'}.\mathbf{k}_e.\mathbf{R} \tag{4.31a}$$

Căn cứ vào (4.29) và (4.30), sau khi thực hiện các phép nhân ma trận trong (4.31a), ta được:

$$\mathbf{k}_e = \frac{E_e A_e}{L_e}\begin{bmatrix} l^2 & lm & ln & -l^2 & -lm & -lm \\ lm & m^2 & mn & -lm & -m^2 & -m.n \\ ln & mn & n^2 & -ln & -mn & -n^2 \\ -l^2 & -lm & -ln & l^2 & lm & ln \\ -lm & -m^2 & -mn & lm & m^2 & mn \\ -ln & -mn & n^2 & ln & mn & n^2 \end{bmatrix} \qquad (4.31)$$

Các côsin định hướng tính như sau:

$$l = \frac{x_2 - x_1}{L_e} \qquad m = \frac{y_2 - y_1}{L_e} \qquad n = \frac{z_2 - z_1}{L_e} \qquad (4.32)$$

Chiều dài của thanh giàn:

$$L_e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (4.33)$$

Công việc tiếp theo là ghép các ma trận độ cứng của các thanh giàn và ghép các vectơ tải trọng để có hệ phương trình cân bằng tổng thể:

$$\mathbf{KQ} = \mathbf{F}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành chuyển vị.

4.3.2. Ứng suất pháp

Ứng suất pháp trong thanh giàn có thể viết:

$$\sigma_i = \frac{E_i}{L_i}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad (4.34a)$$

theo (4.28):

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{R}.\mathbf{q} \qquad (a)$$

Trong đó:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} l & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & n \end{bmatrix} \qquad (b)$$

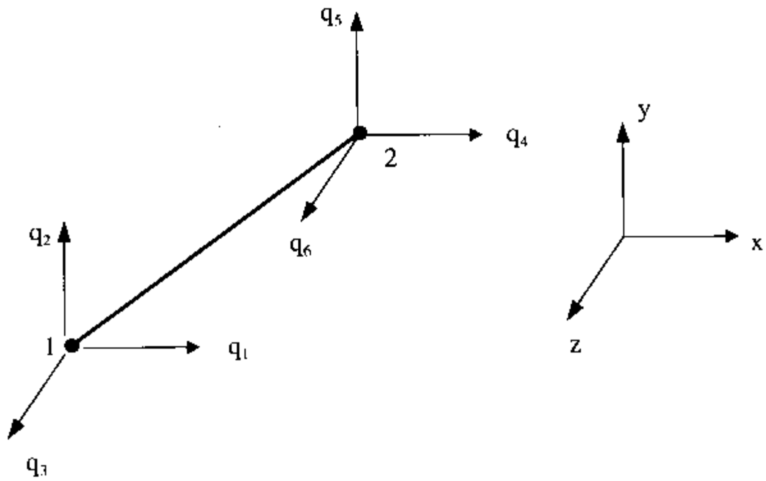
Thay (a) và (b) vào (4.34a), ta được;

$$\sigma_i = \frac{E_i}{L_i}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & n \end{bmatrix}.\mathbf{q}$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận:

$$\sigma_i = \frac{E_i}{L_i}\begin{bmatrix} -l & -m & -n & l & m & n \end{bmatrix}\mathbf{q} \qquad (4.34)$$

q là vectơ chuyển vị tại 2 đầu thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể (hình 4.8).



Hình 4.8: Các thành phần chuyển vị tại 2 đầu thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể

4.3.3. Trường hợp tác dụng của nhiệt độ và chế tạo không chính xác

Tương tự như trong (4.22, ta có vectơ tải trọng tương đương do nhiệt độ):

$$f_{td}^{e} = E_e A_e \alpha.\Delta T.\begin{bmatrix} -l_e & -m_e & n_e & l_e & m_e & n_e \end{bmatrix}' \qquad (4.35)$$

Ứng suất do nhiệt độ:

$$\sigma_i = \frac{E_i}{L_i}\begin{bmatrix} -l_i & -m_i & -n_i & l_i & m_i & n_i \end{bmatrix}.\mathbf{q}_i - E_i \alpha \Delta T \qquad (4.36)$$

Trong đó: **q** tính theo (4.27).

Trường hợp chế tạo không chính xác

Ta đưa về trường hợp tác dụng của nhiệt độ bằng cách áp dụng công thức sau:

$$\Delta T = \frac{\Delta}{\alpha_i L_i} \qquad (4.37)$$

Trong đó: Δ là độ dài hơn hoặc độ ngắn hơn so với chiều dài thiết kế của một thanh giàn trong quá trình chế tạo.

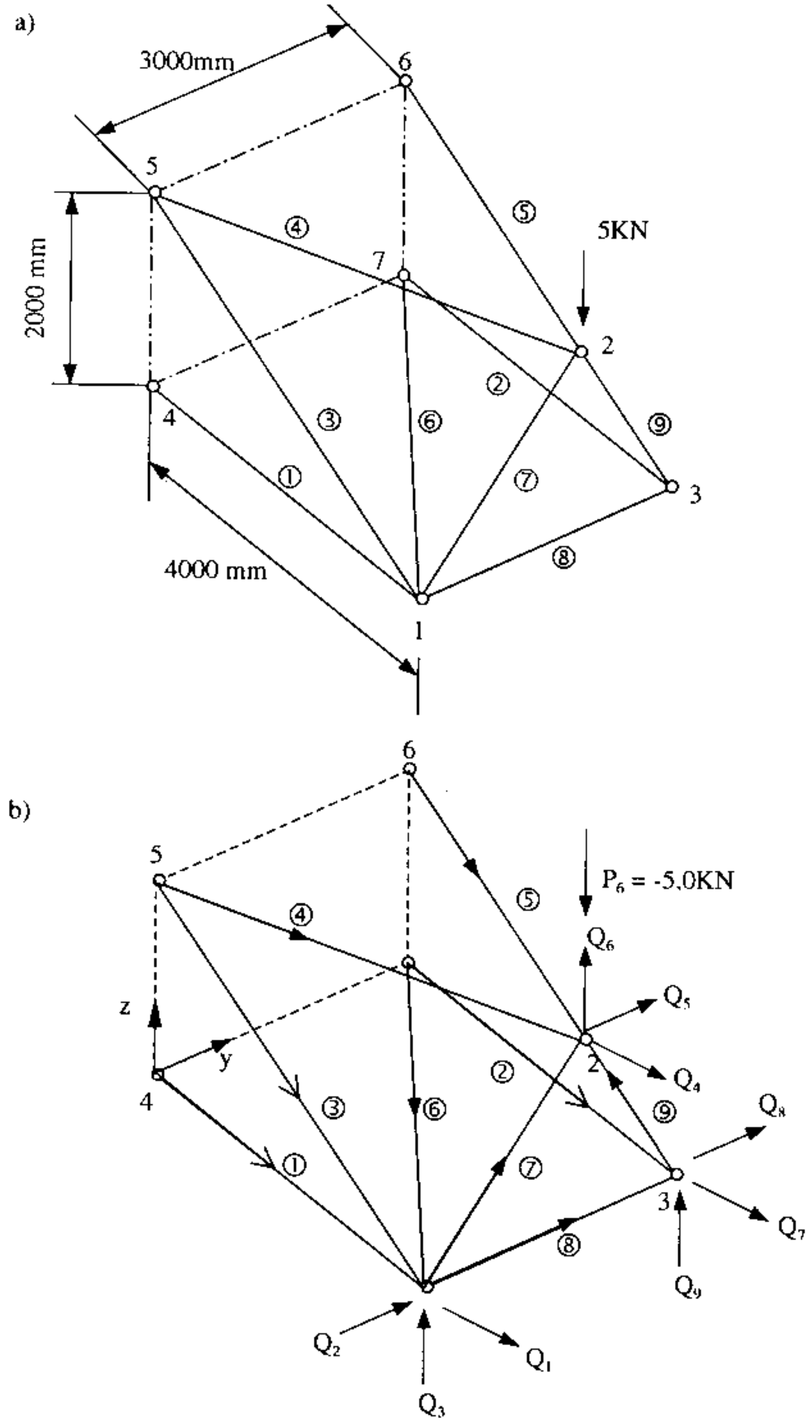
Ví dụ 4.3:

Cho 1 giàn không gian như trên hình (4.9a). $E = 210kN/mm^2$

Xác định ma trận độ cứng tổng thể của toàn hệ;

Tính các thành phần chuyển vị;

Tính lực dọc trong các thanh giàn.



Hình 4.9

Giải:

Số thứ tự các nút và các thanh giàn (được khoanh tròn) biểu thị trên hình (4.9a). Có tất cả 7 nút và 9 thanh. Chiều dương của trục x' biểu thị bằng các mũi tên. Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau:

Tọa độ các nút

Nút	x	y	z
1	4000	0	0
2	4000	1500	2000
3	4000	3000	0
4	0	0	0
5	0	0	2000
6	0	3000	2000
7	0	3000	0

Số thự tự bậc tự do tại các nút

Nút	u	v	w
1	1	2	3
2	4	5	6
3	7	8	9
4	0	0	0
5	0	0	0
6	0	0	0
7	0	0	0

Số thứ tự các bậc tự do tại đầu 1 và đầu 2 của thanh giàn

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2	Phần tử	Đầu 1	Đầu 2
1	4	1	5	6	2
2	7	3	6	7	1
3	5	1	7	1	2
4	5	2	8	1	3
			9	3	2

Đặc trưng hình học và cơ học của các thanh giàn

Phần tử	$(x_2 - x_1)$	$(y_2 - y_1)$	$(z_2 - z_1)$	L	l	m	n	AE/L
1	4000	0	0	4000	1,0	0	0	4,5
2	4000	0	0	4000	1,0	0	0	4,5
3	4000	0	-2000	4472	0,8944	0	-0,4472	4,025
4	4000	1500	0	4272	0,9363	0,3511	0	4,214
5	4000	-1500	0	4272	0,9363	-0,3511	0	4,214
6	4000	-3000	0	5000	0,8	-0,6	0	3,6
7	0	1500	2000	2500	0	0,6	0,8	7,2
8	0	3000	0	3000	0	1,0	0	6,0
9	0	-1500	2000	2500	0	-0,6	0,8	7,2

a) Theo (4.31), xác định các ma trận độ cứng của mỗi thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể.

Thanh số 1:

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} & \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ \mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 4,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Thanh số 2:

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} 7 & 8 & 9 \end{array} & \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 4,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \end{array}$$

Thanh số 3:

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} & \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ \mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} 3,22 & 0 & -1,61 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1,61 & 0 & 0,81 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Thanh số 4:

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} 4 & 5 & 6 \end{array} & \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ \mathbf{k}_4 = \begin{bmatrix} 3,69 & 1,39 & 0 \\ 1,39 & 0,52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}$$

Thanh số 5:

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} 4 & 5 & 6 \end{array} & \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ \mathbf{k}_5 = \begin{bmatrix} 3,69 & -1,39 & 0 \\ -1,39 & 0,52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}$$

Thanh số 6:

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} & \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ \mathbf{k}_6 = \begin{bmatrix} 2,30 & -1,73 & 0 \\ -1,73 & 1,30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Thanh số 7:

$$
\mathbf{k}_7 = \begin{array}{cl}
\begin{matrix} 1 & \quad 2 & \quad 3 & \quad 4 & \quad 5 & \quad 6 \end{matrix} & \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2,59 & 3,46 & 0 & -2,59 & -3,46 \\
0 & 3,46 & 4,61 & 0 & -3,46 & -4,61 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -2,59 & -3,46 & 0 & 2,59 & 3,46 \\
0 & -3,46 & -4,61 & 0 & 3,46 & 4,61
\end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}
\end{array}
$$

Thanh số 8:

$$
\mathbf{k}_8 = \begin{array}{cl}
\begin{matrix} 1 & \quad 2 & \quad 3 & \quad 7 & \quad 8 & \quad 9 \end{matrix} & \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 6,0 & 0 & 0 & -6,0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -6,0 & 0 & 0 & -6,0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}
\end{array}
$$

Thanh số 9:

$$
\mathbf{k}_9 = \begin{array}{cl}
\begin{matrix} 7 & \quad 8 & \quad 9 & \quad 4 & \quad 5 & \quad 6 \end{matrix} & \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2,59 & -3,46 & 0 & -2,59 & 3,46 \\
0 & -3,46 & 4,61 & 0 & 3,46 & -4,61 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -2,59 & 3,46 & 0 & 2,59 & -3,46 \\
0 & 3,46 & -4,61 & 0 & -3,46 & 4,61
\end{bmatrix} & \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}
\end{array}
$$

Sau khi ghép các ma trận trên, ta được ma trận độ cứng tổng thể của toàn hệ:

$$
\mathbf{K} = \begin{pmatrix}
\begin{array}{c}4{,}5\\3{,}22\\\underline{2{,}30}\\10{,}02\end{array} & -1{,}73 & -1{,}61 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \begin{array}{c}2{,}59\\6{,}0\\\underline{1{,}30}\\9{,}89\end{array} & 3{,}46 & 0 & -2{,}59 & -3{,}46 & 0 & -6{,}0 & 0 \\
 & & \begin{array}{c}0{,}81\\\underline{4{,}61}\\5{,}42\end{array} & 0 & -3{,}46 & -4{,}61 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \begin{array}{c}3{,}69\\\underline{3{,}69}\\7{,}38\end{array} & \begin{array}{c}-1{,}39\\\underline{1{,}39}\\0\end{array} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \begin{array}{c}0{,}52\\0{,}52\\2{,}59\\\underline{2{,}59}\\6{,}22\end{array} & \begin{array}{c}3{,}46\\\underline{-3{,}46}\\0\end{array} & 0 & -2{,}59 & 3{,}46 \\
 & & & & & \begin{array}{c}4{,}61\\\underline{4{,}61}\\9{,}22\end{array} & 0 & 3{,}46 & -4{,}61 \\
 & \text{Đối xứng} & & & & & 4{,}5 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \begin{array}{c}6{,}0\\\underline{2{,}59}\\8{,}59\end{array} & -3{,}46 \\
 & & & & & & & & 4{,}61
\end{pmatrix}
$$

b) Ta có hệ phương trình cân bằng tổng thể như sau:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & \mathbf{K} & \\ & & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5{,}0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị:

$$[Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6 \quad Q_7 \quad Q_8 \quad Q_9]' =$$

$$= [-3{,}3508 \quad -7{,}4646 \quad -1{,}2833 \quad 0 \quad 3{,}7569 \quad -2{,}234 \quad 0 \quad -7{,}4775 \quad -3{,}0772]\text{mm}$$

Ở trên, ta đã dùng phương pháp loại trừ để khử các hàng và cột của ma trận K ứng với các bậc tự do tại các nút không có chuyển vị 4, 5, 6, 7 (hình 4.9).

c) Tính lực dọc theo (4.34)

$$Ld_i = \sigma_i A_i = \frac{A_i E_i}{L_i}\left[(q_4 - q_1)l + (q_5 - q_2)m + (q_6 - q_3)n\right]$$

Phần tử 1: $Ld_1 = 4{,}5 \times [1{,}0 \times (-3{,}3508) + 0] = -15{,}08\text{kN}$

Phần tử 2: $Ld_2 = 4{,}5 \times [1{,}0 \times 0] = 0\text{kN}$

Phần tử 3: $Ld_3 = 4{,}025 \times [0{,}8944 \times (-3{,}3508) + 0 - 0{,}4472 \times (-1{,}2833)]$

$= -9{,}75\text{kN}$

Phần tử 4: $Ld_4 = 4{,}214 \times [0{,}9362 \times 0 + 0{,}3511 \times 3{,}7569 + 0] = -5{,}56\text{kN}$

Phần tử 5: $Ld_5 = 4{,}214 \times [0{,}9363 \times 0 - 0{,}3511 \times 3{,}7569 + 0] = -5{,}56\text{kN}$

Phần tử 6: $Ld_6 = 3{,}6 \times [0{,}8 \times (-3{,}3508) - 0{,}6 \times (-7{,}4646) + 0] = 6{,}76\text{kN}$

Phần tử 7:

$Ld_7 = 7{,}2 \times [0 - 0{,}6 \times (-7{,}4646 - 0{,}8 \times (-1{,}2833) + 0 + 0{,}6 \times 3{,}7569 + 0{,}8 \times (-2{,}234)]$

$= 43{,}00\text{kN}$

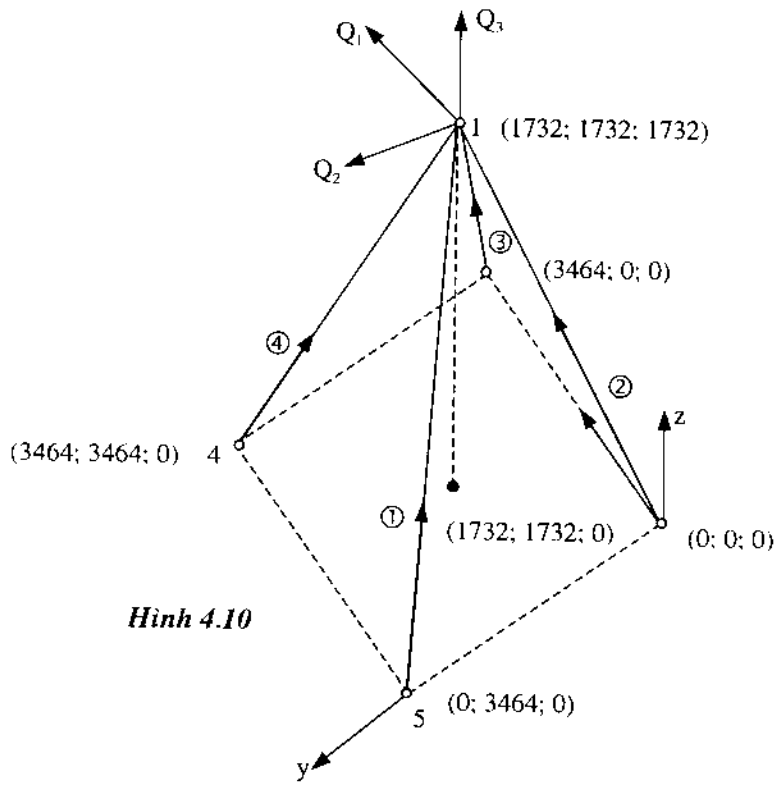
Phần tử 8: $Ld_8 = 6{,}0 \times [0 - 1{,}0 \times (-7{,}4646) + 0 + 0 + 1{,}0 \times (-7{,}4775) + 0] = -0{,}08\text{ kN}$

Phần tử 9:

$Ld_9 = 7{,}2 \times [0 + 0{,}6 \times (-7{,}4775) - 0{,}8 \times (-3{,}0772) + 0 - 0{,}6 \times 3{,}7569 + 0{,}8 \times (-2{,}234)]$

$= -43{,}68\text{kN}$

Ví dụ 4.4: Cho 1 giàn không gian như trên hình (4.10).



Hình 4.10

Thanh 1 - 5 dài hơn chiều dài quy định 0,1%. $E = 210kN/mm^2$, chiều dài mỗi thanh $L = 3000mm$, diện tích tiết diện $A = 230mm^2$, hệ số giãn nở do nhiệt độ $10 \times 10^{-6}/^{o}C$.

Xác định ma trận độ cứng tổng thể;

Tính chuyển vị;

Tính ứng suất.

Giải:

Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau:

Tọa độ nút

Nút	x	y	z
1	1732	1732	1732
2	0	0	0
3	3464	0	0
4	3464	3464	0
5	0	3464	0

Bậc tự do

Nút	u	v	w
1	d_1	d_2	d_3
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	0	0

Số thứ tự bậc tự do tại 2 đầu thanh

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2
1	5	1
2	2	1
3	3	1
4	4	1

Tính các côsin định hướng theo (4.32):

Phần tử 1: $$l_1 = \frac{1732-0}{3000} = 0{,}5773$$

$$m_1 = \frac{1732-3464}{3000} = -0{,}5773$$

$$n_1 = \frac{1732-0}{3000} = 0{,}5773$$

Phần tử 2: $$l_2 = \frac{1732-0}{3000} = 0{,}5773$$

$$m_2 = \frac{1732-0}{3000} = 0{,}5773$$

$$m_3 = \frac{1732-0}{3000} = 0{,}5773$$

Phần tử 3: $$l_3 = \frac{1732-3464}{3000} = -0{,}5773$$

$$m_3 = \frac{1732-0}{3000} = 0{,}5773$$

$$n_3 = \frac{1732-0}{3000} = 0{,}5773$$

Phần tử 4: $$l_4 = \frac{1732-3464}{3000} = -0{,}5773$$

$$m_4 = \frac{1732-3464}{3000} = -0{,}5773$$

$$n_4 = \frac{1732-0}{3000} = 0{,}5773$$

a) Xác định ma trận độ cứng của thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể. Áp dụng công thức (4.31) và dùng phương pháp loại trừ để khử các hàng và cột của ma trận ứng với các bậc tự do ở các nút cố định 2, 3, 4, 5.

Phần tử 1:

$$\mathbf{k}_1 = \frac{EA}{L}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0{,}5773^2 & -(0{,}5773)^2 & 0{,}5773^2 \\ & (0{,}5773)^2 & -0{,}5773^2 \\ \text{đối xứng} & & 0{,}5773^2 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Phần tử 2:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \mathbf{k}_2 = \dfrac{EA}{L} & \begin{bmatrix} 0,5773^2 & 0,5773^2 & 0,5773^2 \\ & 0,5773^2 & 0,5773^2 \\ \text{đối xứng} & & 0,5773^2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Phần tử 3:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \mathbf{k}_3 = \dfrac{EA}{L} & \begin{bmatrix} 0,5773^2 & -0,5773^2 & -0,5773^2 \\ & 0,5773^2 & 0,5773^2 \\ \text{dx} & & 0,5773^2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Phần tử 4:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \mathbf{k}_4 = \dfrac{EA}{L} & \begin{bmatrix} 0,5773^2 & 0,5773^2 & -0,5773^2 \\ & 0,5773^2 & -0,5773^2 \\ \text{đối xứng} & & 0,5773^2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Sau khi ghép các ma trận trên, ta được ma trận độ cứng tổng thể:

$$\mathbf{K} = 16,1 \times \begin{bmatrix} 4 \times 0,3333 & 0 & 0 \\ 0 & 4 \times 0,3333 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \times 0,3333 \end{bmatrix}$$

Cuối cùng:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 21,4645 & 0 & 0 \\ & 21,4645 & 0 \\ \text{đối xứng} & & 21,4645 \end{bmatrix}$$

b) Tính chuyển vị

Tính độ biến thiên nhiệt độ tương đương theo (4.37)

$$\Delta T = \frac{\Delta}{\alpha_i L_i} = \frac{3000}{1000 \times 10 \times 10^{-6} \times 3000} = 100^0 C$$

Tính vectơ tải trọng tương đương do nhiệt độ gây ra theo (4.35).

$$\mathbf{f}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{td}} = E_i.A_i\alpha.\Delta T\begin{bmatrix} -l_i & -m_i & -n_i & l_i & m_i & n_i \end{bmatrix}$$

Chỉ có phần tử 1 chế tạo không chính xác nên i = 1.

Các thành phần tải trọng tương đương men theo các bậc tự do 1, 2, 3 (hình 4.10):

$$F_1 = 210 \times 231 \times 10 \times 10^{-6} \times 100 \times 0,5773 = 28kN$$

$$F_2 = 210 \times 231 \times 10 \times 10^{6} \times 100 \times (-0,5773) = -28kN$$

$$F_3 = 210 \times 231 \times 10 \times 10^{-6} \times 100 \times 0,5773 = 28kN$$

Kết hợp ma trận **K** đã cho và vectơ tải trọng vừa tính ở trên, ta được hệ phương trình cân bằng tổng thể:

$$\begin{bmatrix} 21,46 & 0 & 0 \\ 0 & 21,46 & 0 \\ 0 & 0 & 21,46 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ -28 \\ 28 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị:

$$Q_1 = \frac{28}{21,46} = 1,30mm$$

$$Q_2 = -\frac{28}{21,46} = -1,30mm$$

$$Q_1 = \frac{28}{21,46} = 1,30mm$$

b) Tính ứng suất theo (4.36)

$$\sigma_i = \frac{E_i}{L_i}\left[(q_4 - q_1)l_i + (q_5 - q_2)m_i + (q_6 - q_3)n_i\right] - E_i.\alpha.\Delta T$$

Phần tử 1:

$$\sigma_1 = \frac{210}{3000}\left[(1,30 - 0)\times 0,577 + (-1,30)\times(-0,5773) + (1,30)\times 0,577\right]$$
$$-210\times 10\times 10^{-6}\times 100 = -0,0525\ kN/mm^2$$

Phần tử 2:

$$\sigma_2 = \frac{210}{3000}\left[(1,30 - 0)\times 0,5773 + (-1,30)\times 0,5773 + 1,30\times 0,577\right]$$
$$-0,21 = -0,1575\ kN/mm^2$$

Phần tử 3:

$$\sigma_3 = \frac{210}{3000}\left[(1,30)\times(-0,5773) + (-1,30)\times 0,5773 + (1,30)\times 0,5773\right]$$
$$-0,21 = -0,0625\ kN/mm^2$$

Phần tử 4:

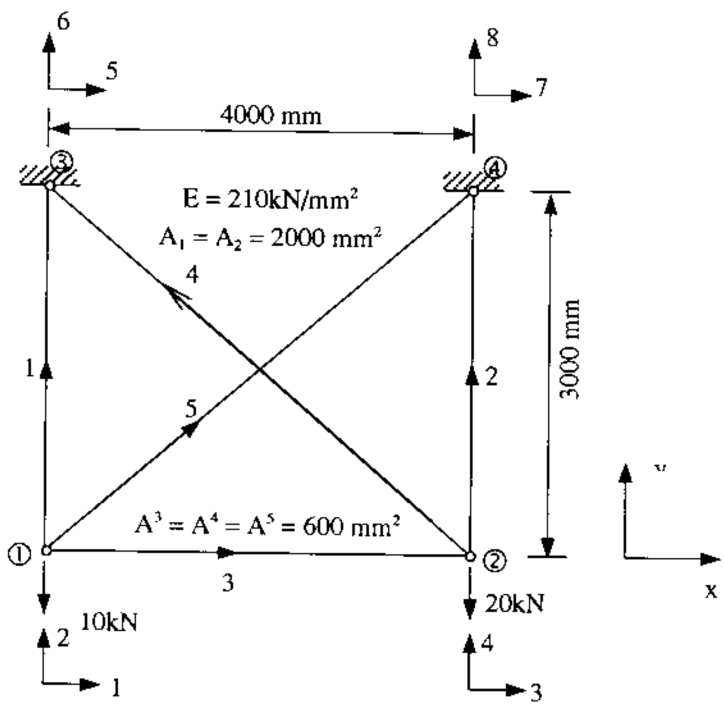
$$\sigma_4 = \frac{210}{3000}\left[(1,30)\times(-0,5773)+(-1,30)\times(-0,5773)+(1,30)\times 0,5773\right]$$
$$-0,21 = -0,1575\ \text{kN/mm}^2$$

§4.4. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TÍNH GIÀN PHẲNG (CTR4)

Trong chương trình này, xét trường hợp tổng quát: tác dụng của tải trọng và tác dụng của nhiệt độ.

1) Những điều cần phải tuân thủ (lấy thí dụ trong hình 4.11)

- Số thứ tự các nút nên xếp theo dãy số tự nhiên (1, 2, 3, ...). Chẳng hạn, trong thí dụ này, có 4 nút 1, 2, 3, 4.
- Số thứ tự các thanh cũng làm như trên.
- Số thứ tự các bậc tự do nên xếp theo dãy số tự nhiên.



Hình 4.11

Theo nguyên tắc chung, số thứ tự bậc tự do tại nút i, xác định như sau:

Trên phương y : 2i

Trên phương x : 2i - 1

Số thứ tự bậc tự do không có chuyển vị nên xếp ở cuối để tiện cho việc chia khối ma trận khi dùng phương pháp loại trừ.

Trong mỗi thanh giàn, số thứ tự BTD của đầu 1 nên bé hơn so với đầu 2. Trong thí dụ này, số thứ tự các BTD là: 1, 2, 3, ..., 7, 8. Trong đó: 5, 6, 7, 8 là số thứ tự các BTD không có chuyển vị. Sắp xếp số thứ tự như trên sẽ tạo điều kiện thuận lợi cho việc chia khối ma trận nhằm tính chuyển vị và phản lực tại các gối tựa không có chuyển vị.

2) Nhập các số liệu ban đầu theo các bảng sau:

Số thanh: 4

Số BTD có chuyển vị: 4

Tổng số BTD: 8

Các thành phần tải trọng: 0; -10; 0; -20

Phần tử	Tọa độ (mm)				Diện tích (mm^2)	Môđun đàn hồi (kN/m^2)	Hệ số giãn nở	Số gia nhiệt độ
	x_1	x_2	x_3	x_4				
1	0	0	0	3000	2000	210	0	0
2	4000	4000	0	3000	2000	210	0	0
3	0	4000	0	0	600	210	0	0
4	4000	0	0	3000	600	210	0	0
5	0	4000	0	3000	600	210	0	0

Phần tử	Số bậc tự do			
	d_1	d_2	d_3	d_4
1	1	2	5	6
2	3	4	7	8
3	1	2	3	4
4	3	4	5	6
5	1	2	7	8

3) Ghép các ma trận độ cứng riêng vào ma trận độ cứng tổng thể theo (4.10)

4) Giải hệ phương trình **Q** = **F** để được giá trị các thành phần chuyển vị.

5) Tính ứng suất theo (4.13)

6) Tính phản lực theo sơ đồ chia khối ma trận theo (4.15) và (4.17)

§ 4.5. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TÍNH GIÀN KHÔNG GIAN (CTR 5)

Trong chương trình này, xét trường hợp tổng quát: tác dụng của tải trọng và tác dụng của nhiệt độ.

1) Những điều cần phải tuân thủ

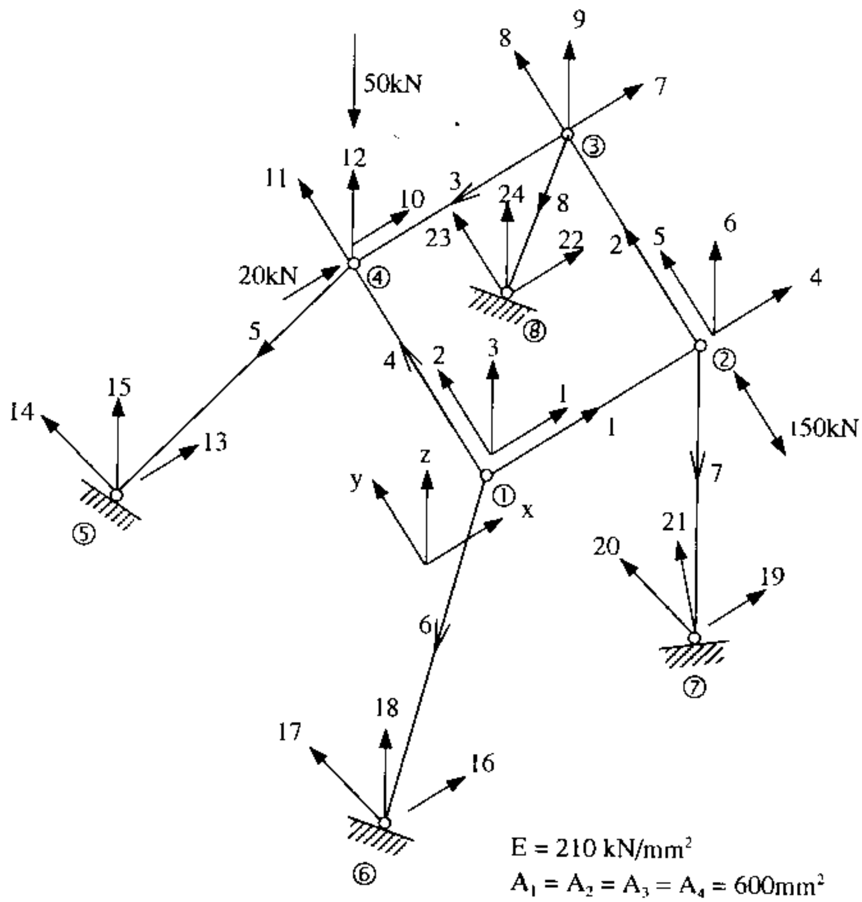
Giống như đã trình bày trong §4.4. Tuy nhiên, mỗi nút có 3 BTD. Số thứ tự các BTD tại nút i, xác định như sau:

Trên phương x : 3i - 2

Trên phương y : 3i - 1

Trên phương z : 3i

Trong ví dụ trên hình (4.12), ta có tất cả 24 BTD trong đó có 12 BTD có chuyển vị và 12 BTD không có chuyển vị, chúng được xếp thứ tự theo dãy số tự nhiên.



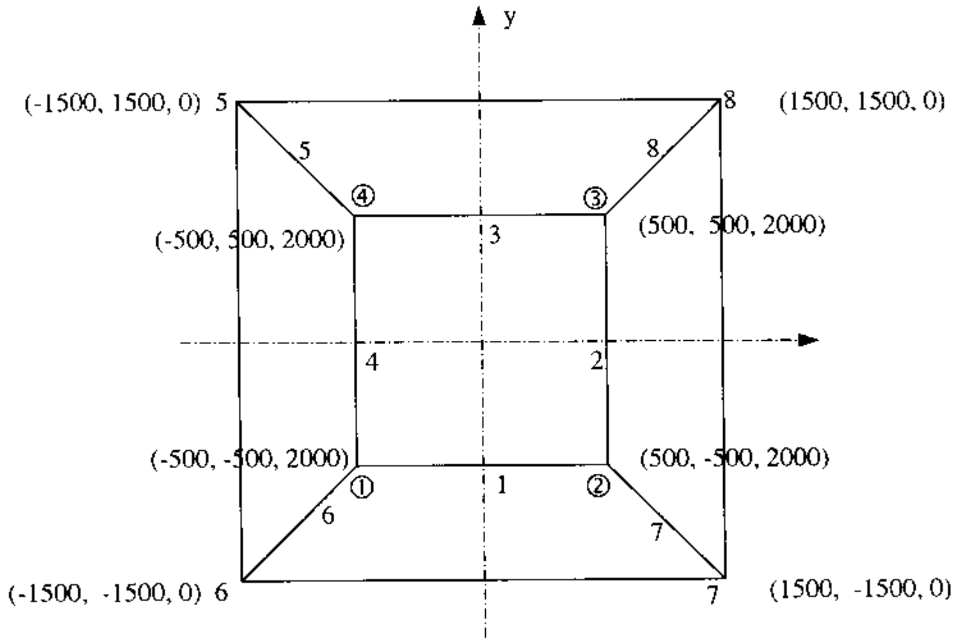
$E = 210\ kN/mm^2$

$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 600mm^2$

$A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = 2400mm^2$

Số thứ tự các nút: khoanh tròn

Số thứ tự các thanh: không khoanh tròn



Hình 4.12

2) Nhập các số liệu ban đầu theo các bảng sau (lấy thí dụ trên hình 4.12)

Số thanh: 8

Số BTD có chuyển vị: 12

Tổng số BTD: 24

Phần tử	Tọa độ (mm)						Diện tích (mm^2)	Môđun đàn hồi (kN/m^2)	Hệ số giãn nở	Số gia nhiệt độ
	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2				
1	-500	-500	2000	500	-500	2000	600	210	0	0
2	500	-500	2000	500	500	2000	600	210	0	0
3	500	500	2000	-500	500	2000	600	210	0	0
4	-500	-500	2000	-500	500	2000	600	210	0	0
5	-500	500	2000	-1500	1500	0	2400	210	0	0
6	-500	-500	2000	-1500	-1500	0				
7	500	-500	2000	1500	-1500	0				
8	500	500	2000	1500	1500	0				

Phần tử	Số bậc tự do					
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
1	1	2	3	4	5	6
2	4	5	6	7	8	9
3	7	8	9	10	11	12
4	1	2	3	10	11	12
5	10	11	12	13	14	15
6	1	2	3	16	17	18
7	4	5	6	19	20	21
8	7	8	9	22	23	24

3) Ghép các ma trận độ cứng riêng vào ma trận độ cứng tổng thể theo (4.31).

4) Giải hệ phương trình cân bằng theo phương pháp Gauss

5) Tính ứng suất theo (4.36)

6) Tính phản lực theo phương pháp loại trừ và sơ đồ chia khối ma trận (như trong thí dụ 4.1).

§4.6. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TÍNH GIÀN CHỊU TÁC DỤNG CỦA NHIỆT ĐỘ VÀ GIÀN CHẾ TẠO KHÔNG CHÍNH XÁC (CTR6, CTR7)

Thuật toán ở đây giống CTR4 và CTR5. Chỉ khác là cần thống kê thêm các số liệu về hệ số giãn nở và số gia nhiệt độ thực tế hoặc số gia nhiệt độ tương đương khi giàn chế tạo không chính xác.

Các thành phần tải trọng tính theo (4.35) và (4.37).

Chương 5

BÀI TOÁN HAI CHIỀU DÙNG TAM GIÁC BIẾN DẠNG KHÔNG ĐỔI

§5.1. ĐẶC ĐIỂM BÀI TOÁN HAI CHIỀU

Trong bài toán hai chiều, chuyển vị, biến dạng, ứng suất, lực thể tích, lực biên là những hàm của hai biến x và y.

Vectơ chuyển vị u có dạng:

$$\mathbf{U} = [u \quad v]' \tag{5.1}$$

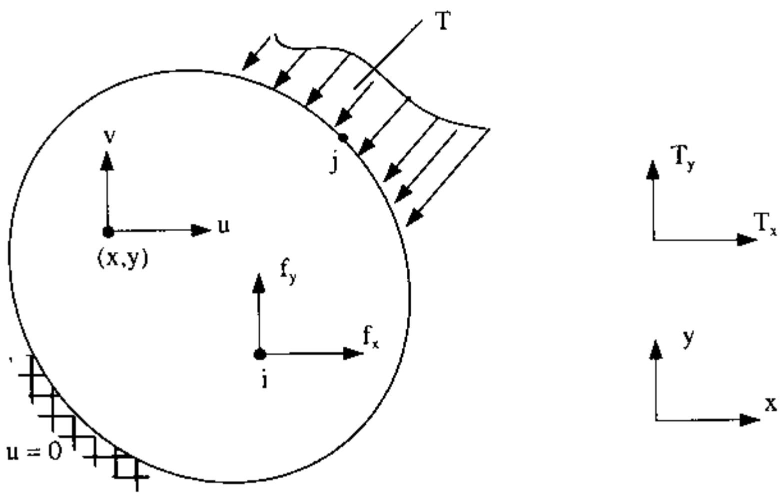
Trong đó: u - thành phần chuyển vị song song với trục x;

v - thành phần chuyển vị song song với trục y.

Ứng suất và biến dạng:

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\right]' \tag{5.2}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\right]' \tag{5.3}$$



Hình 5.1. Kết cấu 2 chiều

Hình 5.1 biểu thị kết cấu hai chiều một cách khái quát, trong đó vectơ lực thể tích **f**, vectơ lực biên **T** và phân tố thể tích dV như sau:

$$\mathbf{f} = \left[f_x \quad f_y\right]' \qquad \mathbf{T} = \left[T_x \quad T_y\right]' \qquad dV = hdA \tag{5.4}$$

Trong đó: h - bề dày của kết cấu hai chiều trên phương z;

fx, fy - các lực thể tích trên đơn vị thể tích trên các phương x, y;

Tx, Ty - các lực biên trên đơn vị diện tích trên các phương x và y;

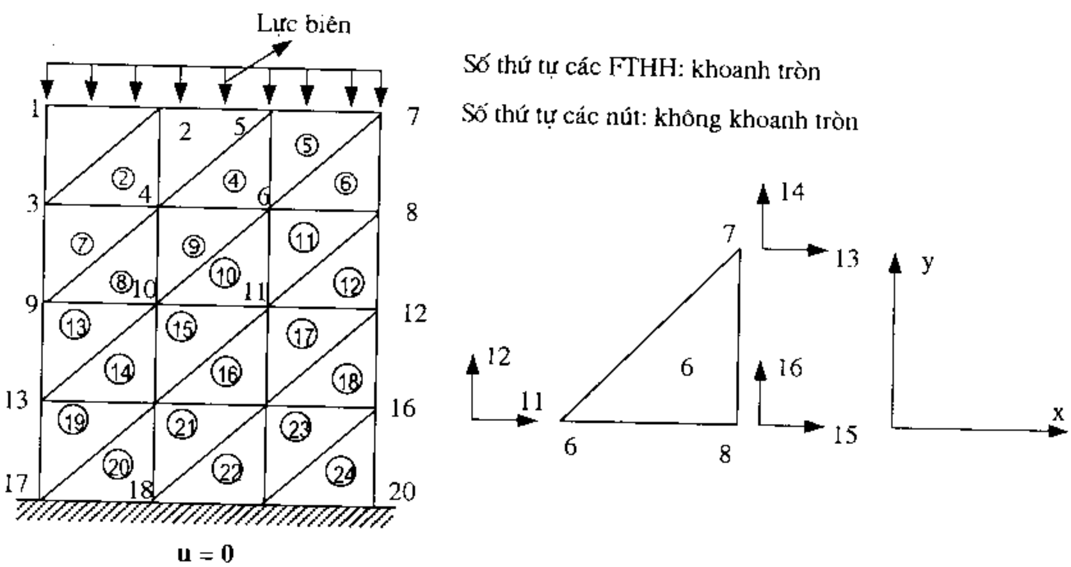
dA - phân tố diện tích; Hệ thức biến dạng chuyển vị

$$\varepsilon = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]^{T} \tag{5.5}$$

Hệ thức trên suy ra từ hệ thức tổng quát (1.11) trong bài toán 3 chiều. Theo (1.20) và (1.20a) ta có hệ thức giữa ứng suất và biến dạng:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}.\boldsymbol{\varepsilon} \tag{5.6}$$

Để giải bài toán hai chiều, trước hết ta dùng mô hình phần tử hữu hạn tam giác. Nguyên lý công ảo sẽ được áp dụng để suy ra các biểu thức của ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng



***Hình 5.2.** Mô hình phần tử hữu hạn trong bài toán 2 chiều*

Miền 2 chiều được chia thành các hình tam giác như trên hình (5.2). Các đỉnh tam giác gọi là nút, mỗi tam giác do 3 nút và 3 cạnh tạo thành gọi là một phần tử hữu hạn (viết tắt là FTHH). Các FTHH tam giác lấp đầy miền hai chiều. Nếu có miền rỗng ở biên thì thay nó bằng các FTHH bé hơn hoặc các FTHH có biên cong, do đó bài toán sẽ được giải một cách gần đúng. Trên hình 5.2, số thứ tự của các FTHH được khoanh tròn, số thứ tự các nút biểu thị bên cạnh nút.

Trong bài toán 2 chiều, mỗi nút được phép chuyển vị trên 2 phương x và y. Vậy mỗi nút có 2 bậc tự do (viết tắt là BTD). Để tiện cho việc lập trình trên máy tính điện tử, ta đặt số thứ tự cho mỗi nút như sau:

Tại nút j: BTD trên phương x: $d_1 = 2j - 1$

BTD trên phương y: $d_2 = 2j$ (5.7)

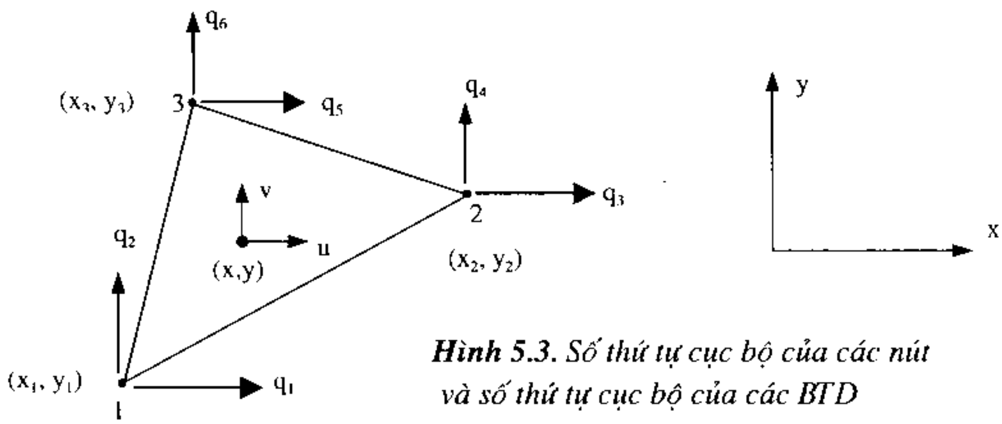
Ví dụ: đối với FTHH số 6 trên hình (5.2), ta có số thứ tự các BTD: 11, 12, 15, 16, 13, 14 (lần lượt ứng với các nút 6, 8, 7).

Véctơ chuyển vị tổng thể có dạng:

$$\mathbf{Q} = [Q_1 \quad Q_2 \quad \cdots \quad Q_N]' \tag{5.8}$$

Trong đó: N là số BTD của toàn hệ.

Trong tính toán, cần biểu thị tọa độ của các nút và sơ đồ liên kết giữa chúng. Tọa độ nút biểu thị trên hình 5.3. Sơ đồ liên kết giữa các FTHH và giữa các nút biểu thị trên hình 5.2. Nếu tách riêng một FTHH, nó có 3 nút 1, 2, 3 (có tính chất cục bộ) và các BTD cục bộ biểu thị như trên hình 5.3.



***Hình 5.3.** Số thứ tự cục bộ của các nút và số thứ tự cục bộ của các BTD*

Sự tương ứng giữa số thứ tự cục bộ (1, 2, 3) của các nút và số thứ tự tổng thể của chúng biểu thị trên hình 5.2 và bảng 5.1.

Bảng 5.1. Sự tương ứng giữa số thứ tự cục bộ và số thứ tự tổng thể của 3 nút FTHH

Số thứ tự FTHH	Số thứ tự nút cục bộ			Số thứ tự nút tổng thể		
1	1	2	3	1	3	2
2	1	2	3	2	3	4
3	1	2	3	2	4	5
4	1	2	3	5	4	6
....	....	....	....	....	....	....
22	1	2	3	15	18	19
23	1	2	3	15	19	16
24	1	2	3	16	19	20

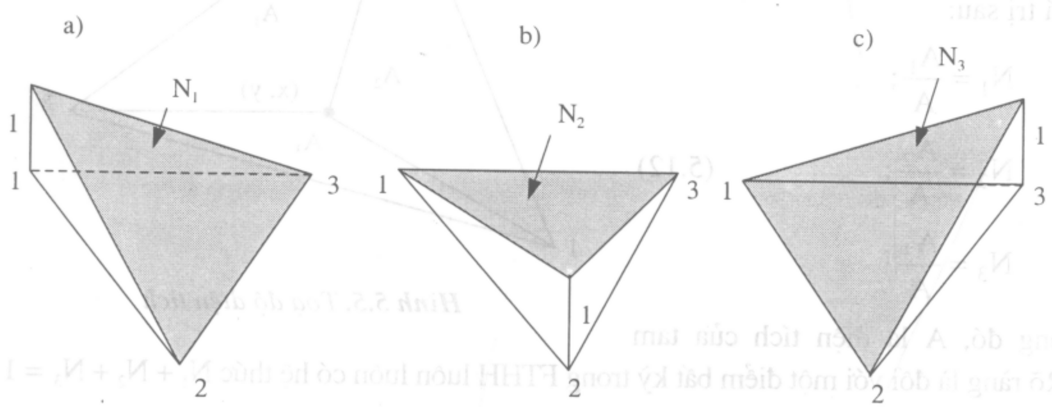
Chẳng hạn đối với FTHH có số thứ tự 4 (hình 5.2), có sự tương quan như sau: nút 1 (cục bộ) → nút 5; nút 2 (cục bộ) → nút 4; nút 3 (cục bộ) → nút 6 Các nút của FTHH tam giác đếm theo chiều *ngược kim đồng hồ* để tránh diện tích âm (vấn đề này sẽ được đề cập trong phần sau).

Các thành phần chuyển vị tại các nút của FTHH men theo các BTD cục bộ (1, 2, 3) biểu thị như trên hình (5.3). Các thành phần q_1, q_3, q_5 ứng với các nút 1, 2, 3 trên phương x; các thành phần q_2, q_4, q_6 ứng với các nút 1, 2, 3 trên phương y. Vậy vectơ chuyển vị cục bộ của FTHH là:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

§5.3. FTHH TAM GIÁC CÓ BIẾN DẠNG KHÔNG ĐỔI

Các thành phần chuyển vị tại một điểm trong FTHH u và v biểu thị trên hình (5.3). Trong đó, u là thành phần chuyển vị trên phương x, v là thành phần chuyển vị trên phương y. Trong phương pháp phần tử hữu hạn, ta dùng *hàm hình dạng* hoặc *hàm nội suy* để biểu thị các thành phần chuyển vị tại một điểm trong FTHH qua các thành phần chuyển vị tại các nút.



Hình 5.4. *Sự biến thiên của các hàm hình dạng N_1, N_2, N_3*

Đối với FTHH tam giác có biến dạng không đổi, hàm hình dạng có tính chất tuyến tính trong phạm vi FTHH. Khái niệm về hàm hình dạng đối với FTHH đã trình bày trong chương hai. Ở đây, ta dùng 3 hàm hình dạng N_1, N_2, N_3 ứng với các nút 1, 2, 3. Sự biến thiên của chúng (xem hình 5.4) như sau. Hàm hình dạng N_1 bằng đơn vị tại nút 1 và bằng 0 tại 2 nút 2 và 3 (hình 5.4a). Hàm hình dạng N_2 bằng đơn vị tại nút 2 và bằng 0 tại 2 nút 1 và 3 (hình 5.4b). Hàm hình dạng N_3 bằng đơn vị tại nút 3 và bằng 0 tại các nút 1 và 2 (hình 5.4c). Các hàm hình dạng nói trên được biểu thị bằng các mặt phẳng. Tổ hợp tuyến tính của các hàm đó cũng biểu thị một mặt phẳng. Đặc biệt tổ hợp của các hàm $N_1 + N_2 + N_3$ là một mặt phẳng đi qua các điểm có chiều cao bằng đơn vị tại các nút

1, 2, 3 nghĩa là mặt phẳng đó song song với tam giác 123. Vậy đối với bất kỳ hàm hình dạng N_1, N_2, N_3 nào, ta có hệ thức:

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1 \tag{5.10}$$

N_1, N_2, N_3 là những hàm không độc lập tuyến tính. Chỉ có 2 hàm là độc lập tuyến tính. Các hàm hình dạng độc lập tuyến tính được biểu thị bằng các số không thứ nguyên ξ và η như sau:

$$N_1 = \xi \qquad N_2 = \eta \qquad N_3 = 1 - \xi - \eta \tag{5.11}$$

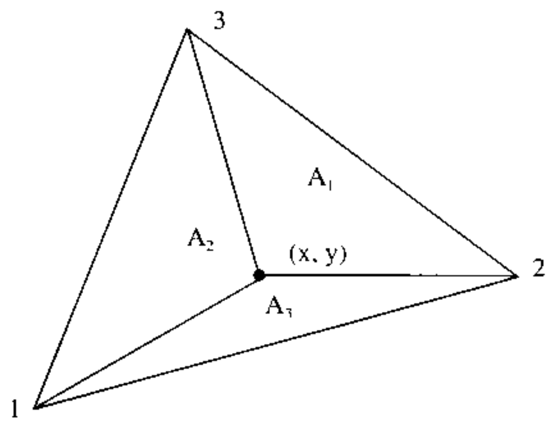
Trong đó ξ và η là các tọa độ tự nhiên. Trong bài toán 1 chiều, ta dùng một tọa độ tự nhiên ξ. Trong bài toán 2 chiều, ứng với tọa độ vuông góc x,y, ta có các tọa độ tự nhiên ξ và η và hàm hình dạng ở đây là hàm của ξ và η.

Ý nghĩa vật lý của các hàm hình dạng như sau:

Một điểm bất kỳ có tọa độ (x,y) trong FTHH tam giác chia nó ra thành 3 miền có các diện tích A_1, A_2, A_3 (hình 5.5).

Các hàm hình dạng N_1, N_2, N_3 có các giá trị sau:

$$N_1 = \frac{A_1}{A}; \quad N_2 = \frac{A_2}{A}; \quad N_3 = \frac{A_3}{A}. \tag{5.12}$$



Hình 5.5. *Tọa độ diện tích*

Trong đó, A là diện tích của tam giác. Rõ ràng là đối với một điểm bất kỳ trong FTHH luôn luôn có hệ thức $N_1 + N_2 + N_3 = 1$

§5.4. CÁCH BIỂU THỊ CÙNG THAM SỐ. BIỂU THỨC BIẾN DẠNG

5.4.1. Ma trận Jacobian

Các thành phần chuyển vị tại một điểm bất kỳ trong FTHH có thể biểu thị bằng các thành phần chuyển vị tại các nút.

$$\begin{aligned} u &= N_1 q_1 + N_2 q_3 + N_3 . q_5 \\ v &= N_1 q_2 + N_2 . q_4 + N_3 . q_6 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Theo (5.11):

$$\begin{aligned} u &= (q_1 - q_5)\xi + (q_3 - q_5) + q_5 \\ v &= (q_2 - q_6)\xi + (q_4 - q_6) + q_6 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Dưới dạng ma trận, hệ thức (5.13) có thể viết:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}.\mathbf{q} \tag{5.15}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

Đối với FTHH tam giác, cũng có thể dùng các hàm hình dạng nói trên để biểu thị các tọa độ x, y tại 1 điểm trong FTHH qua các tọa độ tại các nút. Cách biểu thị này gọi là *cách biểu thị cùng tham số*. Nó đơn giản và giúp cho việc tính toán sau này được dễ dàng.

Theo trên, có thể viết:

$$\begin{aligned} x &= N_1.\,x_1 + N_2.x_2 + N_3.x_3 \\ y &= N_1.y_1 + N_2.y_2 + N_3.y_3 \end{aligned} \tag{5.17a}$$

Theo (5.11)

$$\begin{aligned} x &= (x_1 - x_3).\xi + (x_2 - x_3).\eta + x_3 \\ y &= (y_1 - y_3).\xi + (y_2 - y_3).\eta + y_3 \end{aligned} \tag{5.17b}$$

Đặt $x_{ij} = x_i - x_j$ và $y_{ij} = y_i - y_j$, (5.17b) có thể viết:

$$\begin{aligned} x &= x_{13}.\xi + x_{23}.\eta + x_3 \\ y &= y_{13}.\xi + y_{23}.\eta + y_3 \end{aligned} \tag{5.17c}$$

Các phương trình trên chuyển tọa độ x, y thành các tọa độ tự nhiên ξ, η

Ví dụ 5.1: Tính các hàm hình dạng N_1, N_2, N_3 tại điểm P trong hình tam giác trên hình (5.6).

Giải:

Căn cứ vào các phương trình (5.17), ta có:

$3{,}85 = 1{,}5N_1 + 7N_2 + 4N_3 = -2{,}5\xi + 3\eta + 4$

$4{,}8 = 2N_1 + 3{,}5N_2 + 7N_3 = -5\xi - 3{,}5\eta + 7$

Biến đổi các phương trình trên thành dạng:

$$2{,}5\xi - 3\eta = 0{,}15$$

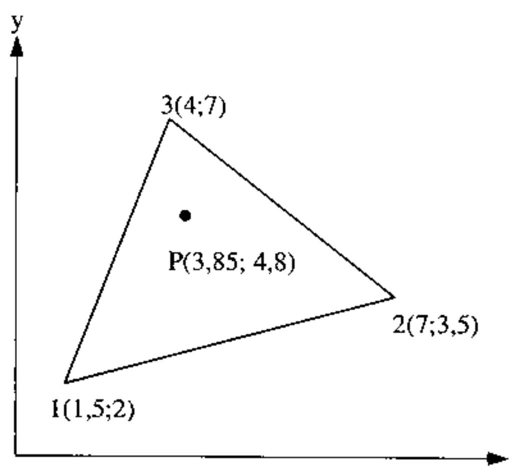
$$5\xi + 3{,}5\eta = 2{,}2$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$N_1 = 0{,}3$$

$$N_2 = 0{,}2$$

$$N_3 = 0{,}5$$



Hình 5.6

Để tính biến dạng, ta phải tính các đạo hàm riêng của u và v đối với x và y. Từ các phương trình (5.12) và (5.17) ta thấy rằng u, v, x, y là những hàm của ξ và η. Nghĩa là $u = u[x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)]$ và $v = v[x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)]$.

Áp dụng nguyên tắc tính đạo hàm riêng của u, ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

Dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Trong đó, ma trận cấp 2 × 2 sau đây gọi là ma trận Jacobian:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Sau khi lấy đạo hàm của x và y đối với ξ và η, ta được:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} \\ x_{23} & y_{23} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Từ (5.18)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

J^{-1} là nghịch đảo của ma trận Jacobi

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

$$\det \mathbf{J} = x_{13}y_{23} - x_{23}y_{13} \quad (5.23)$$

Từ kiến thức về diện tích tam giác, ta thấy rằng định thức của **J** tức det**J** bằng 2 lần diện tích của tam giác. Nếu các nút của tam giác 1, 2, 3 được xếp theo thứ tự *ngược chiều kim đồng hồ* thì det J có dấu dương. Ta có diện tích:

$$A = \frac{1}{2}|\det \mathbf{J}| \quad (5.24)$$

Trong đó: ký hiệu | | biểu thị giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 5.2: Xác định ma trận Jacobian đối với hình tam giác cho trên hình (5.6)

Giải:

Theo (5.20):

$$J = \begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} \\ x_{23} & y_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,5 & -5,0 \\ 3,0 & -3,5 \end{bmatrix}$$

Vậy det **J** = 23,75 đơn vị, bằng 2 lần diện tích của tam giác. Nếu 3 nút 1, 2, 3 được xếp số thứ tự theo chiều kim đồng hồ, det **J** sẽ mang dấu âm.

5.4.2. Biểu thức biến dạng

Theo (5.21) và (5.22) ta có:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{pmatrix} y_{23}.\dfrac{\partial u}{\partial \xi} & -y_{13}.\dfrac{\partial u}{\partial \eta} \\ -x_{23}.\dfrac{\partial u}{\partial \xi} & +x_{13}.\dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{5.25}$$

Thay u bằng v ta có hệ thức tương tự:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{pmatrix} y_{23}.\dfrac{\partial v}{\partial \xi} & -y_{13}.\dfrac{\partial v}{\partial \eta} \\ -x_{23}.\dfrac{\partial v}{\partial \xi} & +x_{13}.\dfrac{\partial v}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{5.26}$$

Thay (5.14), (5.25), (5.26) vào (5.5), ta có:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} \tag{5.27a}$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{pmatrix} y_{23}(q_1 - q_5) - y_{13}(q_3 - q_5) \\ -x_{23}(q_2 - q_6) - x_{13}(q_4 - q_6) \\ -x_{23}(q_1 - q_5) - x_{13}(q_3 - q_5) + y_{23}(q_2 - q_6) - y_{13}(q_4 - q_6) \end{pmatrix}$$

Từ định nghĩa của x_{ij} và y_{ij}, ta có thể viết $y_{31} = -y_{13}$, $y_{12} = y_{13} - y_{23}$,..., ta có biểu thức của biến dạng:

$$\varepsilon = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{pmatrix} y_{23}q_1 + y_{31}q_3 + y_{12}q_5 \\ x_{32}q_2 + x_{13}q_4 + x_{21}q_6 \\ x_{32}q_1 + y_{23}q_2 + x_{13}q_3 + y_{31}q_4 + x_{21}q_5 + y_{12}q_6 \end{pmatrix} \tag{5.27b}$$

Dưới dạng ma trận:

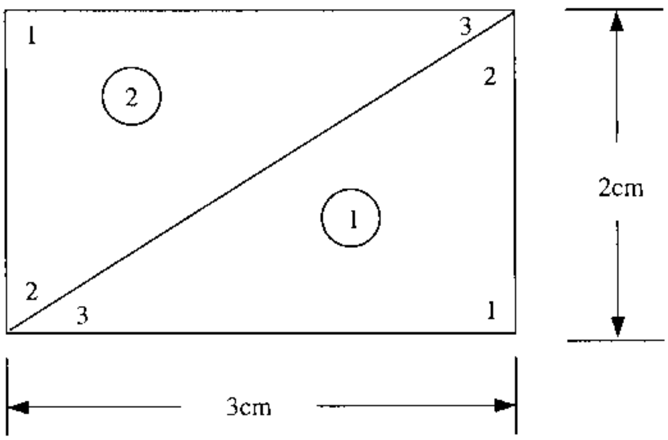
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}.\,\mathbf{q} \qquad (5.28)$$

Trong đó, ma trận cấp 3×6 **B** gọi là *ma trận biến dạng-chuyển vị*, nó biểu thị mối quan hệ giữa 3 thành phần biến dạng trong FTHH và 6 thành phần chuyển vị tại các nút.

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{21} & x_{13} & y_{21} & x_{12} & y_{12} \end{bmatrix} \qquad (5.29)$$

Cần chú ý rằng các phần tử của ma trận **B** là những hằng số, các hằng số này được biểu thị bằng tọa độ tại các nút.

Ví dụ 5.3: Xác định ma trận biến dạng-chuyển vị **B** cho các FTHH biểu thị trên hình (5.7). 1, 2, 3 là số thứ tự nút cục bộ.



Hình 5.7

Giải:

Theo (5.29), ta có:

Phần tử 1:

$$\mathbf{B}^1 = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$\mathbf{B}^2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ở trên, det **J** tính theo công thức $x_{13}y_{23}-x_{23}y_{13} = 3 \times 2 - 3 \times 0 = 6$.

§5.5. MA TRẬN ĐỘ CỨNG CỦA FTHH

Trong chương hai ta đã vận dụng nguyên lý công ảo để suy ra công thức ma trận độ cứng của FTHH trong bài toán 2 chiều. Theo (2.81):

$$k_C = Ah\mathbf{B}'\mathbf{D}\mathbf{B} \tag{5.30}$$

Trong đó: A - diện tích của FTHH;

h - bề dày của FTHH;

B - ma trận biến dạng-chuyển vị theo (5.29);

D - ma trận cấu trúc vật liệu theo (1.21) (chương 1).

Cần chú ý rằng $\mathbf{k}_e$ đối xứng vì **D** đối xứng. Bằng cách ghép các ma trận độ cứng của các phần tử hữu hạn như đã làm trong các phần trước, ta được ma trận độ cứng tổng thể **K** của toàn hệ. **K** là một ma trận đối xứng mang tính chất dải đối xứng hoặc có tính chất rời rạc. Ta dựa vào sơ đồ liên kết giữa các FTHH và giữa các nút (chẳng hạn như trong bảng 5.1) để ghép các ma trận $\mathbf{k}_e$. Nếu các BTD i và j không được liên kết với nhau trong một phần tử hữu hạn thì phần tử tương ứng trong ma trận **K** triệt tiêu. Nếu các BTD i và j được liên kết với nhiều FTHH thì phần tử tương ứng trong ma trận K có tính chất tích luỹ. Căn cứ vào các BTD tổng thể thống kê trong hình 5.2, ta tính bề rộng của nửa dải đối xứng trong ma trận **K** như sau. Giả sử i_1, i_2, i_3 là số thứ tự các nút của một FTHH, hiệu lớn nhất giữa số thứ tự các nút trong FTHH đó là:

$$m_e = \max\left(|i_1-i_2|, |i_2-i_3|, |i_3-i_1|\right) \tag{5.31}$$

Nửa bề rộng của dải tính theo công thức:

$$NBW = 2\left[\max_{1\le e\le NE}(m_e)+1\right] \tag{5.32}$$

Trong đó: NE - số FTHH;

2 là số BTD tại mỗi nút.

Giá trị m_e trong (5.31) tính cho toàn bộ số FTHH.

Khi xét đến điều kiện biên, có thể áp dụng phương pháp loại trừ hoặc phương pháp mô hình lò xo đã trình bày trong chương 3 để biến đổi ma trận **K**.

§5.6. VECTƠ TẢI TRỌNG, ỨNG SUẤT

Trong chương hai, ta cũng đã vận dụng nguyên lý công ảo để suy ra biểu thức véctơ tải trọng trong bài toán 2 chiều. Theo (2.82), ta có vectơ tải trọng:

$$t = h\iint \mathbf{N}'.\mathbf{f}\ dA + h\iint \mathbf{N}'^{s}.\mathbf{T}.dl \tag{5.33}$$

Trong đó: h - bề dày của kết cấu;

N - hàm hình dạng;

f - vectơ lực thể tích;

T - vectơ lực biên.

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x & f_y \end{bmatrix}'$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_x & T_y \end{bmatrix}'$$

Trong đó: f_x, f_y - các thành phần lực thể tích theo phương x và y;

T_x, T_y - các thành phần lực biên theo phương x và y.

Thay hàm hình trạng từ (5.16) và f vào (5.33), ta có vectơ lực thể tích:

$$f_t = h\iint \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} dA = h\iint \begin{bmatrix} N_1.f_x.dA \\ N_1.f_y.dA \\ N_2.f_x.dA \\ N_2.f_y.dA \\ N_3.f_x.dA \\ N_3.f_y.dA \end{bmatrix}$$

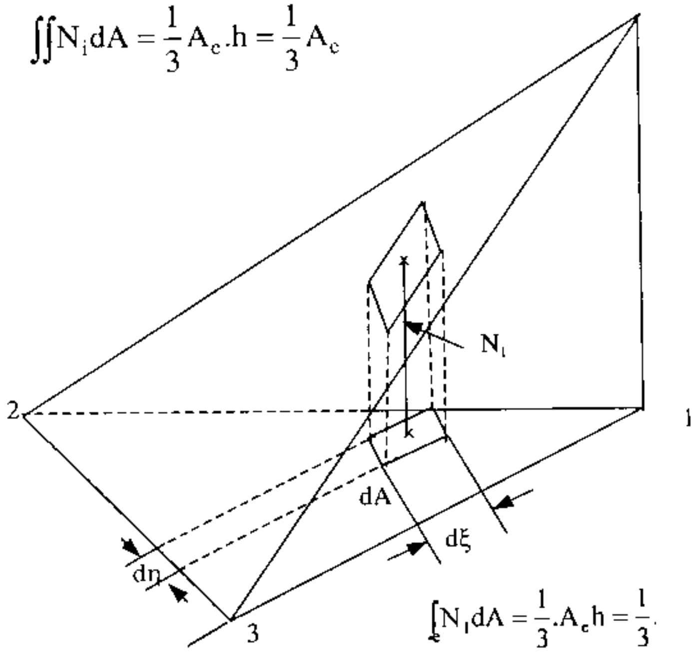
hay:

$$f_t = h \times$$

$$\times \left[f_x \iint N_1 dA + f_y \iint N_1 dA + f_x \iint N_2 dA + f_y \iint N_2 dA + f_x \iint N_3 dA + f_y \iint N_3 dA \right]' \quad \text{(a)}$$

Các tích phân $\iint N_i dA \left(i = 1,2,3\right)$ có thể tính theo hình (5.8)

$$\iint N_i dA = \frac{1}{3} A_e.h = \frac{1}{3} A_e \quad \text{(b)}$$



Hình 5.8: *Tính tích phân* $\int N_i dA$

Thay (b) và (a), ta được vectơ lực thể tích của FTHH:

$$\mathbf{f}_t = \frac{h_e A_e}{3}\begin{bmatrix} f_x & f_y & f_x & f_y & f_x & f_y \end{bmatrix}' \tag{5.34}$$

Số hạng thứ 2 ở vế phải của (5.33) có thể viết:

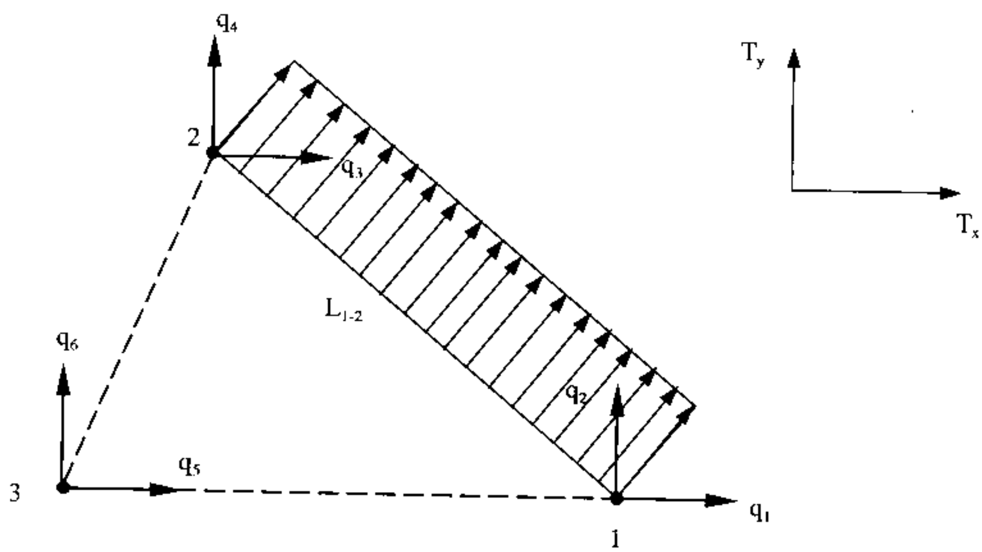
$$\mathbf{f}_b = h\int \mathbf{N}^{s'}\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} dl \tag{a}$$

Trong đó: $\mathbf{f}_b$ - vectơ lực biên của FTHH;

$\mathbf{N}^s$ - hàm hình dạng men theo cạnh chịu tác dụng của tải trọng biên của FTHH (hình 5.9);

dl - phân tố đường thẳng men theo cạnh trên.

Để tính tích phân $\int \mathbf{N}^{s'} dl$, ta làm như sau. Giả sử cạnh 1-2 của FTHH chịu tác dụng của tải trong biên (hình 5.9). Trên cạnh này, $N_3 = 0$, chỉ còn lại 2 hàm hình dạng N_1 và N_2.



***Hình 5.9:** FTHH chịu tác dụng của lực biên*

Do đó:

$$\mathbf{f}_b = h\int \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} . dl = h.\begin{bmatrix} T_x \int N_1 dl \\ T_y \int N_1 dl \\ T_x \int N_2 dl \\ T_y \int N_2 dl \end{bmatrix} \tag{b}$$

Các tích phân có thể tính theo hình (5.8)

$$\int L_{1-2} N_1 dl = \int L_{1-2} N_2 dl = \frac{1}{2} L_{1-2}.h = \frac{1}{2}.L_{1-2}$$

Ở đây, L_{1-2} là chiều dài của cạnh 1-2 (hình 5.9) nên:

$$\int_{L_{1-2}} N_1 dl = \int_{L_{1-2}} N_2 dl = \frac{L_{1-2}}{2} \qquad \text{(c)}$$

Thay (c) vào (b), ta có:

$$\mathbf{f}_b = \frac{h.L_{1-2}}{2}\begin{bmatrix} T_x & T_y & T_x & T_y \end{bmatrix}^{*} \qquad (5.35)$$

Vậy là đã suy ra biểu thức của vectơ lực thể tích $\mathbf{f}_t$ và vectơ lực biên $\mathbf{f}_b$. Nếu có tải trọng tập trung **P** thì khi ghép các véctơ tải trọng, ta phải cộng thêm vào tải trọng đó.

Sau khi ghép các ma trận độ cứng của các FTHH và ghép các vectơ tải trọng, ta được hệ phương trình cân bằng tổng thể:

$$\mathbf{K.Q = F}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị, từ đó tính ứng suất trong mỗi phần tử hữu hạn.

Tính ứng suất:

Theo (5.6) và (5.28), ta có ứng suất:

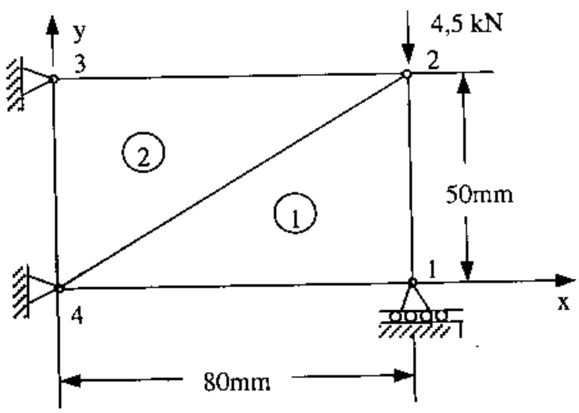
$$\sigma = \mathbf{D.B.q} \qquad (5.36)$$

Vì biến dạng là một hằng số trong FTHH tam giác có biến dạng không đổi nên ứng suất cũng là một hằng số. Ta tính ứng suất cho mỗi phần tử hữu hạn. Vì **q** trong (5.36) là vectơ chuyển vị của FTHH nên khi tính ứng suất, cần tách ra các thành phần chuyển vị tương ứng từ vectơ chuyển vị tổng thể **Q**, dựa trên sơ đồ liên kết giữa các FTHH và giữa các nút (chẳng hạn bảng (5.1)).

Các ứng suất tính được xem như tác dụng tại trọng tâm của FTHH. Các ứng suất chính và phương của chúng tính theo vòng tròn M_0.

Sau đây là một ví dụ để minh họa các bước tính toán.

Ví dụ 5.4: Cho một tấm hai chiều chịu tải trọng như trên hình 5-10. Căn cứ vào các điều kiện ứng suất phẳng, xác định các thành phần chuyển vị tại các nút 1 và 2. Bỏ qua trọng lượng bản thân, bề dày của tấm h = 1,25mm; E = 210kN/mm², hệ số Poatxong ν = 0,25.



Hình 5.10

Giải:

Trong bài toán ứng suất phẳng, căn cứ vào (1.20), ta có ma trận cấu trúc vật liệu:

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,25 & 0 \\ 0,25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,375 \end{bmatrix}$$

Sơ đồ liên kết giữa các FTHH và giữa các nút như sau:

Phần tử	Số thứ tự nút cục bộ			Số thứ tự nút tổng thể		
1	1	2	3	1	2	4
2	1	2	3	3	4	2

Tính ma trận biến dạng-chuyển vị **B** theo (5.29)

Phần tử 1:

$$\det \mathbf{J} = 2A_1 = 2.\frac{80\times 50}{2} = 4.000\ \text{mm}^2$$

$Y_{23} = 50 - 0 = 50\text{mm}$ $\qquad$ $y_{13} = 0 - 0 = 0$

$Y_{12} = 0 - 50 = -50\text{mm}$ $\qquad$ $x_{32} = 0 - 80 = -80\text{mm}$

$X_{13} = 80 - 0 = 80\text{mm}$ $\qquad$ $x_{21} = 80 - 80 = 0\ \text{mm}$

Vậy:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{4000}\begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 & -50 & 0 \\ 0 & -80 & 0 & 80 & 0 & 0 \\ -80 & 50 & 80 & 0 & 0 & -50 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$\det \mathbf{J} = 2A_2 = 2\times\frac{80\times 50}{2} = 4000\text{mm}^2$$

$Y_{23} = 0 - 50 = -50\text{mm}$ $\qquad$ $y_{31} = 50 - 50 = 0$

$Y_{12} = 50 - 0 = 50\text{mm}$ $\qquad$ $x_{32} = 80 - 0 = 80\text{mm}$

$X_{13} = 0 - 80 = -80\text{mm}$ $\qquad$ $x_{21} = 0 - 0 = 0\ \text{mm}$

Vậy:

$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{4000}\begin{bmatrix} -50 & 0 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 80 & 0 & -80 & 0 & 0 \\ 80 & -50 & -80 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

Áp dụng (5.30) và thực hiện các phép nhân ma trận, ta được ma trận độ cứng của các phần tử hữu hạn:

Phần tử 1:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 8 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 171{,}5 & -87{,}5 & -84 & 35 & -87{,}5 & 52{,}5 \\ & 256{,}813 & 52{,}5 & -224 & 35 & -32{,}813 \\ & & 84 & 0 & 0 & -52{,}5 \\ & & & 224 & -35 & 0 \\ & \text{Đối xứng} & & & 87{,}5 & 0 \\ & & & & & 32{,}813 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{array} \end{array}$$

Phần tử 2:

$$\mathbf{k}_2 = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 171{,}5 & -87{,}5 & -84 & 35 & -87{,}5 & 52{,}5 \\ & 256{,}813 & 52{,}5 & -224 & 35 & -32{,}813 \\ & & 84 & 0 & 0 & -52{,}5 \\ & & & 224 & -35 & 0 \\ & \text{Đối xứng} & & & 87{,}5 & 0 \\ & & & & & 32{,}813 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

Sau khi ghép các ma trận riêng và dùng phương pháp loại trừ, ta được phương trình cân bằng:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 171{,}5 & -84 & 35 \\ & 171{,}5 & 0 \\ & \text{Đối xứng} & 256{,}813 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4{,}5 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị:

$$Q_1 = 4{,}883 \times 10^{-3}\,\text{mm}$$

$$Q_3 = 2{,}392 \times 10^{-3}\,\text{mm}$$

$$Q_4 = -1{,}819 \times 10^{-2}\,\text{mm}$$

Cuối cùng áp dụng (5.36) để tính ứng suất.

Đối với phần tử 1, các thành phần chuyển vị là:

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_7 & q_8 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -4{,}883 \times 10^{-3} & 0 & 2{,}392 \times 10^{-3} & -1{,}819 \times 10^{-2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Đối với phần tử 2, các thành phần chuyển vị là:

$$\begin{bmatrix} q_5 & q_6 & q_7 & q_8 & q_3 & q_4 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2{,}392 \times 10^{-3} & -1{,}819 \times 10^{-2} \end{bmatrix}'$$

Các thành phần ứng suất tính theo (5.36):

Phần tử 1: $\boldsymbol{\sigma}_1 = \left[-6,697\times10^{-3} \quad -7,806 \times 10^{-2} \quad -4,186 \times 10^{-3}\right]'$

Phần tử 2: $\boldsymbol{\sigma}_2 = \left[6,697\times10^{-3} \quad 1,674 \times 10^{-3} \quad -1,909 \times 10^{-2}\right]'$

§5.7.TÁC DỤNG CỦA NHIỆT ĐỘ

Giả sử độ biến thiên nhiệt độ trong bài toán 2 chiều là $\Delta T(x,y)$. Biến dạng ban đầu do nhiệt độ gây ra là ε_0. Từ lý thuyết cơ học chất rắn, ε_0 tính như sau:

Bài toán ứng suất phẳng:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = [\alpha.\Delta T \quad \alpha.\Delta T \quad 0]' \tag{5.37}$$

Bài toán biến dạng phẳng:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = (1+\nu)[\alpha.\Delta T \quad \alpha.\Delta T \quad 0]' \tag{5.38}$$

Hệ thức giữa ứng suất và biến dạng:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \tag{5.39}$$

Bây giờ ta vận dụng nguyên lý công ảo trình bày trong chương hai để suy ra vectơ tải trọng tương đương do sự biến thiên của nhiệt độ gây ra. Từ (2.71) và (2.72), ta có:

Công ảo của nội lực: $$\delta U = \iiint \boldsymbol{\delta}'_\varepsilon \boldsymbol{\sigma} \quad dV \tag{5.40a}$$

Công ảo của nội lực: $$\delta W = \iiint \boldsymbol{\delta}'_u.\mathbf{f} \quad dV + \iint \boldsymbol{\delta}'_u.\mathbf{T}ds \tag{5.41}$$

Biến dạng ảo: $\boldsymbol{\delta}_\varepsilon = \mathbf{B}\boldsymbol{\delta}_q$

Thay (5.39) và hệ thức trên vào (5.40a):

$$\delta U = \iiint \boldsymbol{\delta}'_q.\mathbf{B}'.\mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)dV$$

Trong bài toán 2 chiều dV=dA.h

δU có thể viết:

$$\delta U = \boldsymbol{\delta}'_q.h \iint \mathbf{B}'\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad dA - \boldsymbol{\delta}'_q h \iint \mathbf{B}'.\mathbf{D}.\boldsymbol{\varepsilon}_0 dA$$

Vì $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}.\mathbf{q}$ nên:

$$\delta U = \boldsymbol{\delta}'_q\left[(hA\mathbf{B}'\mathbf{D}\mathbf{B})\mathbf{q} - hA\mathbf{B}'\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0\right]$$

Thay $\boldsymbol{\delta}_u = \mathbf{N}\boldsymbol{\delta}_q$ vào (5.41) và cho $\delta U = \delta W_e$, cuối cùng ta được:

$$(hA\mathbf{B}'\mathbf{D}\mathbf{B})\mathbf{q} = hA\mathbf{B}'\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{f}_t + \mathbf{f}_b \tag{5.42}$$

hay:

$$\mathbf{k}_e\mathbf{q} = \mathbf{f}_n + \mathbf{f}_t + \mathbf{f}_b \tag{5.43}$$

Trong đó: $\mathbf{k}_e$ - ma trận độ cứng của FTHH, tính như trước:

$$\mathbf{f}_n = hA\,\mathbf{B'D}.\varepsilon_0 \tag{5.44}$$

$\mathbf{f}_n$ - tải trọng tương đương do sự biến thiên nhiệt độ gây ra.

$\mathbf{f}_t$ và $\mathbf{f}_b$ tính theo các công thức (5.34) và (5.35).

Khai triển công thức (5.44), ta có 6 thành phần tải trọng tương đương như sau:

$$\mathbf{f}_n = \begin{bmatrix} f_n^1 & f_n^2 & f_n^3 & f_n^4 & f_n^5 & f_n^6 \end{bmatrix}' \tag{5.45}$$

Trong đó: các chỉ số 1, 2, 3...là số thứ tự các BTD tại các nút 1, 2, 3 của FTHH tam giác.

Ứng suất trong mỗi phần tử hữu hạn:

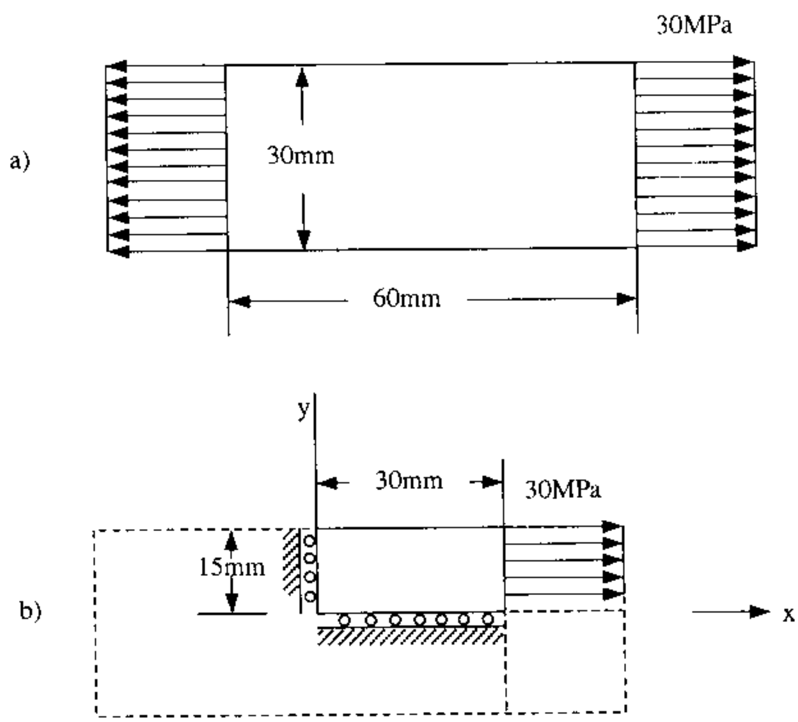
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}.(\mathbf{B}.\mathbf{q} - \varepsilon_0) \tag{5.46}$$

§5.8. MỘT SỐ THÍ DỤ VỀ CÁCH XỬ LÝ CÁC ĐIỀU KIỆN BIÊN

Trong các phần trước, ta đã xét đến các điều kiện biên một cách tổng quát. Trong mục này, ta sẽ nghiên cứu cách xử lý các điều kiện biên trong một số trường hợp đặc biệt.

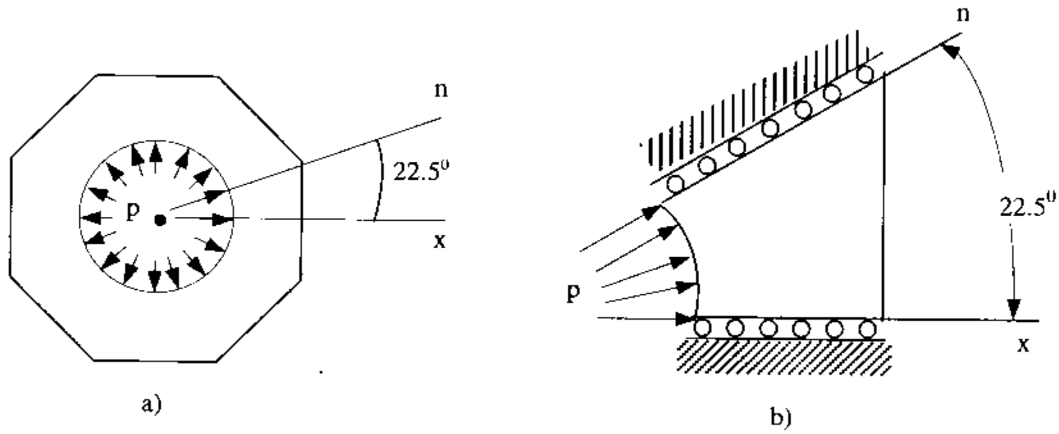
Ví dụ đầu tiên được trình bày trên hình 5.11.

Đây là một tấm đối xứng đối với 2 trục x, y và chịu tác dụng của tải trọng đối xứng. Trên hình vẽ, các trục x và y đi qua tâm của tấm và chia tấm thành 4 phần bằng nhau.



***Hình 5.11:** Tấm đối xứng chịu tải trọng đối xứng*

Vì tính chất đối xứng của tấm và của tải trọng, tấm biến dạng trên phương x nhưng chuyển vị lại bằng không trên phương y; ngược lại, tấm biến dạng trên phương y nhưng chuyển vị lại bằng không trên phương x. Vì vậy, sơ đồ tính đưa về 1/4 tấm với các điều kiện biên biểu thị như trên hình 5.11b.

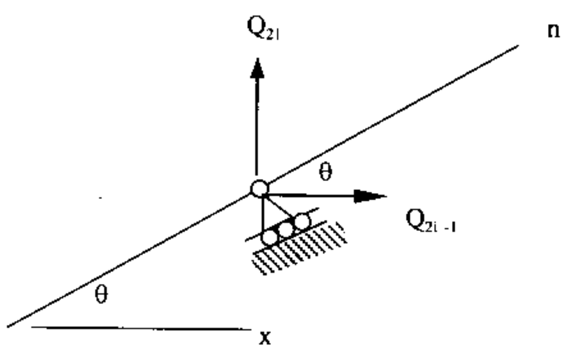


***Hình 5.12:** Ống hình 8 cạnh chịu tải trọng đối xứng*

Ví dụ 2 biểu thị trên hình (5.12). Đây là 1 ống 8 cạnh chịu áp lực đối xứng. Do tính chất đối xứng của kết cấu và của tải trọng, ống chỉ biến dạng trên các phương xuyên tâm. Nói một cách khác, chuyển vị đều triệt tiêu trên các phương vuông góc với phương xuyên tâm. Sơ đồ tính đưa về phần ống nằm trong phạm vi góc 22,5^0 như trên hình (5.12b). Giả sử n là phương xuyên tâm. Tại nút i với các bậc tự do Q_{2i-1} và Q_{2i} (hình 5.13), ống chỉ biến dạng trên phương n nhưng chuyển vị lại triệt tiêu trên phương vuông góc với phương n. Do đó, ta có điều kiện biên:

$$Q_{2i-1}.\sin\theta - Q_{2i}.\cos\theta = 0 \qquad (5.47)$$

Đây là điều kiện biên có tính chất ràng buộc nhiều điểm mà ta đã thảo luận trong chương ba.



***Hình 5.13:** Gối tựa lăn trên phương nghiêng.*

§5.9. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH GIẢI BÀI TOÁN HAI CHIỀU KIỂU FTHH TAM GIÁC BIẾN DẠNG KHÔNG ĐỔI (CTR8)

1. Những điều cần tuân thủ

- Số thứ tự các BTD nên xếp theo số thứ tự của dãy số tự nhiên (1, 2, ...); số thứ tự các BTD không có chuyển vị hoặc có chuyển vị cho trước nên xếp ở các vị trí cuối cùng để tiện chia khối ma trận trong phương pháp loại trừ.

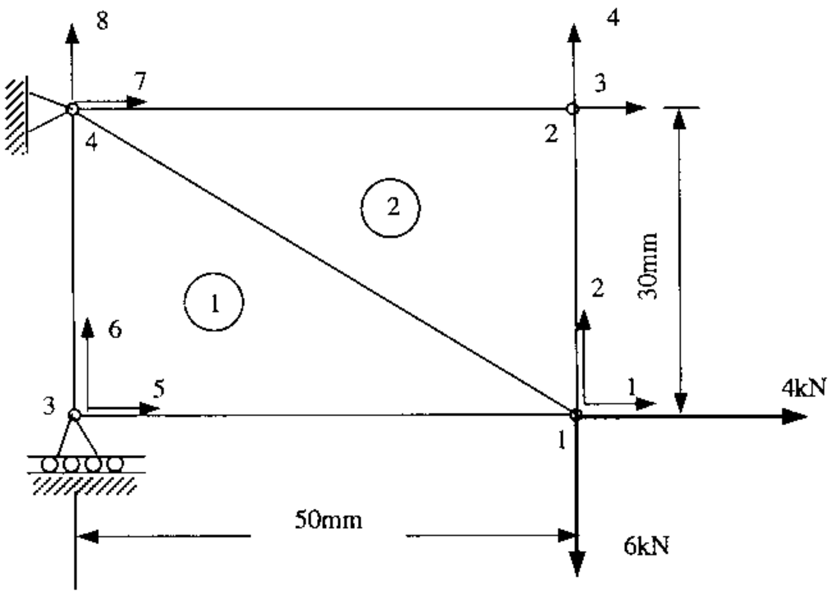
- Nói chung, số thứ tự BTD tại nút i, xác định như sau:

Tại nút i: Số thứ tự BTD trên phương x: 2i - 1

Số thứ tự BTD trên phương y: 2i

- Số thứ tự BTD theo chiều ngược kim đồng hồ.

2. Nhập các số liệu ban đầu theo các bảng sau (lấy ví dụ trên hình 5.14)



Hình 5.14

Số phần tử: 2

Số BTD có chuyển vị: 5

Tổng số BTD: 8

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 3

Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 6, 7, 8

Bề dày tấm = 1,25mm

Hệ số poát xong: 0,25

Tỉ trọng: 0

Thành phần tải trọng: 4; -6; 0; 0; 0

Phần tử	Số thứ tự nút tổng thể		
1	1	4	3
2	1	2	4

ft	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	e
1	1	2	7	8	5	6	50	0	0	0	30	0	210
2	1	2	3	4	7	8	50	50	0	0	30	30	210

3. Ghép các ma trận độ cứng riêng vào ma trận độ cứng tổng thể theo (5.30)
4. Ghép các vectơ tải trọng theo (5.34), (5.35), (5.44) và vectơ tải trọng nhập vào.
5. Giải hệ phương trình cân bằng để được giá trị các thành phần chuyển vị.
6. Tính ứng suất theo (5.36)
7. Tính phản lực theo phương pháp loại trừ và chia khối ma trận.