

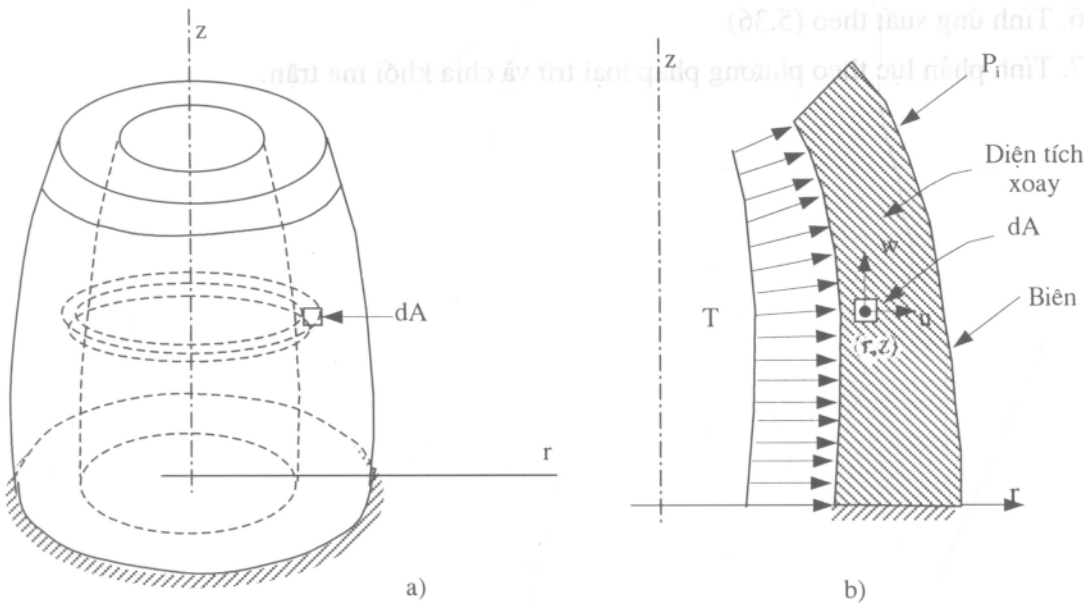
Số thứ tự chương		Phần tư	
3	4	1	1
<b>Chương 6</b>			
4	2	2	2

## VẬT RẮN TRÒN XOAY CHỊU TẢI TRỌNG ĐỐI XỨNG

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

### §6.1. KHÁI NIỆM

Vật rắn tròn xoay chịu tải trọng đối xứng là một kết cấu đối xứng chịu tải trọng đối xứng. Nói chung, nó làm việc trên 3 chiều, nhưng do tính chất đối xứng về kết cấu và tải trọng, ứng suất và biến dạng không phụ thuộc vào góc xoay, do đó bài toán 3 chiều có thể đưa về bài toán 2 chiều.



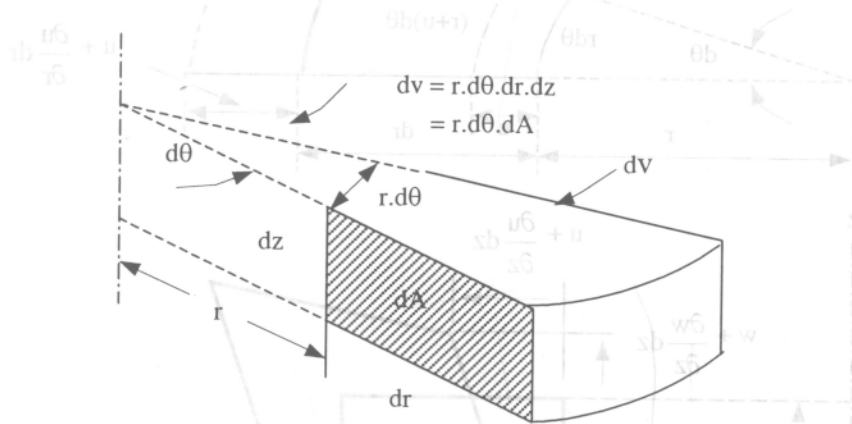
Hình 6.1: Vật rắn tròn xoay đưa về bài toán 2 chiều

Chẳng hạn đối với kết cấu trên hình 6.1a, sơ đồ tính toán nằm trong mặt phẳng  $z-r$  (hình 6.1b).  $z$  là trục của vật rắn tròn xoay,  $r$  là phương nằm ngang xuyên tâm;  $A$  là diện tích tròn xoay (gạch chéo),  $dA$  là phân tố diện tích;  $u$ ,  $w$  là các thành phần chuyển vị ngang và chuyển vị đứng tác dụng trên phân tố diện tích  $dA$ .  $T$  là lực biên,  $P_i$  là lực tập trung phân bố trên vòng tròn ở mặt ngoài của vật rắn.

Các lực thể tích  $f$ , lực biên  $T$  và lực tập trung  $P_i$  được chia thành 2 thành phần: thành phần nằm ngang song song với phương xuyên tâm  $r$ , thành phần thẳng đứng song song với trục  $z$ .

Đặc điểm của bài toán này là ứng suất và biến dạng không phụ thuộc vào góc xoay  $\theta$ .

§6.2. PHÂN TÍCH ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG TRONG VẬT THỂ TRÒN XOAY



Hình 6.2: Phân tố thể tích trong vật rắn tròn xoay

Xét phân tố thể tích  $dV$  trên hình 6.2. Thế năng toàn phần có thể viết:

$$TNT = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_A \sigma_{\epsilon r} dA d\theta - \int_0^{2\pi} \int_A \mathbf{u}' f r dA d\theta - \int_0^{2\pi} \int_A \mathbf{u}' T r d\ell d\theta - \sum_i \mathbf{u}'_i P_i \quad (6.1)$$

Trong đó:  $r dA d\theta = dV$  là phân tố thể tích trên hình 6.2;

$r d\ell d\theta$  - diện tích bề mặt của phân tố trên đó có lực biên tác dụng.

Vì mọi biến dạng trong các tích phân trên không phụ thuộc vào góc xoay  $\theta$  nên (6.1) có thể viết:

$$TNT = 2\pi \left( \frac{1}{2} \int_A \sigma'_{\epsilon} r dA - \int_A \mathbf{u}' f r dA - \int_L \mathbf{u}' T r d\ell \right) - \sum_i \mathbf{u}'_i P_i \quad (6.2)$$

Trong đó:

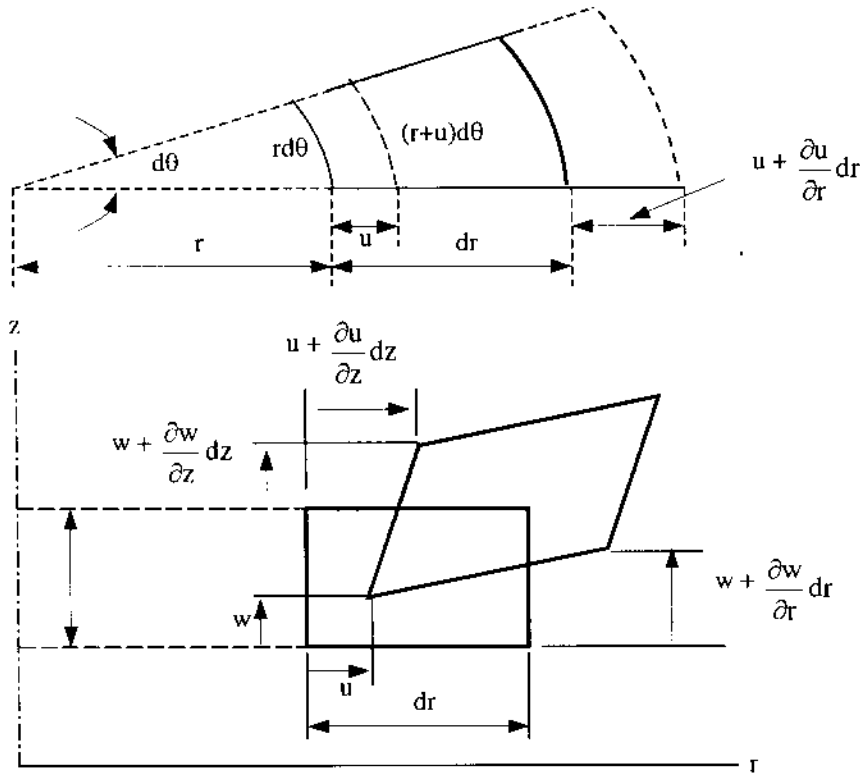
$$\text{Vectơ chuyển vị} \quad \mathbf{u} = [u \quad w]^T \quad (6.3)$$

$$\text{Vectơ lực thể tích} \quad \mathbf{f} = [f_r \quad f_z]^T \quad (6.4)$$

$$\text{Vectơ lực biên} \quad \mathbf{T} = [T_r \quad T_z]^T \quad (6.5)$$

Từ hình (6.3), ta có hệ thức giữa biến dạng  $\epsilon$  và chuyển vị  $u$  như sau:

$$\begin{aligned} \epsilon' &= [\epsilon_r \quad \epsilon_z \quad \gamma_{rz} \quad \epsilon_{\theta}] \\ &= \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad \frac{u}{r} \right] \end{aligned} \quad (6.6)$$



Hình 6.3: Biến dạng của phân tử thể tích

Vectơ ứng suất tương ứng

$$\boldsymbol{\sigma}' = [\sigma_r \quad \sigma_z \quad \tau_{rz} \quad \sigma_\theta] \quad (6.7)$$

Trong đó:  $\epsilon_r, \sigma_r$  - biến dạng và ứng suất trên phương ngang xuyên tâm r;

$\epsilon_z, \sigma_z$  - biến dạng và ứng suất trên phương z;

$\gamma_{rz}$  - ứng suất tiếp trên phương z;  $\epsilon_\theta$  - biến dạng trên phương chu vi tròn.

Hệ thức ứng suất - biến dạng

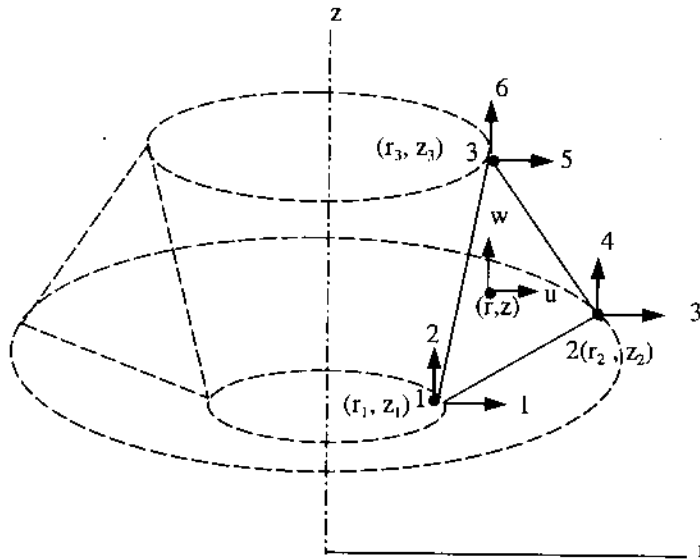
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} \quad (6.8)$$

Trong đó,  $\mathbf{D}$  là ma trận cấu trúc vật liệu cấp  $4 \times 4$ . Ma trận này được suy ra từ (1.17) (chương một) bằng cách bỏ các phân tử không thích hợp.

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

§6.3. MÔ HÌNH FTHH TAM GIÁC. HỆ THỨC BIẾN DẠNG - CHUYỂN VỊ

Miền 2 chiều xác định bởi diện tích xoay được chia thành các FTHH tam giác. Mặc dầu mỗi FTHH được biểu thị trong mặt phẳng rz nhưng trong thực tế nó là vật rắn tròn xoay tạo thành bởi sự xoay tam giác quanh trục z. Một FTHH có tính chất tiêu biểu như trên hình (6.4).



Hình 6.4: FTHH tam giác trong vật rắn tròn xoay

Sơ đồ liên kết giữa các FTHH và giữa các nút như đã trình bày trong các chương trước. Cần chú ý rằng các tọa độ r, z thay cho các tọa độ x, y.

Ở đây, ta dùng 3 hàm hình dạng  $N_1, N_2, N_3$  để biểu thị mối liên hệ giữa vectơ chuyển vị tại 1 điểm trong FTHH và vectơ chuyển vị tại các nút:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q} \quad (6.10)$$

Trong đó:  $\mathbf{u}$  tính theo (6.3)

Ma trận hàm hình dạng  $\mathbf{N}$  và vectơ chuyển vị  $\mathbf{q}$  tại các nút của FTHH như sau:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6]^T \quad (6.12)$$

Đặt  $N_1 = \xi, N_2 = \eta, N_3 = 1 - \xi - \eta$ ; hệ thức (6.10) có thể viết:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \xi\mathbf{q}_1 + \eta\mathbf{q}_3 + (1 - \xi - \eta)\mathbf{q}_5 \\ \mathbf{w} &= \xi\mathbf{q}_2 + \eta\mathbf{q}_4 + (1 - \xi - \eta)\mathbf{q}_6 \end{aligned} \quad (6.13)$$

Dạng biểu thị cùng tham số:

$$\begin{aligned} r &= \xi r_1 + \eta r_2 + (1 - \xi - \eta) r_3 \\ z &= \xi z_1 + \eta z_2 + (1 - \xi - \eta) z_3 \end{aligned} \quad (6.14)$$

Áp dụng nguyên tắc tính đạo hàm:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Trong đó,  $\mathbf{J}$  là ma trận Jacobian

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} r_{13} & z_{13} \\ r_{23} & z_{23} \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Trong đó:  $r_1, z_1$  - tọa độ trên phương  $r$  và trên phương  $z$  tại nút 1;

$r_2, z_2$  - tọa độ trên phương  $r$  và trên phương  $z$  tại nút 2;

$r_3, z_3$  - tọa độ trên phương  $r$  và trên phương  $z$  tại nút 3;

$r_{ij}, z_{ij}$  được định nghĩa như trong chương năm nghĩa là  $r_{ij} = r_i - r_j, z_{ij} = z_i - z_j$ .

Định thức của ma trận Jacobian

$$\det \mathbf{J} = r_{13} z_{23} - r_{23} z_{13} \quad (6.18)$$

Cần nhắc lại rằng  $|\det \mathbf{J}| = 2A$  nghĩa là giá trị tuyệt đối của định thức ma trận Jacobian bằng 2 lần diện tích của tam giác.

Các hệ thức nghịch đảo của (6.15) và (6.16).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} z_{23} & -z_{13} \\ -r_{23} & r_{13} \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Thay các hệ thức trên vào hệ thức biến dạng - chuyển vị (6.6) và căn cứ vào (6.13), ta được:

$$\varepsilon = \left\{ \begin{array}{c} \frac{z_{23}(q_1 - q_5) - z_{13}(q_3 - q_5)}{\det J} \\ \frac{-r_{23}(q_2 - q_6) - r_{13}(q_4 - q_6)}{\det J} \\ \frac{-r_{23}(q_1 - q_5) + r_{13}(q_3 - q_5) + z_{23}(q_2 - q_6) - z_{13}(q_4 - q_6)}{\det J} \\ \frac{N_1 q_1 + N_2 q_3 + N_3 q_5}{r} \end{array} \right\}$$

Dưới dạng ma trận:

$$\varepsilon = Bq \tag{6.21}$$

B là ma trận biến dạng - chuyển vị cấp  $4 \times 6$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{z_{23}}{\det J} & 0 & \frac{z_{31}}{\det J} & 0 & \frac{z_{12}}{\det J} & 0 \\ 0 & \frac{r_{32}}{\det J} & 0 & \frac{r_{13}}{\det J} & 0 & \frac{r_{21}}{\det J} \\ \frac{r_{32}}{\det J} & \frac{z_{23}}{\det J} & \frac{r_{13}}{\det J} & \frac{z_{31}}{\det J} & \frac{r_{21}}{\det J} & \frac{r_{12}}{\det J} \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & \frac{N_3}{r} & 0 \end{bmatrix} \tag{6.22}$$

## §6.4. MA TRẬN ĐỘ CỨNG CỦA FTHH. VECTƠ TẢI TRỌNG. TÁC DỤNG CỦA NHIỆT ĐỘ

### 6.4.1. Ma trận độ cứng của FTHH

Ta sẽ vận dụng nguyên lý công ảo áp dụng cho vật rắn tròn xoay để suy ra biểu thức của ma trận độ cứng và vectơ tải trọng

Căn cứ vào (6.2), công ảo của nội lực có thể viết

$$\delta U = 2\pi \int \delta'_\varepsilon \sigma \cdot r \, dA \tag{6.23a}$$

Công của ngoại lực:

$$\delta W = 2\pi \int \delta'_u \cdot f \, r dA + \int \delta'_u \cdot \text{Trdl} \tag{6.24a}$$

Trong đó:  $\delta'_\varepsilon$  - vectơ biến dạng ảo;

$\delta'_u$  - vectơ chuyển vị ảo.

Vì  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{q}$  nên  $\delta_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{B} \delta_{\mathbf{q}}$ ;  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{q}$

Vì  $\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{q}$  nên  $\delta_{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \delta_{\mathbf{q}}$

Trong đó:  $\delta_{\mathbf{q}}$  - vectơ chuyển vị ảo tại các nút.

Thay các hệ thức trên vào (6.23a):

$$\delta U = \delta'_{\mathbf{q}} \left[ (2\pi \mathbf{B}' \mathbf{D} \mathbf{B} \cdot r dA) \mathbf{q} \right] \quad (6.23b)$$

Thay các hệ thức trên vào (6.24a)

$$\delta W = \delta'_{\mathbf{q}} \left( 2\pi \int \mathbf{N}'^s \mathbf{f} \cdot \mathbf{r} \, dA + 2\pi \int \mathbf{N}'^s \mathbf{T} r d\ell \right) \quad (6.24b)$$

Vận dụng nguyên lý công ảo  $\delta U = \delta W$ , ta được:

$$\left( 2\pi \int \mathbf{B}' \mathbf{D} \mathbf{B} \cdot r dA \right) \mathbf{q} = 2\pi \int \mathbf{N}' \cdot \mathbf{f} r dA + 2\pi \int \mathbf{N}' \cdot \mathbf{T} r d\ell$$

hoặc  $\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{q} = \mathbf{f}_t + \mathbf{f}_b$

Trong đó, ma trận độ cứng của FTHH:

$$\mathbf{k}_c = 2\pi \int \mathbf{B}' \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \, r dA \quad (6.25)$$

Véc tơ lực thể tích:  $\mathbf{f}_t = 2\pi \int \mathbf{N}'^s \cdot \mathbf{f} \cdot r dA \quad (6.26a)$

Vectơ lực biên:  $\mathbf{f}_b = 2\pi \int \mathbf{N}'^s \mathbf{T} r d\ell \quad (6.27a)$

Trong đó,  $\mathbf{N}'^s$  là ma trận hàm hình dạng ứng với cạnh có lực biên tác dụng.

Ta chú ý rằng hàng thứ 4 của ma trận  $\mathbf{B}$  (công thức 6.22) có các số hạng  $N_i/r$ . Hơn nữa, trong tích phân (6.25), cũng có thừa số  $r$ . Một cách gần đúng, ta có thể tính  $\mathbf{B}$  và  $r$  tại trọng tâm của FTHH tam giác. Tại đó:

$$N_1 = N_2 = N_3 = \frac{1}{3}$$

và  $\bar{r} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} \quad (6.28)$

Trong đó,  $\bar{r}$  là bán kính của trọng tâm FTHH tam giác. Gọi  $\bar{\mathbf{B}}$  là ma trận biến dạng - chuyển vị ứng với trọng tâm của FTHH tam giác, từ (6.25) ta có:

$$\mathbf{k}_c = 2\pi \bar{r} \bar{\mathbf{B}}' \cdot \mathbf{D} \cdot \bar{\mathbf{B}} \int dA$$

hay  $\mathbf{k}_c = 2\pi \bar{r} A_c \bar{\mathbf{B}}' \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}}$

Ta chú ý rằng  $2\pi \bar{r} A_c$  là thể tích của vật tròn xoay biểu thị trên hình (6.5) và  $A_c$  là diện tích của FTHH tam giác:

$$A_c = \frac{1}{2} |\det \mathbf{J}| \quad (6.30)$$

6.4.2. Vector tải trọng

Theo (6.26a), ta có vector lực thể tích:

$$f_t = 2\pi \int N^T f_r dA \tag{6.26b}$$

Thay N từ (6.11) và f từ (6.4) vào (6.26b), ta được:

$$f_t = 2\pi \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_r \\ f_z \end{bmatrix} r dA$$

Sau khi thực hiện phép nhân ma trận

$$f_t = 2\pi [N_1 f_r \quad N_1 f_z \quad N_2 f_r \quad N_2 f_z \quad N_3 f_r \quad N_3 f_z] r dA$$

Một cách gần đúng, ta tính các hàm hình dạng  $N_1, N_2, N_3$  và bán kính  $r$  tại trọng tâm của tam giác. Gọi  $\bar{r}$  là bán kính của trọng tâm tam giác. Vì  $N_1 = N_2 = N_3 = \frac{1}{3}$  nên cuối cùng, ta được:

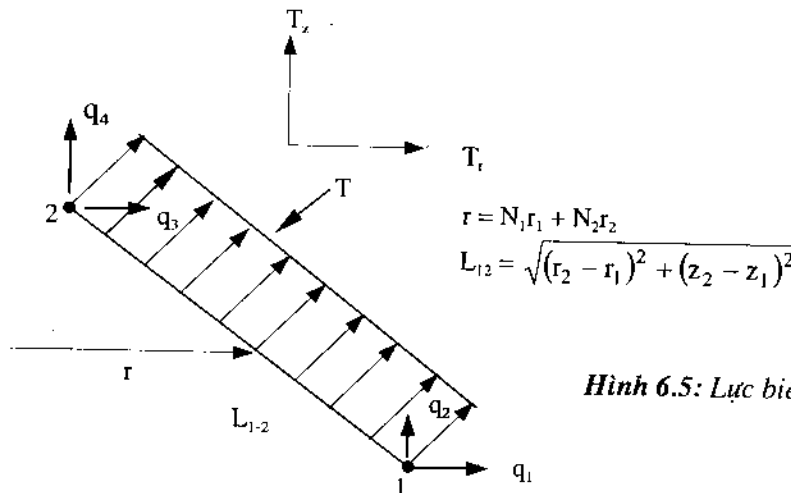
$$f_t = \frac{2\pi \bar{r} A_e}{3} [\bar{f}_r \quad \bar{f}_z \quad \bar{f}_r \quad \bar{f}_z \quad \bar{f}_r \quad \bar{f}_z]^T \tag{6.31}$$

Trong đó,  $\bar{f}_r, \bar{f}_z$  là các lực thể tích tính tại trọng tâm của tam giác.

Theo (6.27a), ta có vector lực biên

$$f_b = 2\pi \int N^T T r d\ell \tag{6.27b}$$

Trong đó,  $N^T$  là ma trận hàm hình dạng ứng với cạnh của tam giác trên đó có lực biên tác dụng. Chẳng hạn, đó là cạnh 1-2 trên hình (6.5).



Hình 6.5: Lực biên tác dụng trên cạnh 1-2



Trong trường hợp này,  $N_3 = 0$ ,  $N_1 + N_2 = 1$ . Thay ma trận hàm hình dạng  $\mathbf{N}$  từ (6.11),  $\mathbf{T}$  từ (6.5) và  $r = N_1 r_1 + N_2 r_2$  từ (6.14) vào (6.27b), ta được:

$$\mathbf{f}_b = 2\pi \int \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_r \\ T_z \end{bmatrix} (N_1 r_1 + N_2 r_2) d\ell$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận và chỉnh lý các kết quả tính toán, ta được:

$$\mathbf{f}_b = 2\pi \begin{bmatrix} \left( r_1 \int N_1^2 d\ell + r_2 \int N_1 N_2 d\ell \right) & 0 \\ 0 & \left( r_1 \int N_1^2 d\ell + r_2 \int N_1 N_2 d\ell \right) \\ \left( r_1 \int N_1 N_2 d\ell + r_2 \int N_2^2 d\ell \right) & 0 \\ 0 & r_1 \int N_1 N_2 d\ell + r_2 \int N_2^2 d\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_r \\ T_z \end{bmatrix} \quad (6.27c)$$

Có thể chứng minh được rằng  $\int N_1^2 d\ell = \int N_2^2 d\ell = \frac{L_{12}}{3}$  và  $\int N_1 N_2 d\ell = \frac{L_{12}}{6}$ .

Thay các kết quả này vào (6.27c) và chỉnh lý kết quả tính toán, cuối cùng ta được:

$$\mathbf{f}_b = 2\pi L_{1-2} \begin{bmatrix} aT_r & aT_z & bT_r & bT_z \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

Trong đó: 
$$a = \frac{2r_1 + r_2}{6} \quad b = \frac{r_1 + 2r_2}{6} \quad (6.33)$$

Chiều dài của cạnh 1-2

$$L_{1-2} = \sqrt{(r_2 - r_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (6.34)$$

Khi cạnh 1-2 song song với trục z, ta có  $r_1 = r_2$ , do đó  $a = b = 0,5r_1$ .

Ở trên, ta đã suy ra các biểu thức của vectơ lực thể tích  $\mathbf{f}_t$  và vectơ lực biên  $\mathbf{f}_b$ . Nếu có tải trọng phân bố dọc theo chu vi vòng tròn trên bề mặt vật rắn tròn xoay, ta phải cộng thêm lực tập trung đó vào các nút của FTHH tam giác.

Sau khi ghép các ma trận độ cứng của các FTHH và ghép các vectơ tải trọng, ta được hệ phương trình cân bằng tổng thể.

$$\mathbf{KQ} = \mathbf{F} \quad (6.35)$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị tại các nút.

Căn cứ vào (6.21), ứng suất tính như sau:

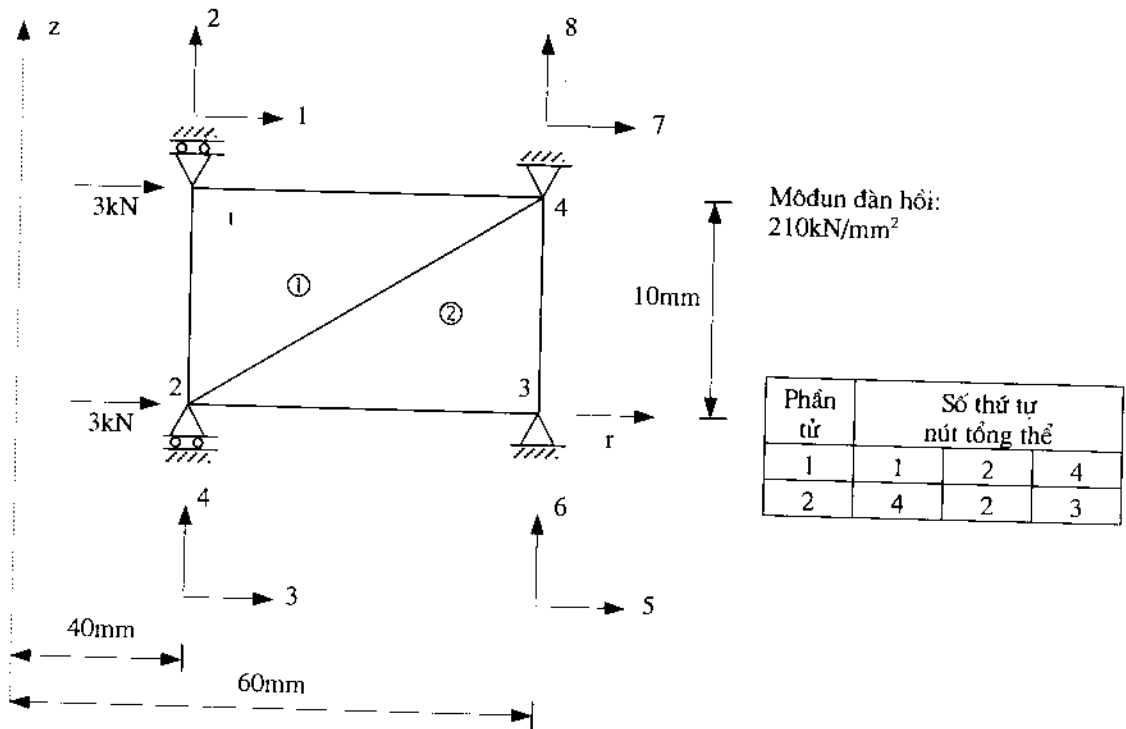
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}.\bar{\mathbf{B}}.\mathbf{q} \quad (6.36)$$

Trong đó:  $\bar{\mathbf{B}}$  là ma trận  $\mathbf{B}$  trong (6.22) ứng với trọng tâm của tam giác.

\* Chứng minh ở cuối chương

Hai ứng suất chính  $\sigma_1, \sigma_2$  ứng với  $\sigma_r, \sigma_z, \tau_{rz}$  tính theo vòng tròn  $M_0$ .

Ví dụ 6.1: Mô hình FTHH trong 1 vật thể tròn xoay như trên hình (6.6)



Hình 6.6

Tính: Chuyển vị  
Ứng suất

Giải:

Số phần tử : 2

Số BTĐ : 8

Số BTĐ có chuyển vị triệt tiêu: 6

Thứ tự số BTĐ có chuyển vị triệt tiêu: 2, 4, 5, 6, 7, 8

Tính ma trận cấu trúc vật liệu theo (6.9)

$$D = \begin{bmatrix} 282,692 & 121,154 & 0 & 121,154 \\ & 282,692 & 0 & 121,154 \\ \text{Đối xứng} & & 80,769 & 0 \\ & & & 282,692 \end{bmatrix}$$

Tính các ma trận B theo (6.22)



Kết quả tính:

$$Q_1 = 1,585 \times 10^{-4} \text{m} \qquad Q_3 = 1,510 \times 10^{-4} \text{ mm}$$

Giá trị các thành phần chuyển vị của các phân tử:

Phần tử 1:

$$[q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_7 \ q_8]' = [1,585 \times 10^{-4} \ 0 \ 1,510 \times 10^{-4} \ 0 \ 0 \ 0]$$

Phần tử 2:

$$[q_7 \ q_8 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6]' = [0 \ 0 \ 1,510 \times 10^{-4} \ 0 \ 0 \ 0]$$

Tính ứng suất theo (6.36)

Phần tử 1:

$$\sigma'_1 = [-1,973 \times 10^{-3} \ -6,924 \times 10^{-4} \ 6,078 \times 10^{-5} \ -3,353 \times 10^{-4}] \text{ kN/mm}^2$$

Phần tử 2:

$$\sigma'_2 = [-2,02 \times 10^{-3} \ -8,003 \times 10^{-4} \ 0 \ -6,478 \times 10^{-4}] \text{ kN/mm}^2$$

### 6.4.3. Tác dụng của nhiệt độ

Độ biến thiên đồng đều trên các phương của nhiệt độ  $\Delta T$  sản sinh ra biến dạng ban đầu  $\epsilon_0$ :

$$\epsilon_0 = [\alpha \Delta T \ \alpha \Delta T \ 0 \ \alpha \Delta T] \tag{6.37}$$

Ứng suất có thể viết (theo 6.36)

$$\sigma = \mathbf{D}(\epsilon - \epsilon_0) \tag{6.38}$$

Thay  $\sigma$  từ (6.28) vào (6.23a), ta có công thức của nội lực:

$$\delta U = 2\pi \int \delta'_\epsilon \sigma r dA - 2\pi \int \delta'_\epsilon \mathbf{D} \epsilon_0 r dA \tag{6.39}$$

Công ảo của ngoại lực vẫn tính theo (6.24b)

Sau khi thay  $\delta_\epsilon = \mathbf{B} \delta_q$  và  $\epsilon = \mathbf{B}q$  vào (6.39) và cho  $\delta U = \delta W$ , ta được:

$$(2\pi \int \mathbf{B}' \mathbf{D} \mathbf{B} \ r dA) q = 2\pi \int \mathbf{B}' \mathbf{D} \epsilon_0 r dA + f_t + f_b$$

hoặc

$$\mathbf{k}_e \cdot q = f_n + f_t + f_b \tag{6.40}$$

Trong đó:  $\mathbf{k}_e$  - ma trận độ cứng của FTHH, vẫn tính theo công thức (6.29);

$f_t, f_b$  vẫn tính theo các công thức (6.31) và (6.32);

$f_n$  - vectơ tải trọng do sự biến thiên của nhiệt độ gây ra:

$$f_n = 2\pi \int \mathbf{B}' \mathbf{D} \epsilon_0 r dA \tag{6.41a}$$

Nếu tính  $\mathbf{B}$ ,  $r$ ,  $\epsilon_0$  tại trọng tâm của FTHH, (6.41a) được đưa về dạng:

$$f_n = 2\pi r A_c \overline{\mathbf{B}' \mathbf{D} \epsilon_0} \tag{6.41}$$

$f_n$  là một vectơ cột:

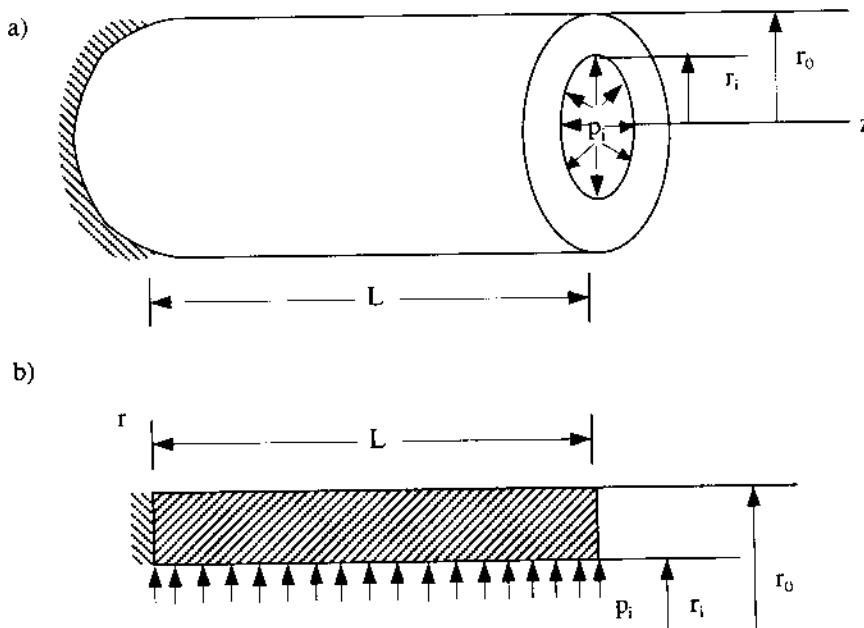
$$f_n = [f_n^1 \quad f_n^2 \quad f_n^3 \quad f_n^4 \quad f_n^5 \quad f_n^6]^T \quad (6.42)$$

Trong đó:  $f_n^i$  là thành phần tải trọng do sự biến thiên nhiệt độ gây ra men theo BTĐ thứ  $i$  của FTHH.

### §6.5. MỘT SỐ THÍ DỤ VỀ CÁCH XỬ LÝ CÁC ĐIỀU KIỆN BIÊN TRONG VẬT RẮN TRÒN XOAY

Như trong phần trước đã trình bày, khi tính vật rắn tròn xoay chịu tải trọng đối xứng, ta chỉ xét mặt phẳng xuyên tâm đi qua trục  $z$  vì biến dạng và ứng suất chỉ phát sinh trong mặt đó, chúng không phụ thuộc vào góc xoay. Vì vậy, ở đây, ta cũng chỉ xét các điều kiện biên trong mặt phẳng nói trên.

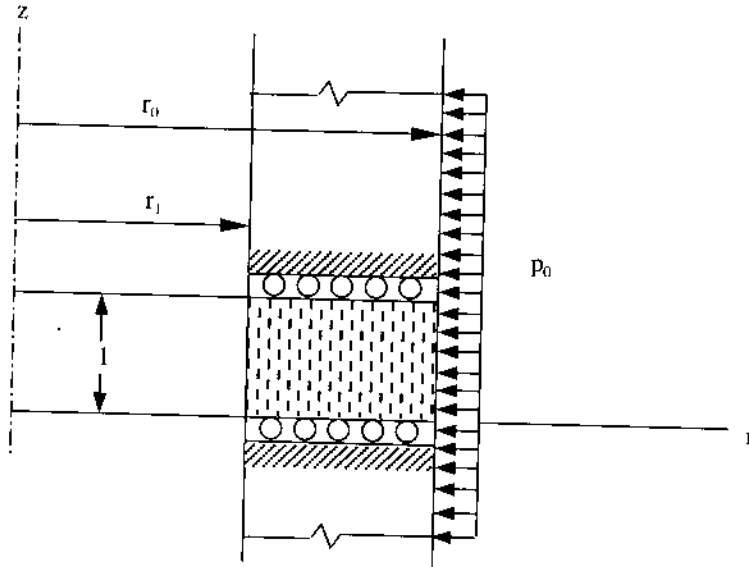
#### - Hình trụ rỗng chịu áp lực bên trong



*Hình 6.7: Hình trụ rỗng chịu áp lực đều ở bên trong*

Trên hình (6.7a) là một hình trụ rỗng chịu áp lực đều ở bên trong và có một đầu cố định vào tường. Khi tính toán, ta chỉ xét mặt xuyên tâm hình chữ nhật có gạch chéo giới hạn bởi 2 bán kính  $r_0$  và  $r_1$ , một đầu ngàm và chiều dài bằng  $L$  (hình 6.7b). Tại đầu ngàm, chuyển vị triệt tiêu trên phương  $r$  cũng như trên phương  $z$ . Do đó, nếu tính theo mô hình lò xo, ma trận độ cứng và vectơ tải trọng phải được biến đổi ứng với các BTĐ ở gối tựa ngàm.

**Hình trụ rỗng dài vô hạn**

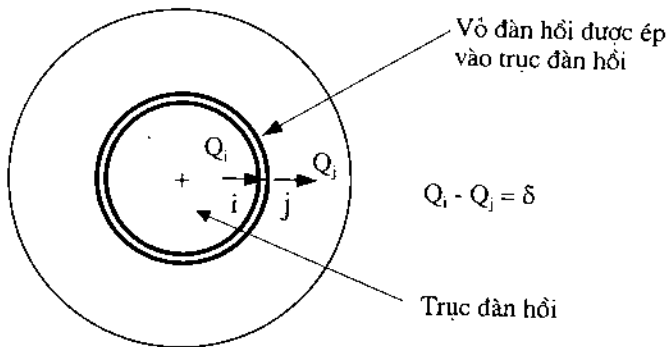


*Hình 6.8: Hình trụ rỗng dài vô hạn chịu áp lực bên ngoài*

Một hình trụ rỗng dài vô hạn và chịu áp lực bên ngoài biểu thị như trên hình (6.8). Với giả thiết kích thước chiều dài không đổi, bài toán biến dạng phẳng này được đưa về mô hình mặt xuyên tâm hình chữ nhật có chiều bằng đơn vị và có 2 cạnh biên men theo đó chuyển vị triệt tiêu trên phương z (hình 6.8).

**Vỏ đàn hồi ép vào trục đàn hồi**

Một vỏ đàn hồi được ép vào để tiếp xúc với một trục đàn hồi như trên hình (6.9), khoảng cách giữa vỏ và trục là  $\delta$ .



*Hình 6.9: Vỏ đàn hồi được ép vào trục đàn hồi*

Trong trường hợp này, ta đưa về mô hình một cặp nút i và j trên biên tiếp xúc, một nút nằm trên trục, một nút nằm trên ống bao (hình 6.9). Nếu  $Q_i$  và  $Q_j$  là các chuyển vị men theo các BTĐ xuyên tâm, ta có điều kiện biên cần được thỏa mãn.

$$Q_j - Q_i = \delta \quad (6.43)$$

Điều kiện biên trên là một ràng buộc nhiều điểm đã được đề cập trong chương ba. Áp dụng phương pháp mô hình lò xo, ta có phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}C(Q_j - Q_i - \delta)^2 &= \frac{1}{2}CQ_i^2 + \frac{1}{2}CQ_j^2 - \frac{1}{2}C(Q_iQ_j + Q_jQ_i) \\ &+ CQ_i\delta - CQ_j\delta + \frac{1}{2}C\delta^2 \end{aligned} \quad (6.44)$$

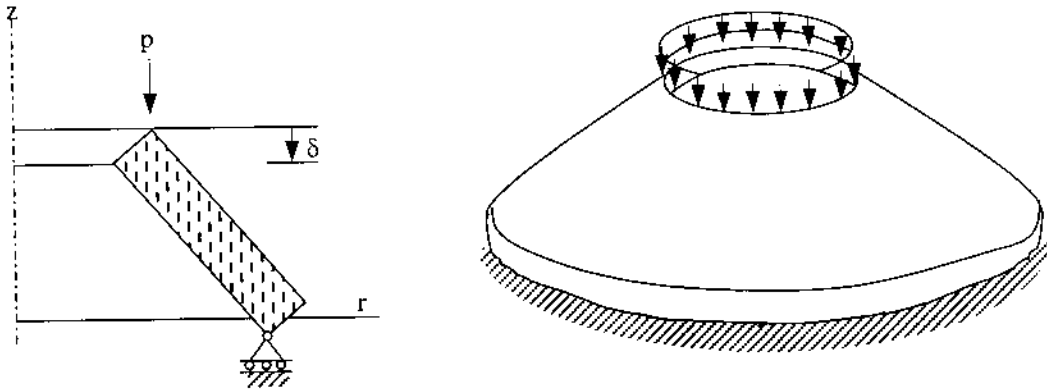
Phương trình trên đưa đến sự biến đổi ma trận độ cứng và vectơ tải trọng:

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} K_{ii} + C & K_{ij} - C \\ K_{ji} - C & K_{jj} + C \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

$$\begin{bmatrix} F_i \\ F_j \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} F_i - C\delta \\ F_j + C\delta \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

### - Lò xo Belleville

Lò xo Belleville là một loại đĩa hình côn. Nó chịu tác dụng của tải trọng men theo chu vi vòng tròn ở phía trên và tựa lên gối tựa lặn ở phía dưới (hình 6.10). Sơ đồ tính toán đưa về mô hình hình chữ nhật gạch chéo chịu tải trọng đối xứng P ở góc phía trên, góc phía dưới có chuyển vị triệt tiêu trên phương z. Vì tải trọng thẳng đứng, mép của lò xo chuyển vị hướng ra ngoài.

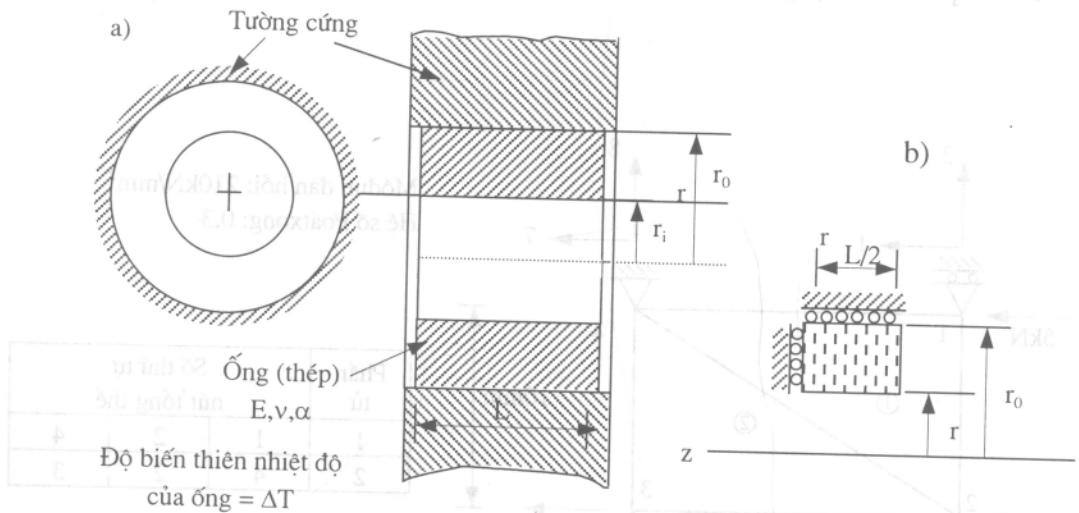


Hình 6.10: Lò xo Belleville

### Bài toán ứng suất nhiệt

Một ống thép được đút vào một tường cứng như trên hình (6.11). Ống tiếp xúc với tường và nhiệt độ tăng lên  $\Delta T$ . Do bị tường ngăn cản, ứng suất trong ống tăng lên. Sơ đồ tính toán đưa về mô hình hình chữ nhật có chiều dài bằng  $L/2$  và có chiều rộng giới hạn bởi các bán kính  $r_1$  và  $r_0$  (hình 6.11b). Các điểm nằm trên chu vi ngoài không có chuyển vị trên phương xuyên tâm và các điểm ở cạnh bên trái không có chuyển vị trên phương

đọc trực. Vectơ tải trọng tương đương do biến thiên nhiệt độ gây ra, cần được xét đến theo (6.11).



Hình 6.11: Bài toán ứng suất nhiệt

## §6.6. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TÍNH VẬT RẮN TRÒN XOAY CHỊU TẢI TRỌNG ĐỐI XỨNG (CTR9)

### 1. Các điều cần tuân thủ

- Số thứ tự các BTD nên xếp theo số thứ tự của dãy số tự nhiên (1,2,3...). Số thứ tự các BTD không có chuyển vị nên bố trí ở các vị trí cuối cùng để tiện cho việc chia khối ma trận trong phương pháp loại trừ.

- Số thứ tự các nút trong một FTHH được đếm theo chiều *ngược kim đồng hồ*.

- Nói chung, số thứ tự BTD tại nút  $i$ , xác định như sau:

Trên phương  $r$ :  $2i - 1$

Trên phương  $z$ :  $2i$

### 2. Nhập các số liệu ban đầu theo các bảng sau (lấy thí dụ trên hình 6.12).

Số phần tử: 2

Số BTD có chuyển vị: 2

Tổng số BTD: 8

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 6

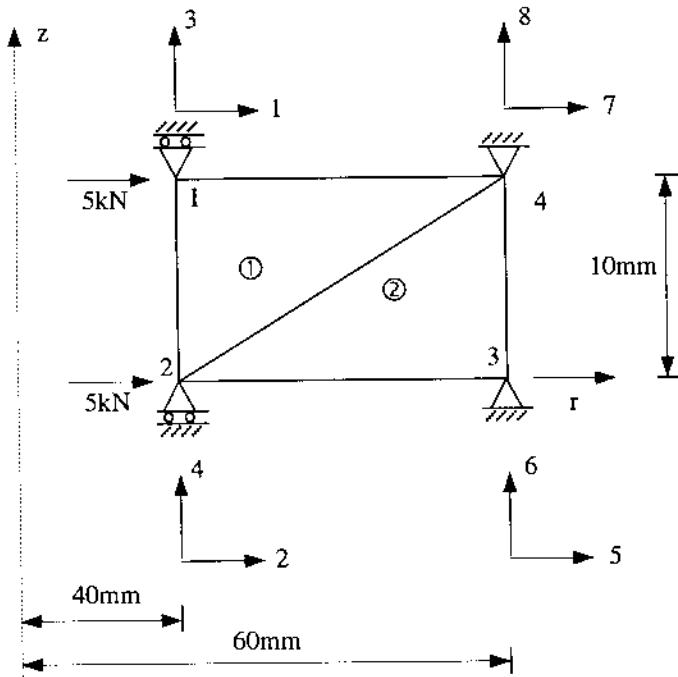
Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 3, 4, 5, 6, 7, 8



Mô đun đàn hồi:  $210 \text{ kN/mm}^2$

Hệ số Poátxong: 0,3

Thành phần tải trọng: 5; 5



Mô đun đàn hồi:  $210 \text{ kN/mm}^2$

Hệ số Poátxong: 0,3

Phần tử	Số thứ tự nút tổng thể		
	1	2	4
1	1	2	4
2	4	2	3

Hình 6.12

Số thứ tự BTD và các tọa độ thống kê trong bảng sau:

Phần tử	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$	$d_6$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$z_1$	$z_2$	$z_3$
1	1	3	2	4	7	8	40	40	60	10	0	10
2	7	8	2	4	5	6	60	40	60	10	0	0

3) Ghép các ma trận độ cứng riêng vào ma trận độ cứng tổng thể theo (6.29).

4) Ghép các vectơ tải trọng theo (6.31) và (6.32).

5) Giải hệ phương trình cân bằng theo phương pháp Gauss

6) Tính ứng suất theo (6.22), (6.9) và (6.36)

7) Tính phản lực theo phương pháp loại trừ và chia khối ma trận.

\* Chứng minh: 
$$\int N_1^2 d\ell = \int N_2^2 d\ell = \frac{L_{1-2}}{3}$$

$$\int N_1 N_2 d\ell = \frac{L_{1-2}}{6}$$

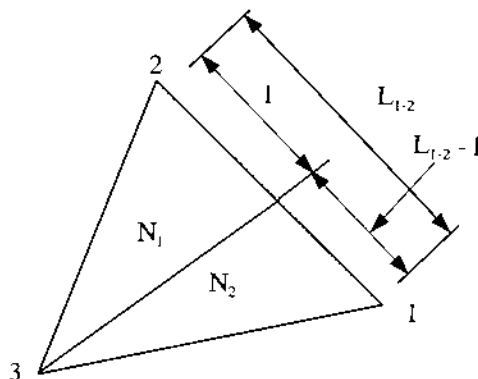
Trên cạnh 1-2,  $N_3 = 0$ ,  $N_1 + N_2 = 1$

Gọi h là chiều cao của tam giác

1 - 2 - 3: Theo định nghĩa:

$$N_1 = \frac{l \cdot h / 2}{L_{1-2} \cdot h / 2} = \frac{l}{L_{1-2}}$$

$$N_1^2 d\ell = \frac{1}{L_{1-2}^2} \int_0^{L_{1-2}} l^2 d\ell = \frac{L_{1-2}}{3}$$



Chứng minh một cách tương tự,  $\int N_2^2 d\ell = \frac{L_{1-2}}{3}$

$$N_1 N_2 = l(L_{1-2} - l) / L_{1-2}^2$$

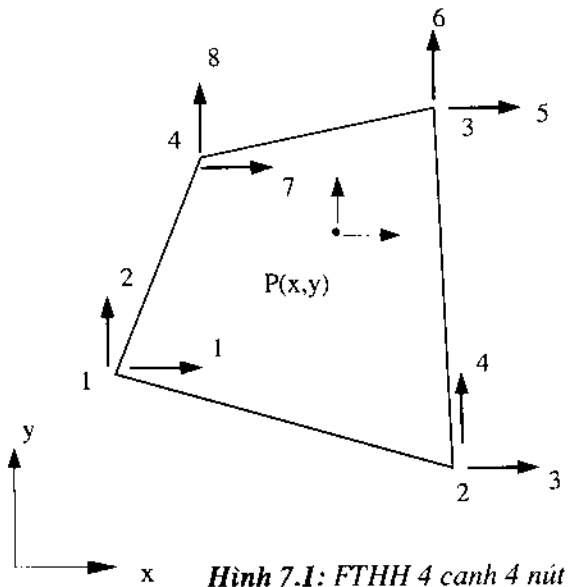
$$\int N_1 N_2 d\ell = \frac{1}{L_{1-2}^2} \int_0^{L_{1-2}} l(L_{1-2} - l) d\ell = \frac{L_{1-2}}{6}$$

Chương 7

**PHẦN TỬ HỮU HẠN CÙNG THAM SỐ HAI CHIỀU -  
PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN BẰNG SỐ**

Trong các chương 5 và 6, ta đã đề cập đến phương pháp phân tích ứng suất và biến dạng trong trường hợp FTHH là một tam giác có biến dạng không đổi. Trong chương này, ta sẽ nghiên cứu các FTHH cùng tham số và áp dụng chúng vào việc phân tích ứng suất và biến dạng. Các FTHH thuộc loại này đã tỏ ra có hiệu lực trong nhiều bài toán 2 chiều và 3 chiều. Ta sẽ tập trung nghiên cứu một cách chi tiết loại FTHH 4 cạnh, 4 nút để suy ra ma trận độ cứng riêng. Đối với FTHH bậc cao hơn, ta cũng thực hiện các bước tương tự như đối với FTHH 4 cạnh 4 nút. Phương pháp tích phân bằng số sẽ được trình bày để tính ma trận độ cứng và ứng suất.

§7.1. PHẦN TỬ HỮU HẠN 4 CẠNH 4 NÚT



Hình 7.1: FTHH 4 cạnh 4 nút

Xét hình 4 cạnh 4nút trên hình (7.1). Số thứ tự cục bộ của các nút 1, 2, 3, 4 được đếm theo *chiều ngược kim đồng hồ*.

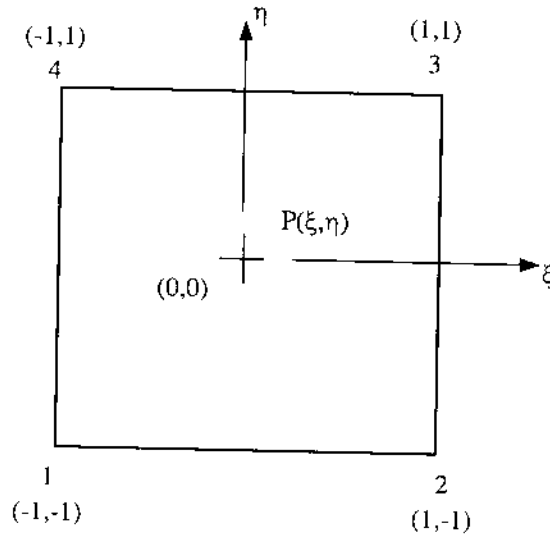
Vec tơ các thành phần chuyển vị men theo các BTD trên hình (7.1) tại các nút là:

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6 \quad q_7 \quad q_8] \quad (7.1)$$

Vectơ các thành phần chuyển vị tại một điểm P có tọa độ (x, y) trong FTHH là:

$$\mathbf{u} = \left[ u(x, y) \quad v(x, y) \right] \quad (7.2)$$

### 7.1.1. Hàm hình dạng



Hình 7.2: FTHH 4 cạnh trong hệ tọa độ tự nhiên

Trước hết, ta suy ra hàm hình dạng cho FTHH hình vuông (hình 7.2) trong hệ tọa độ tự nhiên  $\xi$  và  $\eta$ . Hàm hình dạng Lagrange  $N_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) được định nghĩa như sau:  $N_i$  bằng đơn vị tại nút  $i$  và bằng 0 tại các nút còn lại. Chẳng hạn, đối với nút 1:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 && \text{tại nút 1} \\ N_1 &= 0 && \text{tại các nút 2, 3, 4} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Điều kiện  $N_1 = 0$  tại các nút 2, 3, 4 tương đương với điều kiện  $N_1 = 0$  dọc theo các cạnh  $\xi = +1$  và  $\eta = +1$  (hình 7.2). Vậy  $N_1$  phải có dạng:

$$N_1 = C (1 - \xi) (1 - \eta) \quad (7.4)$$

Trong đó,  $C$  là hằng số. Hằng số này được xác định từ điều kiện  $N_1 = 1$  tại nút 1 tại đó  $\xi = -1$  và  $\eta = -1$ . Nghĩa là:  $1 = c \times 2 \times 2$

$$\text{Vậy } c = \frac{1}{4} \text{ và } N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$$

4 hàm hình dạng có các dạng sau:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (7.5)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

Để tiện cho việc lập trình, ta biểu thị:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i + \eta\eta_i) \quad (7.6)$$

Trong đó:  $(\xi, \eta)$  là tọa độ của nút  $i$ .

Bây giờ, ta sẽ thông qua các thành phần chuyển vị tại các nút của FTHH để biểu thị các thành phần chuyển vị tại 1 điểm trong FTHH. Theo hình 7.1 và 7.2,  $\mathbf{u} = [u \quad v]^T$  là vectơ chuyển vị tại điểm có tọa độ tự nhiên  $(\xi, \eta)$  (hình 7.2) và  $\mathbf{q}$  là vectơ chuyển vị cấp  $8 \times 1$  tại các nút của FTHH. Ta có thể viết:

$$\begin{aligned} u &= N_1q_1 + N_2q_3 + N_3q_5 + N_4q_7 \\ v &= N_1q_2 + N_2q_4 + N_3q_6 + N_4q_8 \end{aligned} \quad (7.7a)$$

Dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{q} \quad (7.7b)$$

Trong đó: 
$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

Nếu cũng thông qua các hàm hình dạng trên để biểu thị tọa độ tại một điểm trong FTHH bằng tọa độ của các điểm nút, thì ta có dạng biểu thị cùng tham số như sau:

$$\begin{aligned} x &= N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + N_4x_4 \\ y &= N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4 \end{aligned} \quad (7.9)$$

Trong đó:  $x, y$  - tọa độ tại một điểm trong FTHH;

$x_i, y_i$  - tọa độ của nút  $i$  trên phương  $x; y_i$  - tọa độ của nút  $i$  trên phương  $y$ .

Giả sử  $f$  là một hàm bất kỳ của  $x, y$  và  $x, y$  là những hàm của  $(\xi, \eta)$ , nghĩa là  $f$  là một hàm ẩn của  $(\xi, \eta)$  do đó  $f = f[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$ . Theo nguyên tắc tính đạo hàm riêng.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (7.10)$$

hay: 
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

Trong đó  $\mathbf{J}$  là ma trận Jacobian

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

Từ (7.5) và (7.9), ta có:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta)x_1 + (1-\eta)x_2 + (1+\eta)x_3 - (1+\eta)x_4 & -(1-\eta)y_1 + (1-\eta)y_2 + (1+\eta)y_3 - (1+\eta)y_4 \\ -(1-\xi)x_1 - (1+\xi)x_2 + (1+\xi)x_3 + (1-\xi)x_4 & -(1-\xi)y_1 - (1+\xi)y_2 + (1+\xi)y_3 + (1-\xi)y_4 \end{bmatrix} \quad (7.13a)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (7.13b)$$

Từ (7.11):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (7.14a)$$

hoặc:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (7.14b)$$

Các hệ thức trên sẽ được dùng để suy ra ma trận độ cứng của FTHH. Ngoài các kết quả trên, có thể chứng minh được rằng

$$dx dy = \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad (7.15)$$

### 7.1.2. Ma trận độ cứng của FTHH. Vectơ tải trọng

Hệ thức biến dạng - chuyển vị có thể viết:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{pmatrix} \quad (7.16)$$

Đặt  $f = u$ , từ (7.14b), ta có:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

Một cách tương tự, khi  $f = v$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

Căn cứ vào (7.16), (7.17), (7.18), ta có:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (7.19)$$

Trong đó: 
$$\mathbf{A} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

Từ 7.7a): 
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \mathbf{G} \mathbf{q} \quad (7.21)$$

Trong đó:

$$\mathbf{G} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) & 0 \\ -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) & 0 \\ 0 & -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) \\ 0 & -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

Từ (7.19) và (7.21), hệ thức biến dạng - chuyển vị

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{q} \quad (7.23)$$

Trong đó:  $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{G}$  (7.24)

Ứng suất:  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$

Theo (7.23):  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{q}$  (7.25)

Bây giờ, ta vận dụng nguyên lý công ảo để suy ra ma trận độ cứng và vectơ tải trọng.

**- Ma trận độ cứng:**

Áp dụng (2.79) (chương hai) cho bài toán 2 chiều, ta có ma trận độ cứng

$$\mathbf{k} = \iiint \mathbf{B}'\mathbf{D}\mathbf{B} \, dV \quad (a)$$

nhưng  $dV = h \, dx \, dy$

Trong đó:  $h$  - bề dày của kết cấu.

Theo (7.15)  $dx \, dy = \det \mathbf{J} \, d\xi \, d\eta$ . Thay các đại lượng trên vào (a):

$$\mathbf{k}_e = h_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}'\mathbf{D}\mathbf{B} \det \mathbf{J} \, d\xi \, d\eta \quad (7.26)$$

$\mathbf{k}_e$  là ma trận cấp  $8 \times 8$ . Cần chú ý rằng điều khác với các chương trước là các ma trận  $\mathbf{B}$  và  $\mathbf{J}$  đều là những hàm của các tọa độ tự nhiên  $(\xi, \eta)$ . Việc tính tích phân bằng số ma trận  $\mathbf{k}_e$  sẽ được đề cập trong phần sau.

**Vectơ tải trọng:**

*Véc tơ lực thể tích:*

Theo (2.80), ta có:  $\mathbf{f}_i = \iiint \mathbf{N}'\mathbf{f} \, dV$

Phân tích tương tự như trên, ta có vectơ lực thể tích

$$\mathbf{f}_i = h \left[ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}' \det \mathbf{J} \, d\xi \, d\eta \right] \cdot \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

(7.27) cũng cần được tích phân bằng số như (7.26)

*Véc tơ lực biên:*

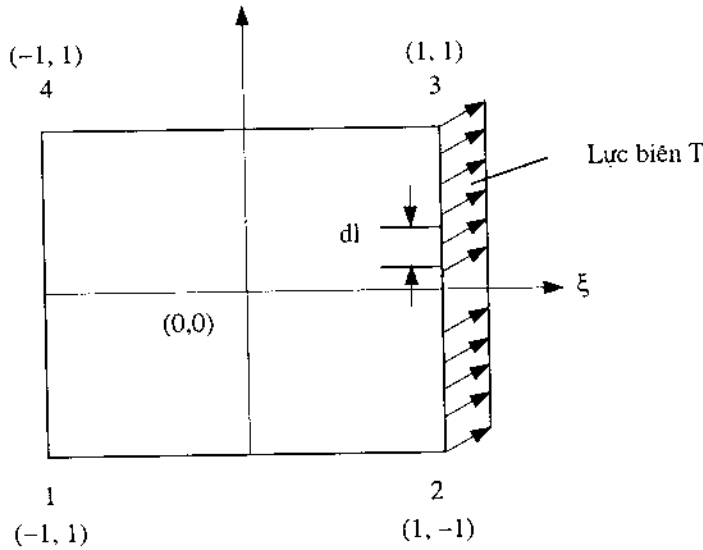
Theo (2.80), ta có vectơ lực biên

$$\mathbf{f}_b = \iint \mathbf{N}'^s \mathbf{T} \, ds \quad (7.28a)$$

Trong đó:  $\mathbf{N}'^s$  - ma trận hàm hình dạng men theo cạnh trên đó có lực biên tác dụng;  
 $ds = h \, dl$ ,  $h$  là bề dày của kết cấu,  $dl$  là phân tố đường thẳng men theo cạnh nói trên.

Giả sử lực biên phân bố đều tác dụng trên cạnh 2-3 (hình 7.3).





Hình 7.3: Lực biên tác dụng trên cạnh 2,3

Vectơ lực biên  $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_x & T_y \end{bmatrix}$  phân bố trên đơn vị diện tích. Dọc theo cạnh (2-3), ta có  $\xi = 1$ . Căn cứ vào (7.5), ta có:

$$N_1 = N_4 = 0$$

$$N_2 = (1 - \eta)/2$$

$$N_3 = (1 + \eta)/2$$

Theo các kết quả trên, (2.28a) có thể viết:

$$\mathbf{f}_b = h \int_0^{L_{2-3}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ (1-\eta)/2 & 0 \\ 0 & (1-\eta)/2 \\ (1+\eta)/2 & 0 \\ 0 & (1+\eta)/2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times dl \times \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} \quad (7.28b)$$

Vì  $\frac{1}{2} \int (1 \pm \eta) dl = \frac{L_{2-3}}{2}$  nên cuối cùng, ta có:

$$\mathbf{f}_b = h \cdot \frac{L_{2-3}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & T_x & T_y & T_x & T_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.28)$$

Trong đó:  $L_{2-3}$  - chiều dài của cạnh 2-3 trên đó có lực biên tác dụng.

## §7.2. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG SỐ

Trước hết, ta nghiên cứu bài toán tính bằng số tích phân một chiều có dạng:

$$I = \int_1^1 f(\xi) d\xi \quad (7.29)$$

Phương pháp cầu phương Gauss để tính tích phân I như sau.

Đây là phương pháp rất hữu hiệu trong lý thuyết phân tử hữu hạn. Nó có thể mở rộng cho các tích phân 2 chiều và 3 chiều.

Xét phép xấp xỉ n điểm:

$$I = \int_1^1 f(\xi) d\xi \approx w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2) + \dots + w_n f(\xi_n) \quad (7.30)$$

Trong đó:  $w_1, w_2, \dots, w_n$  gọi là *trọng lượng*;

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  gọi là các *điểm Gauss*.

Vấn đề đặt ra là chọn n điểm Gauss và n trọng lượng sao cho tích phân (7.30) cho lời giải chính xác đối với đa thức  $f(\xi)$  có bậc càng cao càng tốt. Nói một cách khác, tích phân (7.30) cần có giá trị chính xác dù bậc của đa thức cao đến bao nhiêu và ngay cả khi f không phải là đa thức. Trước hết, ta hãy nghiên cứu cách tính xấp xỉ trong trường hợp 1 điểm và 2 điểm.

### 7.2.1. Công thức một điểm

Với  $n = 1$ , ta có :

$$\int_1^1 f(\xi) d\xi \approx w_1 f(\xi_1) \quad (7.31)$$

Vì có 2 tham số  $w_1$  và  $\xi_1$ , ta yêu cầu công thức (7.31) phải chính xác khi  $f(\xi)$  là một đa thức bậc nhất  $f(\xi) = a_0 + a_1\xi$ . Tức là:

$$\text{Sai số: } = \int_1^1 (a_0 + a_1\xi) - w_1 f(\xi_1) = 0 \quad (7.32a)$$

hay:

$$\text{Sai số} = 2a_0 - w_1 (a_0 + a_1\xi) = 0 \quad (7.32b)$$

hay:

$$\text{Sai số} = a_0 (2 - w_1) - w_1 a_1 \xi_1 = 0 \quad (7.32c)$$

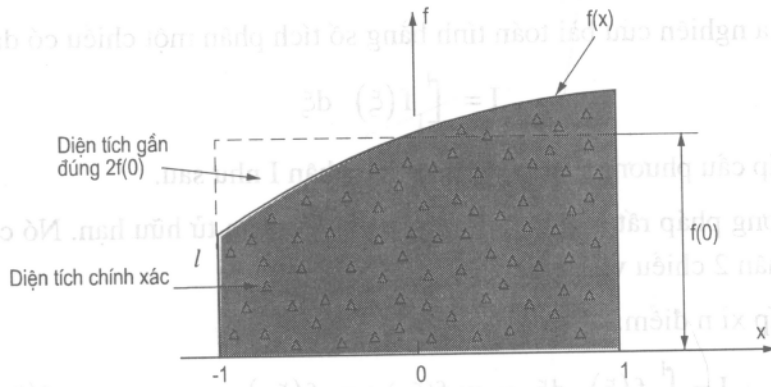
Từ (7.32c), ta thấy rằng sai số triệt tiêu khi

$$w_1 = 2 \quad \text{và} \quad \xi_1 = 0$$

Vậy:

$$I = \int_1^1 f(\xi) d\xi \approx 2.f(0) \quad (7.34)$$

Cách tính trên phù hợp với quy tắc điểm giữa (hình 7.4).



Hình 7.4: Phép cầu phương Gauss

### 7.2.2. Công thức hai điểm

Ta xét trường hợp 2 điểm Gauss ( $n = 2$ )

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2) \quad (7.35)$$

Có 4 tham số:  $w_1, w_2, \xi_1, \xi_2$ . Ta yêu cầu công thức (7.35) cho giá trị chính xác đối với đa thức bậc 3  $f(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3$ .

Nghĩa là:

$$\text{Sai số} = \left[ \int_{-1}^1 (a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3) d\xi \right] - [w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2)] = 0 \quad (7.36)$$

Để thỏa mãn phương trình trên:

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= 2 \\ w_1\xi_1 + w_2\xi_2 &= 0 \\ w_1\xi_1^2 + w_2\xi_2^2 &= 2/3 \\ w_1\xi_1^3 + w_2\xi_2^3 &= 0 \end{aligned} \quad (7.37)$$

Các phương trình phi tuyến tính trên có lời giải duy nhất khi

$$w_1 = w_2 = 1 - \xi_1 = \xi_2 = 1/\sqrt{3} = 0,5773502691 \quad (7.38)$$

Từ trên, có thể kết luận rằng phép cầu phương Gauss  $n$  điểm cho lời giải chính xác khi đa thức có bậc  $(2n-1)$  hoặc bé hơn.

Bảng (7.1) cho giá trị của  $W_i$  và  $\xi_i$  khi số điểm Gauss  $n$  bằng 1 đến 6. Cần chú ý rằng các điểm Gauss được đặt đối xứng so với điểm gốc và các điểm đối xứng có trọng lượng như nhau. Hơn nữa, các số có rất nhiều chữ số được dùng trong tính toán để bảo đảm độ chính xác.

**Bảng 7.1. Các điểm Gauss và trọng lượng trong phép cầu phương Gauss**

$$\int_{-1}^1 f(\xi) \approx \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i)$$

Số điểm	Vị trí	Trọng lượng
1	0,0	2,0
2	$\pm 1/\sqrt{3} = \pm 0.5773502692$	1,0
3	$\pm 0,7745966692$	0,5555555556
	0,0	0,8888888889
4	$\pm 0,8611363116$	0,3478548451
	$\pm 0,3399810436$	0,6521451549
5	$\pm 0,9061798459$	0,2369268851
	$\pm 0,5384693101$	0,4786286705
	0,0	0,5688888889
6	$\pm 0,9324695142$	0,1713244924
	$\pm 0,6612093865$	0,3607615730
	$\pm 0,2386191861$	0,4679139346

**Ví dụ 7.1:**

Dùng công thức một điểm và công thức hai điểm để tính tích phân sau:

$$I = \int_{-1}^1 \left[ 3e^x + x^2 + \frac{1}{(x+2)} \right] dx$$

*Giải:*

Căn cứ vào bảng (7.1)

$$n = 1: w_1 = 2, x_1 = 0 \text{ nên}$$

$$I = 2f(0)$$

$$= 7$$

$$n = 2: w_1 = w_2 = 1; x_1 = - 0,57735 \dots\dots\dots; x_2 = + 0,57735 \dots\dots\dots$$

$$I \approx 8,7857$$

Giá trị chính xác của tích phân  $I = 8,8165$

**7.2.3. Tích phân 2 chiều**

Phép cầu phương Gauss có thể mở rộng cho tích phân 2 chiều (hoặc tích phân kép).

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \tag{7.39}$$

Có thể viết một cách gần đúng:

$$I \approx \int_{-1}^1 \left[ \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i, \eta) \right] d\eta$$

$$\approx \sum_{j=1}^n w_j \left[ \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i, \eta_j) \right]$$

hay

$$I \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (7.40)$$

#### 7.2.4. Tích phân ma trận độ cứng

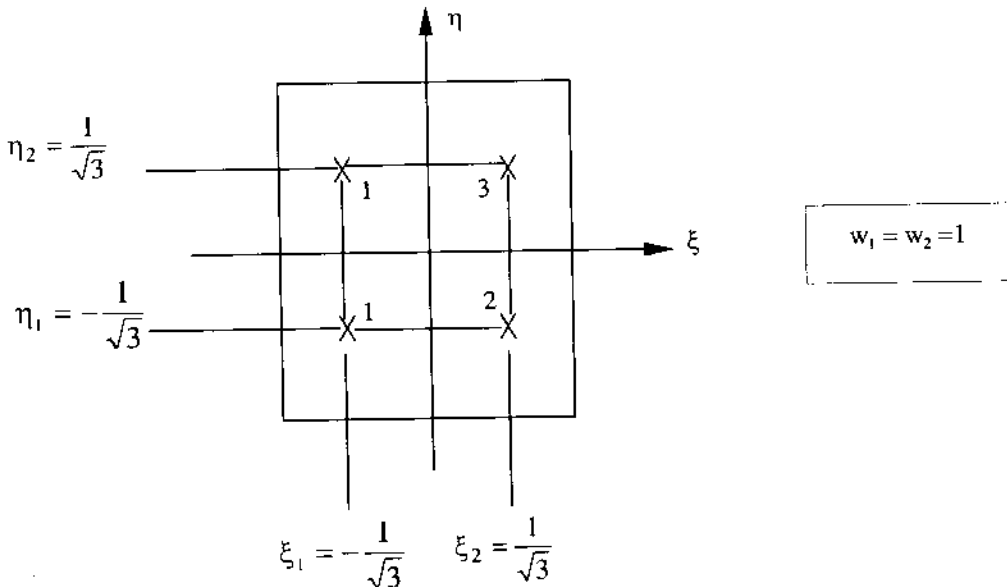
Xét tích phân ma trận độ cứng theo (7.26) :

$$k_e = h_c \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}' \mathbf{D} \mathbf{B} \det \mathbf{J} d\xi d\eta$$

Trong đó  $\mathbf{B}$  và  $\mathbf{J}$  là những hàm của  $\xi$  và  $\eta$ . Cần chú ý rằng tích phân trên bao gồm tích phân của mỗi phần tử trong ma trận độ cứng cấp  $8 \times 8$ . Tuy nhiên, do tính chất đối xứng của ma trận  $k_e$ , ta chỉ cần tính tích phân cho các phần tử của ma trận từ đường chéo chính trở lên.

Giả sử  $\phi(\xi, \eta)$  là hàm thứ  $ij$  dưới dấu tích phân trong ma trận  $k_e$ ;

$$\phi(\xi, \eta) = h_c (\mathbf{B}' \mathbf{D} \mathbf{B} \det \mathbf{J})_{ij} \quad (7.41)$$



$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx w_1^2 f(\xi_1, \eta_1) + w_2 w_1 f(\xi_2, \eta_1) + w_2^2 f(\xi_2, \eta_2) + w_1 w_2 f(\xi_1, \eta_2)$$

Hình 7.5: Phép cầu phương đối với tích phân 2 chiều ( $n = 2$ )

Theo (7.40), ta có phần tử thứ  $ij$  của ma trận  $k_e$ :

$$k_{ij} \approx w_1^2 \phi(\xi_1, \eta_1) + w_1 w_2 \phi(\xi_1, \eta_2) + w_2 w_1 \phi(\xi_2, \eta_1) + w_2^2 \phi(\xi_2, \eta_2) \quad (7.42a)$$

Trong (7.42a), ta dùng 2 điểm Gauss ( $n = 2$ );  $w_1 = w_2 = 1,0$ ;  $\xi_1 = \eta_1 = -0,57735 \dots$ ;  $\xi_2 = \eta_2 = +0,57735 \dots$  (bảng 7.1).

Nếu ta tính  $k_{ij}$  cho 4 điểm 1, 2, 3, 4 như trên hình 7.5, (7.42a) có thể viết:

$$k_{ij} = \sum_{IP=1}^4 W_{IP} \phi_{IP} \quad (7.42b)$$

Trong đó,  $\phi_{IP}$  và  $W_{IP}$  là giá trị của  $\phi$  và của  $W$  tại các điểm tích phân IP (hình 7.5).

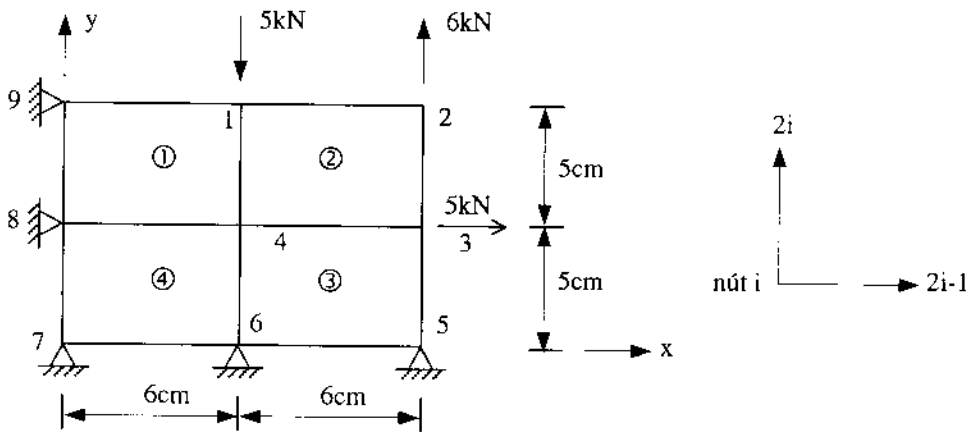
Đối với các tích phân 3 chiều (hoặc tích phân 3 lớp), cách tính cũng tương tự như trên.

### 7.2.5. Tính ứng suất

Khác với trường hợp FTHH tam giác có biến dạng không đổi đã nghiên cứu trong các chương 5 và 6, ứng suất  $\sigma = DBq$  lại biến đổi trong phạm vi FTHH 4 cạnh. Nó là hàm của  $\xi, \eta$ , nên cần được tính tại các điểm Gauss như khi tính  $k_e$ .

Đối với FTHH 4 cạnh, ta có 4 giá trị ứng suất tại 4 điểm (hình 7.5). Thông thường, để đơn giản, ta tính ứng suất tại điểm  $\xi = 0$  và  $\eta = 0$ .

**Ví dụ 7.2:** Cho một kết cấu có mô hình FTHH 4 cạnh 4 nút như trên hình (7.6).



**Hình 7.6**

Sơ đồ bố trí các nút cục bộ và các nút tổng thể biểu thị trong bảng (7.2)

**Bảng 7.2**

Phần tử	Nút cục bộ				Nút tổng thể			
	1	2	3	4	1	9	8	4
1	1	2	3	4	1	9	8	4
2	1	2	3	4	1	4	3	2
3	1	2	3	4	4	6	5	3
4	1	2	3	4	8	7	6	4

Dùng chương trình CTR 13 tính:

- Chuyển vị;
- Ứng suất.

*Giải:*

Bài toán này có khối lượng tính rất lớn, không thể tính bằng tay mà phải nhờ vào sự hỗ trợ của máy tính điện tử.

Trình tự tính toán như sau:

1) Nhập số liệu

Số phần tử: 4 (hình 7.6)

Số BTD có chuyển vị: 8

Tổng số BTD:  $9 \times 2 = 18$

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 10

Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18

Bề dày tấm: 0,5cm

Hệ số poát xong: 0,3

Các thành phần tải trọng: 0; -5; 0; 6; 5; 0; 0; 0

Các số liệu khác thống kê trong bảng (7.3)

**Bảng 7.3**

Phần tử	Tọa độ (cm)							
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
1	6	0	0	6	10	10	5	5
2	6	6	12	12	10	5	5	10
3	6	0	0	6	5	5	0	0
4	12	6	6	12	5	5	0	0

2) Xác định ma trận A theo (7.20)

3) Xác định ma trận G theo (7.20)

4) Xác định ma trận B theo (7.24)

5) Xác định ma trận cấu trúc vật liệu D theo (1, 20)

6) Thực hiện phép tính tích phân đối với mỗi phần tử của MTDC theo phép cầu phương Gauss, căn cứ vào (7.41), (7.42b).

Ở đây, các số  $\xi$  và  $\eta$  lần lượt có tập hợp giá trị khác nhau:

$$\xi = 1$$

$$\eta = 1$$

$$\begin{array}{ll} \xi = 1 & \eta = -1 \\ \xi = -1 & \eta = 1 \\ \xi = -1 & \eta = -1 \end{array}$$

Tính cho mỗi tập hợp giá trị rồi cuối cùng cộng lại để được giá trị cuối cùng của mỗi phần tử ma trận. Mỗi MTĐC có 36 phần tử, mỗi phần tử phải tính đến 4 lần, tổng số phép tính lên đến  $36 \times 4 = 144$ .

7) Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể

8) Căn cứ vào MTĐC tổng thể và vectơ tải trọng đã nhập vào, gọi chương trình con để giải hệ phương trình.

9) Tính ứng suất tại trọng tâm của mỗi phần tử theo (8.25)

Kết quả chạy chương trình:

1) Chuyển vị:

$$\begin{array}{ll} q(1) = 2,274 \times 10^{-4} \text{ cm}; & q(2) = 1,108 \times 10^{-3} \text{ cm}; \\ q(3) = -6,722 \times 10^{-5} \text{ cm}; & q(4) = -1,118 \times 10^{-4} \text{ cm}; \\ q(5) = -5,278 \times 10^{-5} \text{ cm}; & q(6) = -1,847 \times 10^{-4} \text{ cm}; \\ q(7) = -5,329 \times 10^{-5} \text{ cm}; & q(8) = 9,036 \times 10^{-6} \text{ cm}; \end{array}$$

2) Ứng suất

$$\begin{array}{ll} US1(1) = 34,489 \text{ kN/cm}^2; & US2(1) = 370,422 \text{ kN/cm}^2; \\ US1(2) = 174,794 \text{ kN/cm}^2; & US2(2) = 436,383 \text{ kN/cm}^2; \\ US1(3) = -15,009 \text{ kN/cm}^2; & US2(3) = -1,543 \text{ kN/cm}^2; \\ US1(4) = -18,816 \text{ kN/cm}^2; & US2(4) = -63,177 \text{ kN/cm}^2; \\ US3(1) = 95,363 \text{ kN/cm}^2; & \\ US3(2) = -185,623 \text{ kN/cm}^2; & \\ US3(3) = -5,765 \text{ kN/cm}^2; & \\ US3(4) = 33,702 \text{ kN/cm}^2; & \end{array}$$

### §7.3. CÁC PHẦN TỬ HỮU HẠN CÓ BẬC CAO HƠN

Các khái niệm về FTHH 4 cạnh 4 nút trình bày trên có thể mở rộng cho các FTHH cùng tham số có bậc cao hơn. Trong FTHH 4 cạnh 4 nút, các hàm hình dạng chứa các số hạng 1,  $\xi$ ,  $\eta$  và  $\xi \cdot \eta$ . Các FTHH trình bày trong phần dưới chứa các số hạng  $\xi^2 \eta$ ,  $\xi \cdot \eta^2$ , làm cho độ chính xác cao hơn. Sau đây, chỉ trình bày các hàm hình dạng N. Như trong phần trước, ma trận độ cứng được suy ra từ các bước sau:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Nq} \tag{7.43}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Bq} \tag{7.44}$$



$$\mathbf{k}_e = h_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}' \mathbf{D} \mathbf{B} \det \mathbf{J} \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (7.45)$$

Trong đó  $\mathbf{k}_e$  tính theo phương pháp cầu phương Gauss

### 7.3.1. Phần tử hữu hạn 4 cạnh 9 nút

FTTH 4 cạnh 9 nút đã tỏ ra rất hữu hiệu trong tính toán theo phương pháp phần tử hữu hạn. Số thứ tự cục bộ các nút biểu thị trên hình (7.7a). FTTH hình vuông biểu thị trên hình (7.7b). Các hàm hình dạng sẽ được định nghĩa như sau.

Trước hết, hãy xét trục tọa độ tự nhiên  $\xi$  trên hình (7.7c). Số thứ tự cục bộ các nút là 1, 2, 3. Chúng tương ứng với các vị trí  $\xi = -1$ ,  $\xi = 0$  và  $\xi = +1$ .

Ta định nghĩa các hàm hình dạng gốc  $L_1, L_2, L_3$  như sau:

$$\begin{aligned} L_1(\xi) &= 1 \text{ tại nút } i \\ L_i(\xi) &= 0 \text{ tại 2 nút còn lại} \end{aligned} \quad (7.46)$$

Trước hết, ta xét  $L_1$ . Vì  $L_1 = 0$  tại điểm  $\xi = 0$  và điểm  $\xi = +1$  nên  $L_1$  có dạng  $L_1 = c\xi(1-\xi)$ . Hằng số  $c$  được xác định từ điều kiện  $L_1 = 1$  tại điểm  $\xi = -1$  (hình 7.7c), từ đó  $c = -1/2$ . Vậy  $L_1(\xi) = -\xi(1-\xi)/2$ .  $L_2$  và  $L_3$  cũng được xác định một cách tương tự. Tóm lại, ta có:

$$\begin{aligned} L_1(\xi) &= -\frac{\xi(1-\xi)}{2} \\ L_2(\xi) &= (1+\xi)(1-\xi) \\ L_3 &= \left( \frac{\xi(1+\xi)}{2} \right) \end{aligned} \quad (7.47)$$

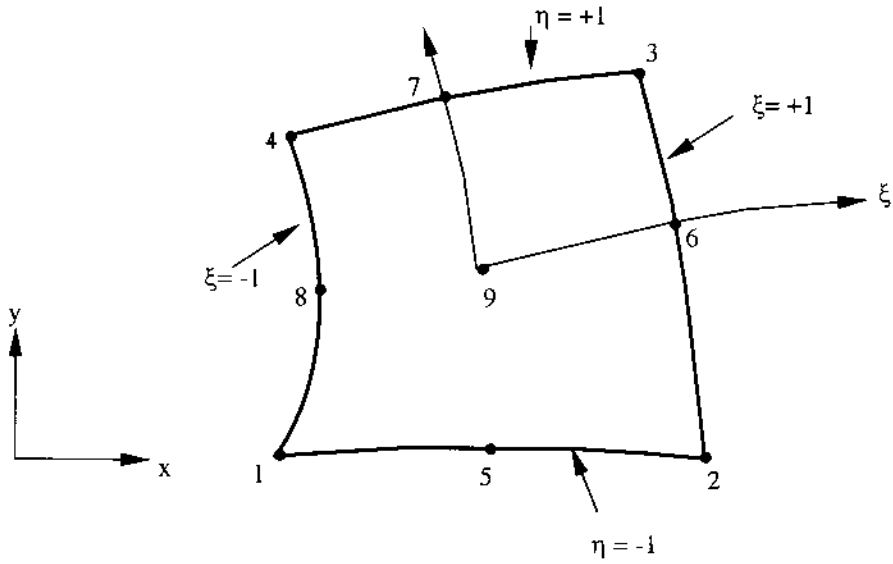
Các hàm hình dạng gốc dọc theo trục tọa độ tự nhiên  $\eta$  (hình 7.7c) cũng được xác định một cách tương tự:

$$\begin{aligned} L_1(\eta) &= -\frac{\eta(1-\eta)}{2} \\ L_2(\eta) &= (1+\eta)(1-\eta) \\ L_3 &= \left( \frac{\eta(1+\eta)}{2} \right) \end{aligned} \quad (7.48)$$

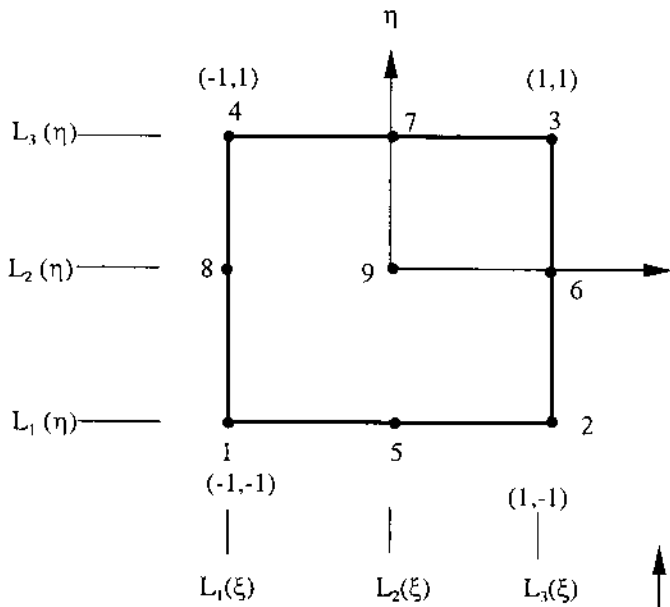
Trên hình (7.7b) ta thấy rằng mỗi nút đều có các tọa độ tự nhiên như sau:  $\xi = -1, 0$  hoặc  $+1$ ;  $\eta = -1, 0$  hoặc  $+1$ . Các hàm hình dạng  $N_1, N_2 \dots N_9$  tại 9 nút có dạng như sau:

$$\begin{aligned} N_1 &= L_1(\xi)L_1(\eta) & N_5 &= L_2(\xi)L_1(\eta) & N_2 &= L_3(\xi)L_1(\eta) \\ N_8 &= L_1(\xi)L_2(\eta) & N_9 &= L_2(\xi)L_2(\eta) & N_6 &= L_3(\xi)L_2(\eta) \\ N_4 &= L_1(\xi)L_3(\eta) & N_7 &= L_2(\xi)L_3(\eta) & N_3 &= L_3(\xi)L_3(\eta) \end{aligned} \quad (7.49)$$

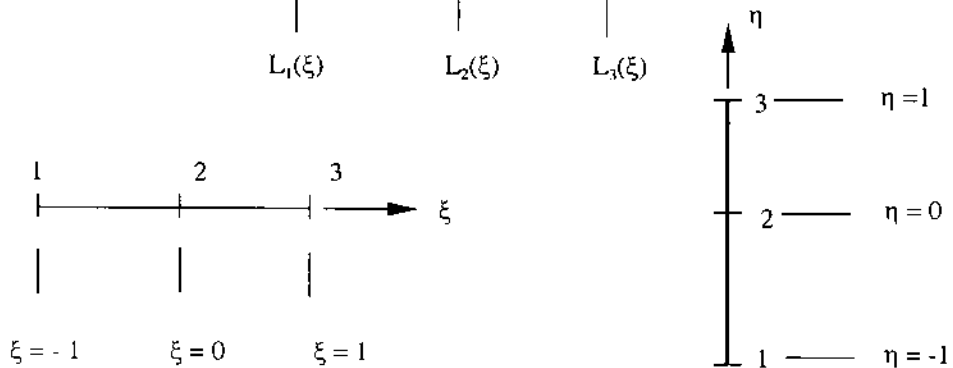
a)



b)



c)



Hình 7.7: FTTH 4 cạnh 9 nút

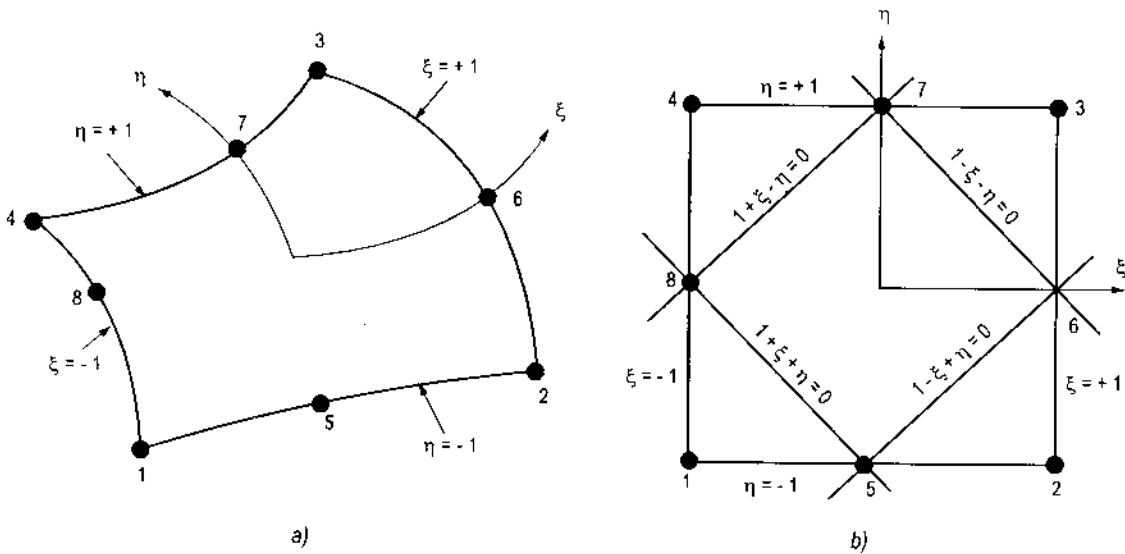
Bằng cách xác định các hàm hình dạng như trên, ta có thể kiểm tra để thấy rằng  $N_i = 1$  tại nút  $i$  và bằng 0 tại nút  $j$  còn lại ( $j \neq i$ ).

Như đã nói trong phần đầu, việc dùng các số hạng có bậc cao hơn trong ma trận hàm hình dạng  $N$ , đưa đến việc nội suy ở bậc cao hơn thường chuyển vị cho bởi  $u = Nq$ .

Hơn nữa, vì  $x = \sum_i N_i x_i$ ,  $y = \sum_i N_i y_i$ , ta có thể dùng các số hạng có bậc cao hơn để xác định kích thước hình học.

Vì vậy, FTHH có thể có biên cong.

### 7.3.2. Phân tử hữu hạn 4 cạnh 8 nút



Hình 7.8: FTHH 4 cạnh 8 nút

FTHH 4 cạnh 8 nút biểu thị trên hình (7.8). Toàn bộ các nút đều nằm trên biên của FTHH. Ta xác định hàm hình dạng  $N_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) với điều kiện  $N_i = 1$  tại nút  $i$  và  $N_i = 0$  tại các nút  $j$  còn lại ( $j \neq i$ ). Khi xác định  $N_i$ , ta căn cứ vào FTHH hình vuông trên hình (7.8b). Trước hết, ta xác định  $N_1 \neq N_4$ . Chẳng hạn, đối với  $N_1$ , nó phải triệt tiêu trên các đường  $\xi = +1$ ,  $\eta = +1$  và  $\xi + \eta = -1$  (hình 7.8b). Do đó  $N_1$  phải có dạng:

$$N_1 = c(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \xi + \eta)$$

Nhưng tại nút 1,  $N_1 = 1$ ,  $\xi = \eta = -1$  do đó  $c = -\frac{1}{2}$

Một cách tương tự, ta có:

$$N_1 = -\frac{(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \xi + \eta)}{4}$$

$$\begin{aligned}
 N_2 &= -\frac{(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)}{4} \\
 N_3 &= -\frac{(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)}{4} \\
 N_4 &= -\frac{(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)}{4}
 \end{aligned} \tag{7.50}$$

Bây giờ ta xác định  $N_5, N_6, N_7, N_8$ . Chẳng hạn đối với  $N_5$ , nó triệt tiêu trên các cạnh  $\xi = +1, \eta = +1$  và  $\xi = -1$ . Vậy nó phải có dạng:

$$N_5 = c(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi) = c(1-\xi^2)(1-\eta)$$

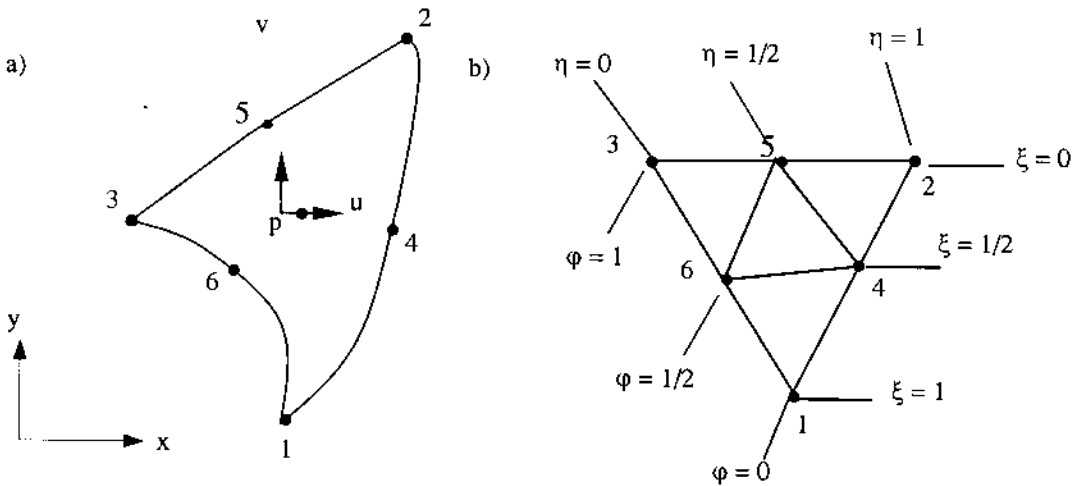
Hằng số  $c$  xác định từ điều kiện  $N_5 = 1$  tại nút 5 tại đó  $\xi = 0, \eta = -1$  do đó  $c = \frac{1}{2}$

Tóm lại, ta có:

$$\begin{aligned}
 N_5 &= \frac{(1-\xi^2)(1-\eta)}{2} \\
 N_6 &= \frac{(1+\xi)(1-\eta^2)}{2} \\
 N_7 &= \frac{(1-\xi^2)(1+\eta)}{2} \\
 N_8 &= \frac{(1-\xi)(1-\eta^2)}{2}
 \end{aligned} \tag{7.51}$$

### 7.3.3. Phần tử hữu hạn tam giác 6 nút

Phần tử hữu hạn tam giác 6 nút biểu thị trên hình (7.9)



Hình 7.9: FTTH tam giác 6 nút

Căn cứ vào hình (7.9b), chứng minh tương tự như trong phần trước, ta có:

$$\begin{aligned} N_1 &= \xi(2\xi - 1) & N_4 &= 4\xi\eta \\ N_2 &= \eta(2\eta - 1) & N_5 &= 4\varphi\eta \\ N_3 &= \varphi(2\varphi - 1) & N_6 &= 4\xi\varphi \end{aligned} \quad (7.52)$$

Trong đó:  $\varphi = 1 - \xi - \eta$ . Vì các hàm hình dạng chứa các số hạng  $\xi^2, \eta^2, \varphi^2$  nên FTHH trên gọi là FTHH tam giác bậc 2. Dưới dạng biểu thị cùng tham số, ta có:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{N}\mathbf{q} \\ x &= \sum_i N_i x_i & y &= \sum_i N_i y_i \end{aligned} \quad (7.53)$$

Ma trận độ cứng của FTHH tính theo công thức (như trong các phần trước).

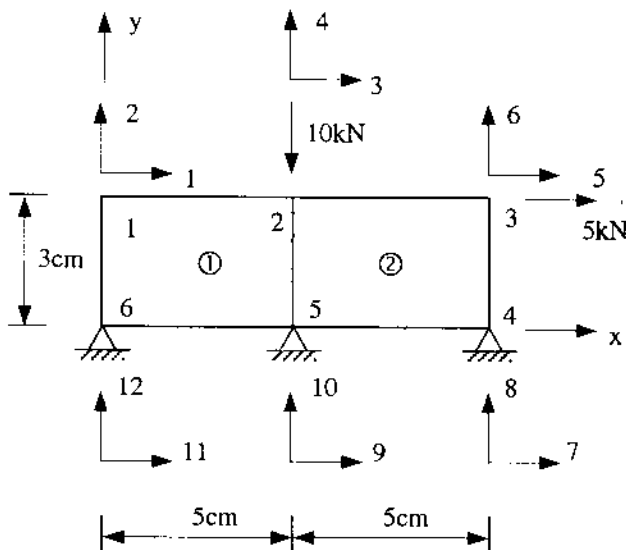
$$\mathbf{k}_e = h_c \iint \mathbf{B}'\mathbf{D}\mathbf{B} \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad (7.54)$$

Tích phân trên trong miền tam giác khác với tích phân trong miền 4 cạnh. Cách đơn giản nhất là dùng quy tắc 1 điểm ở trọng tâm tại đó trọng lượng  $w_i = \frac{1}{3}$  và  $\xi_1 = \eta_1 = \varphi_1 = \frac{1}{3}$ . Phương trình (7.54) có dạng:

$$\mathbf{k}_e \approx \frac{1}{2} t_e \overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{D}}\overline{\mathbf{B}} \det \overline{\mathbf{J}} \quad (7.55)$$

Trong đó,  $\overline{\mathbf{B}}$  và  $\overline{\mathbf{J}}$  tính tại điểm Gauss.

#### §7.4. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH GIẢI BÀI TOÁN 2 CHIỀU KIỂU FTHH CÙNG THAM SỐ 4 CẠNH 4 NÚT (CTR 13)



Phần tử	Số thứ tự nút tổng thể			
1	1	6	5	2
2	2	5	4	3

Hình 7.10

Các số liệu còn lại ghi trong bảng sau:

Phần tử	Tọa độ (cm)							
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
1	0	0	5	5	3	0	0	3
2	5	5	10	10	3	0	0	3

1. Những điều cần tuân thủ:

Số thứ tự bậc tự do tại nút  $i$  biểu thị như sau:

$2i$  trên phương  $y$

$2i-1$  trên phương  $x$ .

2. Nhập các số liệu ban đầu (lấy thí dụ trên hình 7.10)

- Số phần tử: 2
- Số BTĐ có chuyển vị: 6
- Tổng số BTĐ : 12
- Số BTĐ triệt tiêu : 6
- Số thứ tự BTĐ có chuyển vị triệt tiêu: 7, 8, 9, 10, 11, 12
- Bề dày tấm: 0,2cm
- Các thành phần tải trọng: 0; 0; 0; -10; 5; 0

3. Thành lập ma trận độ cứng cho mỗi phần tử hữu hạn

Tính tích phân cho mỗi phần tử của ma trận đó theo phép cầu phương Gauss, dựa trên các công thức (7.41), (7.42b).

4. Ghép các ma trận độ cứng riêng vào ma trận độ cứng tổng thể.
5. Tính các lực thể tích theo phép cầu phương Gauss theo (7.27) nếu có
6. Tính các lực biên theo (7.28) nếu có.
7. Giải hệ phương trình cân bằng để được giá trị chuyển vị tại các nút
8. Tính ứng suất tại trung tâm của FTHH theo (7.25)

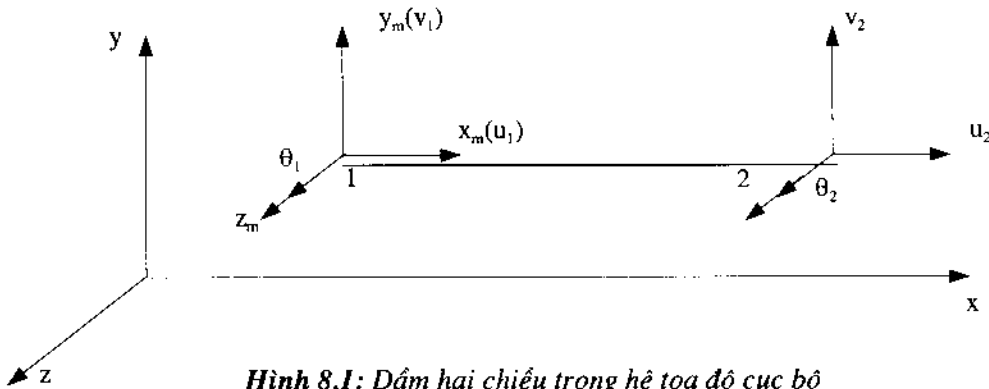
Chương 8

**DÂY HAI CHIỀU VÀ KHUNG PHẪNG**

§8.1. DÂY HAI CHIỀU CÓ TRỤC SONG SONG VỚI HỆ TỌA ĐỘ TỔNG THỂ

8.1.1. Khái niệm

Dây hai chiều trong mặt phẳng x-y có trục song song với trục x biểu thị trên hình (8.1)

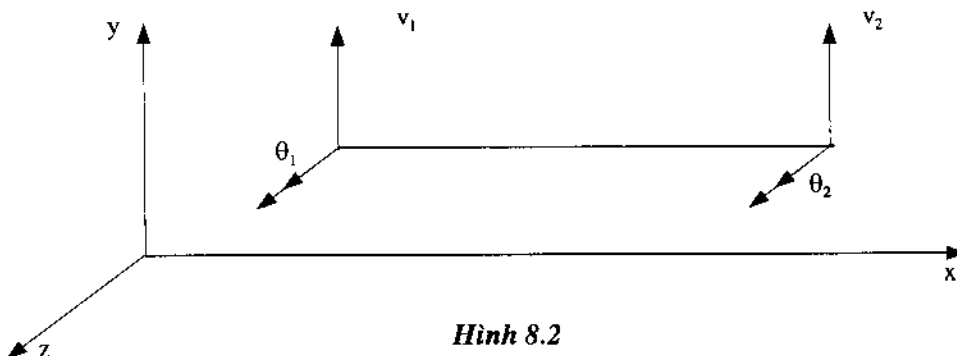


Hình 8.1: Dây hai chiều trong hệ tọa độ cục bộ

Hệ tọa độ cục bộ của dây là  $x_m, y_m, z_m$  vuông góc nhau, chúng song song với hệ trục tọa độ tổng thể  $x, y, z$ . Trong hệ tọa độ cục bộ, dây có hai nút 1 và 2, chiều dương của trục dây quy ước đi từ đầu 1 đến đầu 2. Vectơ chuyển vị của dây tại 2 nút:

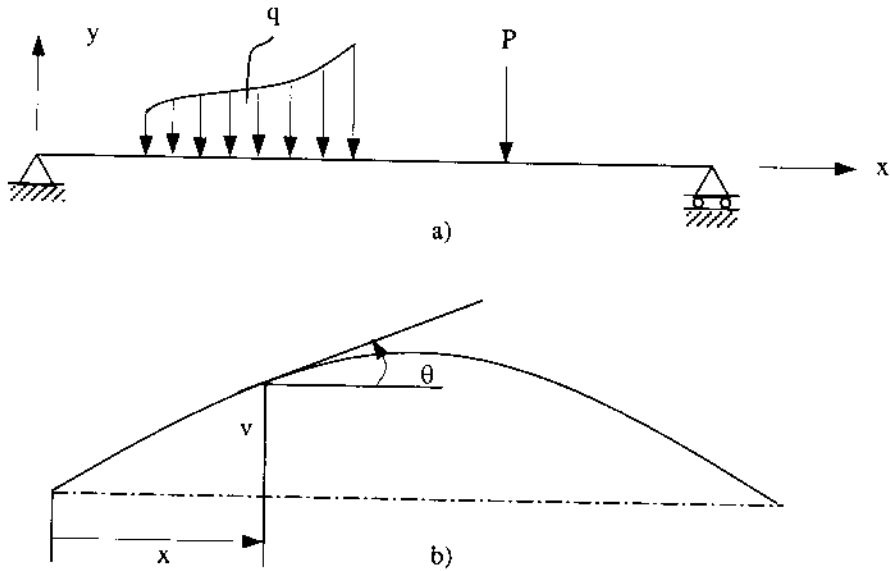
$$q_m = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2] \quad (8.1)$$

Trong đó:  $u_1, u_2$  là chuyển vị dọc theo trục;  $u_1$  và  $u_2$  đã suy ra trong chương ba. Các hệ số độ cứng do các chuyển vị  $v_1, \theta_1$  và  $v_2, \theta_2$  sẽ được suy ra trong phần sau (hình 8.2)



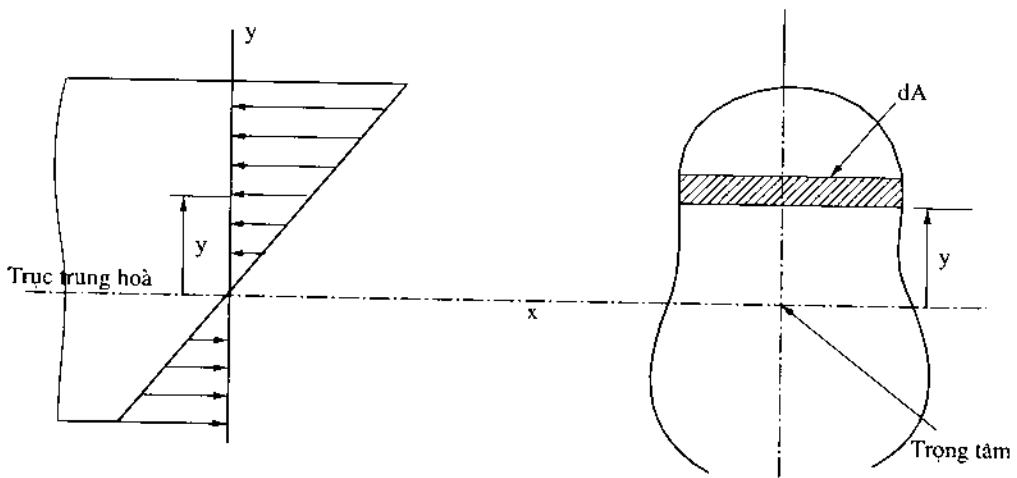
Hình 8.2

Ở đây, ta chỉ xét loại dầm có mặt cắt đối xứng đối với mặt phẳng tải trọng. Trong trường hợp tổng quát, giả sử dầm chịu tải trọng như trên hình (8.3). Đường cong biến dạng như trên hình (3.3b).



Hình 8.3: a) Dầm chịu tải trọng; b) Đường biến dạng của trục trung hoà.

Mặt cắt ngang của dầm và sự phân bố của ứng suất uốn biểu thị trên hình (8.4)



Hình 8.4: Mặt cắt ngang của dầm và sự phân bố ứng suất uốn

Trong trường hợp biến dạng bé, từ môn Sức bền vật liệu, ta có các công thức:

$$\sigma = -\frac{M}{I}y \quad (8.2)$$



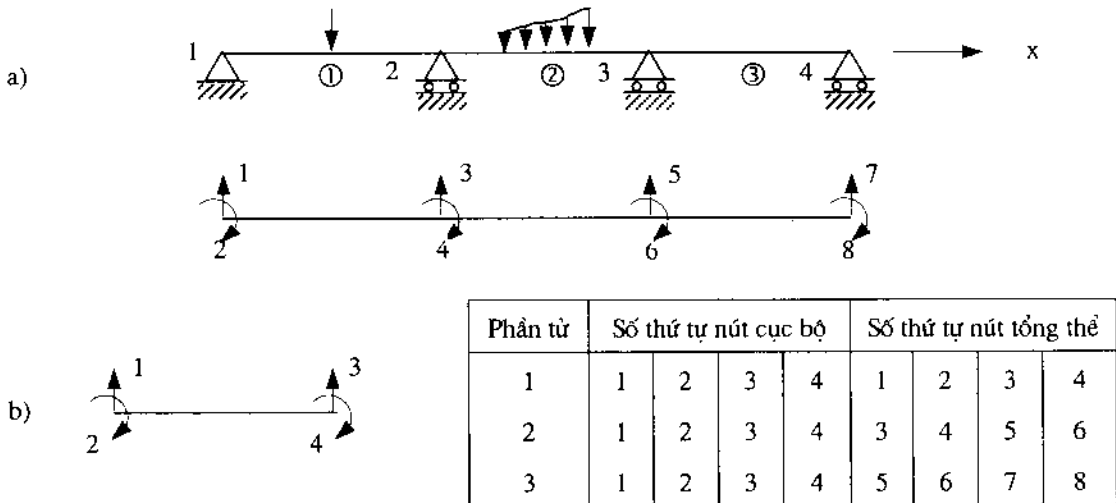
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (8.3)$$

$$\frac{dv^2}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (8.4)$$

Trong đó:  $\sigma$  - ứng suất pháp (trên phương trục x);  
 $\varepsilon$  - biến dạng dọc trục;  
 $M$  - mômen uốn;  
 $v$  - chuyển vị (hoặc độ võng) của trục dầm trên phương y;  
 $I$  - mômen quán tính đối với trục z qua trọng tâm của mặt cắt ngang.

### 8.1.2. Mô hình phần tử hữu hạn

Trong mô hình phần tử hữu hạn, dầm được chia thành nhiều phần tử như trên hình (8.5a).



Hình 8.5: a) Mô hình phần tử hữu hạn trong hệ tọa độ tổng thể

b) Phần tử hữu hạn trong hệ tọa độ cục bộ

Nếu bỏ qua chuyển vị dọc trục, mỗi nút của phần tử hữu hạn có hai bậc tự do. Để tiện cho việc lập trình, ta quy ước  $Q_{2i-1}$  là thành phần chuyển vị trên phương trục y tại nút i.  $Q_{2i}$  là góc xoay tại nút i (hình 8.5a). Vectơ chuyển vị tổng thể trên hình (8.5a) là:

$$\mathbf{Q}' = [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad \dots \quad Q_8] \quad (8.5)$$

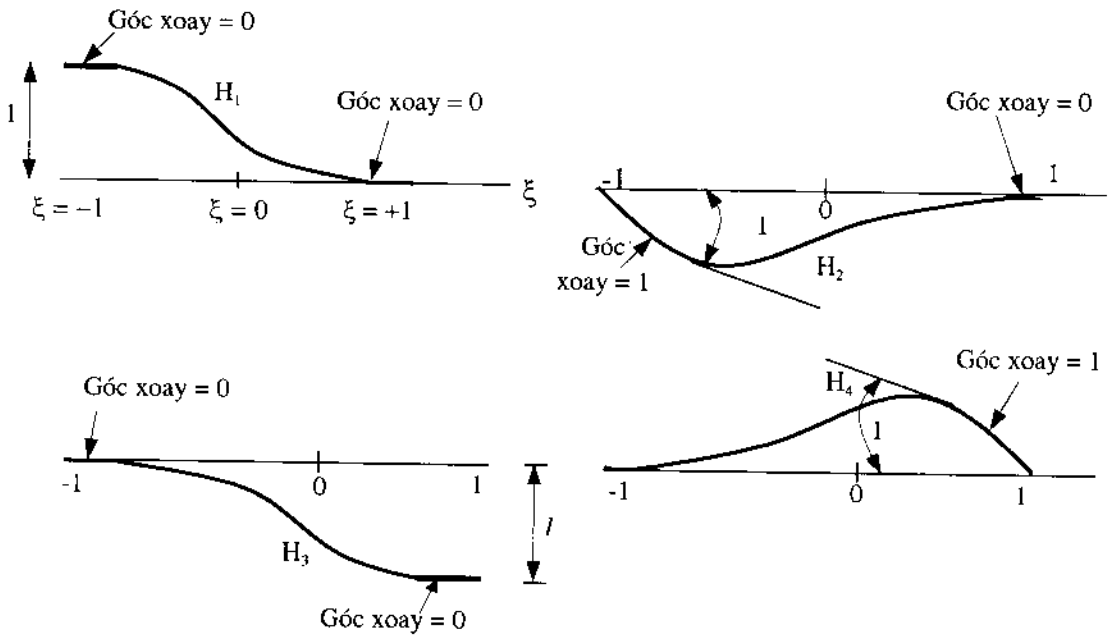
Vectơ chuyển vị men theo các BTD cục bộ (hình 8.5b) là:

$$\mathbf{q}' = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4] \quad (8.6)$$

Trong (8.6),  $q_1, q_2, q_3, q_4$  chính là  $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$  trên hình (8.2).

Bây giờ, ta sẽ căn cứ vào các hàm hình dạng để suy ra biểu thức chuyển vị  $v$ . Các hàm hình dạng ở đây không giống các hàm hình dạng đã thảo luận trong các chương trước. Ta dùng các hàm hình dạng Hecmit bậc 3 được định nghĩa như sau (hình 8.6):

$$H_i = a_i + b_i \xi + c_i \xi^2 + d_i \xi^3 \quad (8.7)$$



Hình 8.6: Các hàm Hecmit

Các hàm hình dạng (8.7) phải thỏa mãn các điều kiện trong bảng sau:

	$H_1$	$H_1'$	$H_2$	$H_2'$	$H_3$	$H_3'$	$H_4$	$H_4'$
$\xi = -1$	1	0	0	1	0	0	0	0
$\xi = 1$	0	0	0	0	1	0	0	1

Các hệ số  $a_i, b_i, c_i, d_i$  xác định từ các điều kiện nói trên:

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi) \quad \text{hoặc} \quad \frac{1}{4}(2-3\xi+\xi^3) \\
 H_2 &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(1+\xi) \quad \text{hoặc} \quad \frac{1}{4}(1-\xi+\xi^2+\xi^3) \\
 H_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi) \quad \text{hoặc} \quad \frac{1}{4}(2+3\xi-\xi^3) \\
 H_4 &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(\xi-1) \quad \text{hoặc} \quad \frac{1}{4}(-1-\xi+\xi^2+\xi^3)
 \end{aligned} \quad (8.8)$$

Các hàm Hecmit có thể dùng để biểu thị chuyển vị  $v$  dưới dạng:

$$v(\xi) = H_1 V_1 + H_2 \left( \frac{dv}{d\xi} \right) + H_3 V_2 + H_4 \left( \frac{dv}{d\xi} \right)_2 \quad (8.9)$$

Trong đó:  $\xi$  - tọa độ tự nhiên; các chỉ số 1 và 2 ứng với các nút 1 và 2. Hệ thức giữa  $x$  và  $\xi$  như sau (xem lại chương ba):

$$x = \frac{1-\xi}{2} x_1 + \frac{1+\xi}{2} x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2} \xi \quad (8.10)$$

Trong đó:  $L_e = x_2 - x_1$  là chiều dài của dầm. Ta có:

$$dx = \frac{L_e}{2} d\xi \quad (8.11)$$

Theo quy tắc tính đạo hàm:

$$\frac{dv}{d\xi} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{d\xi} \quad (8.12)$$

Chú ý rằng  $\frac{dv}{dx}$  tính tại nút 1 và 2 chính là  $q_2$  và  $q_4$  do đó:

$$v(\xi) = H_1 q_1 + \frac{L_e}{2} H_2 q_2 + H_3 q_3 + \frac{L_e}{2} H_4 q_4 \quad (8.13)$$

Dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{V} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{q} \quad (8.14)$$

Trong đó: 
$$\mathbf{H} = \left[ H_1 \quad \frac{L_e}{2} H_2 \quad H_3 \quad \frac{L_e}{2} H_4 \right] \quad (8.15)$$

### 8.1.3. Ma trận độ cứng. Vectơ tải trọng

#### *Ma trận độ cứng*

Ma trận độ cứng của dầm được suy ra từ nguyên lý bảo toàn năng lượng (chương một). Công nội lực trên đoạn dài  $dx$  của dầm:

$$dW_n = \frac{1}{2} \int \sigma \cdot \varepsilon \cdot dA \cdot dx$$

Theo (8.2) và (8.3)

$$dW_n = \frac{1}{2} \left( \frac{M^2}{EI^2} \int_A y^2 dA \right) dx$$

Vì  $\int_A y^2 dA$  chính là mômen quán tính  $I$  nên

$$dW_n = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx$$

Đối với toàn bộ dầm, theo (8.4)

$$W_n = \frac{1}{2} EI \int_e \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx \quad (8.16)$$

Từ (8.12):  $\frac{dv}{dx} = \frac{2}{L_c} \cdot \frac{dv}{d\xi} \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{4}{L_c^2} \cdot \frac{d^2 v}{d\xi^2}$

Thay  $v = \mathbf{H} \cdot \mathbf{q}$

$$\left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 = \mathbf{q}' \cdot \frac{16}{L_c^4} \cdot \left( \frac{d^2 \mathbf{H}}{d\xi^2} \right) \left( \frac{d^2 \mathbf{H}}{d\xi^2} \right) \cdot \mathbf{q} \quad (8.17)$$

$$\left( \frac{d^2 \mathbf{H}}{d\xi^2} \right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \xi & \frac{-1+3\xi}{2} \cdot \frac{L_c}{2} & -\frac{3}{2} \xi & \frac{1+3\xi}{2} \cdot \frac{L_c}{2} \\ \text{Đối xứng} & & & \end{bmatrix} \quad (8.18)$$

Thay  $dx = \frac{L_c}{2} \cdot d\xi$  vào (8.16):

$$W_n = \frac{1}{2} \mathbf{q}' \cdot \frac{8EI}{L_c^3} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \frac{9}{4} \xi^2 & \frac{3}{8} \cdot \xi(-1+3\xi) \cdot L_c & -\frac{9}{4} \xi^2 & \frac{3}{8} \cdot \xi(1+3\xi) \cdot L_c \\ \left( \frac{-1+3\xi}{4} \right)^2 L_c^2 & -\frac{3}{8} \cdot \xi(-1+3\xi) \cdot L_c & \frac{9}{4} \xi^2 & -\frac{1+9\xi^2}{16} L_c^2 \\ \text{Đối xứng} & & & -\frac{3}{8} \cdot \xi(1+3\xi) \cdot L_c \\ & & & \left( \frac{1+3\xi}{4} \right)^2 L_c^2 \end{bmatrix} \quad (8.19)$$

Trong (8.19):  $\int_{-1}^{+1} \xi^2 d\xi = \frac{2}{3}$  ;  $\int_{-1}^{+1} \xi d\xi = 0$  ;  $\int_{-1}^{+1} d\xi = 2$  (8.19) có thể viết:

$$W_n = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{q}' \cdot \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{q} \quad (8.20)$$

Giả sử tải trọng tác dụng lên dầm có tính chất phân bố đều, công của ngoại lực có thể viết:

$$W_{ng} = \frac{1}{2} \int_L p \cdot v \cdot dx$$

Căn cứ vào (8.14) và (8.11)

$$W_{ng} = \left( \frac{1}{2} p \frac{L}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{H} d\xi \right) \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q}' \left( p \frac{L}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{H} d\xi \right) \quad (8.21)$$

Vận dụng nguyên lý bảo toàn năng lượng  $W_n = W_{ng}$ , ta được:

$$\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{q} = \left( \left( \frac{pL}{2} \right) \int_{-1}^1 \mathbf{H} d\xi \right), \quad (8.22)$$

Sau khi tính các tích phân trong (8.19), ta được ma trận độ cứng:

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ & \frac{4EI_z}{L} & \frac{+6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ & & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ & & & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (8.23)$$

Trong đó: L - chiều dài của dầm

Ma trận độ cứng trên chỉ có 4 bậc tự do (không xét đến ảnh hưởng của biến dạng dọc).

Trong trường hợp xét biến dạng dọc, kết hợp với công thức (3.19) trong chương 3, ta có ma trận độ cứng với 6 bậc tự do như sau:

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{-6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{-12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & \frac{+6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_z}{L^3} & \frac{+6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{+6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & \frac{+6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (8.24)$$

Vectơ chuyển vị ứng với (8.24) như sau:

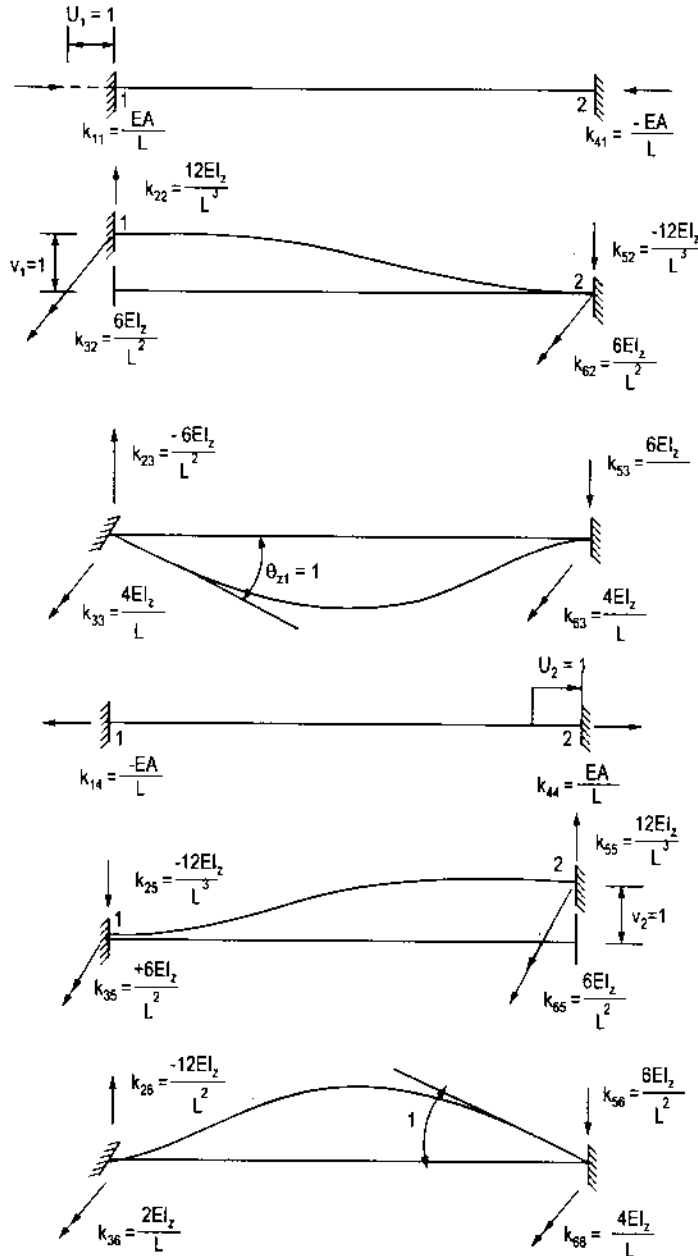
$$\mathbf{q}' = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6] \quad (8.25)$$

Trong đó:  $q_1, q_4$  chuyển vị trên phương x tại các nút 1 và 2;

$q_2, q_5$  chuyển vị trên phương y tại các nút 1 và 2;

$q_3, q_6$  góc xoay tại các nút 1 và 2.

Ý nghĩa vật lý của các hệ số độ cứng giải thích trên hình (8.7):



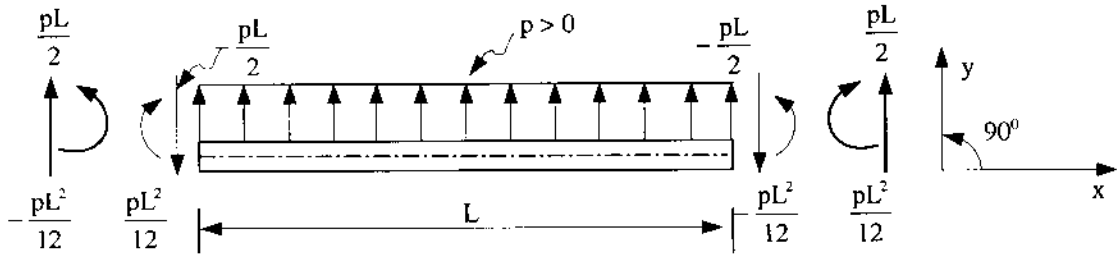
Hình 8.7

Véc tơ tải trọng:

Vế phải trong (8.22) chính là vectơ tải trọng do lực phân bố đều gây ra. Sau khi tính tích phân, ta có vectơ tải trọng:

$$\mathbf{f} = \left[ \frac{pL}{2} \quad -\frac{pL^2}{12} \quad \frac{pL}{2} \quad +\frac{pL^2}{12} \right] \quad (8.26)$$

Các lực tương đương trong (8.26) biểu thị trên hình (8.8)



Hình 8.8

Dấu tải trọng quy ước như sau. Từ chiều dương x của trục dẫn quay một góc  $90^\circ$  ngược chiều kim đồng hồ. Tải trọng là dương khi cùng chiều với trục y (xem hình 8.8), là âm trong trường hợp ngược lại.

Momen uốn ở đầu dầm quy ước là dương khi quay thuận chiều kim đồng hồ, là âm trong trường hợp ngược lại.

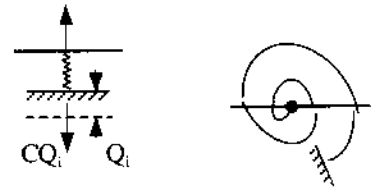
### 8.1.4. Các điều kiện biên. Nội lực

Điều kiện biên:

Gối tựa của dầm có 3 khả năng:

1. Gối tựa bị lún.
2. Gối tựa đàn hồi.
3. Gối tựa thông thường.

Đối với loại thứ nhất, ta dùng phương pháp mô hình lò xo để biến đổi ma trận độ cứng tổng thể  $\mathbf{K}$  (xem chương 3).



Hình 8.9

Đối với loại thứ 2, ta thay gối tựa bằng 1 lò xo có độ cứng  $C$  (hình 8.9). Men theo BTD  $i$ , ta có lực tác dụng  $F_i - CQ_i$ . Ta biến đổi ma trận độ cứng tổng thể  $\mathbf{K}$  như sau. Nhân hàng thứ  $i$  của ma trận  $\mathbf{K}$  với vectơ chuyển vị  $\mathbf{Q}$ , ta có:

$$K_{i1} \cdot Q_1 + K_{i2} \cdot Q_2 + \dots + K_{in} \cdot Q_n = F_i - CQ_i$$

Chuyển  $CQ_i$  sang vế trái:

$$K_{i1} \cdot Q_1 + K_{i2} \cdot Q_2 + \dots + (K_{ii} + C) \cdot Q_i + \dots + Q_{in} \cdot Q_n = F_i \quad (8.27)$$

Vậy ta biến đổi ma trận  $\mathbf{K}$  bằng cách thêm số  $C$  vào phần tử thứ  $i$  trên đường chéo chính.

Nội lực

Nội lực trong dầm gồm có lực cắt  $V$  và mômen uốn  $M$ .

Căn cứ vào các công thức  $M = EI \frac{d^2v}{dx^2}$   $V = \frac{dM}{dx}$  và  $v = Hq$

Ta có:

$$M = \frac{EI}{L^2} [6\xi q_1 + (3\xi - 1)Lq_2 - 6\xi q_3 + (3\xi + 1)Lq_4] \quad (8.28)$$

$$V = \frac{6EI}{L^3} (2q_1 + Lq_2 - 2q_3 + Lq_4) \quad (8.29)$$

Các nội lực ở hai đầu dầm tính theo (8.28) và (8.29). Chúng phải được cộng vào các phản lực ở trạng thái ngàm không tô đậm trên (hình 8.8b) để được nội lực cuối cùng. Gọi  $S_i$  là nội lực cuối cùng ta có:

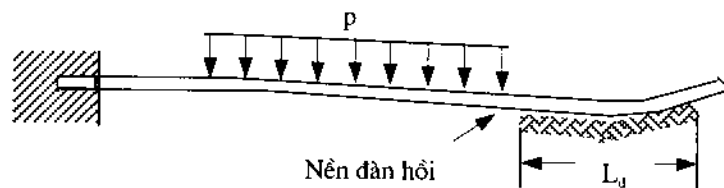
$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & +6L & 2L^2 \\ +12 & +6L & 12 & +6L \\ 6L & 2L^2 & +6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-pL}{2} \\ \frac{+pL^2}{12} \\ \frac{-pL}{2} \\ \frac{-pL^2}{12} \end{bmatrix} \quad (8.30)$$

Trong đó:  $S_1, S_3$  - lực cắt tại đầu 1 và đầu 2 của dầm;

$S_2, S_4$  - mômen tại đầu 1 và đầu 2 của dầm.

### 8.1.5. Dầm trên nền đàn hồi

Dầm trên nền đàn hồi biểu thị trên hình (8.10)



Hình 8.10: Dầm trên nền đàn hồi.

Giả sử độ cứng trên đơn vị dài của nền đàn hồi là  $S$  - Ngoài công của nội lực theo công thức (8.16), còn có công của nội lực do phản lực từ nền đàn hồi tác dụng lên dầm gây ra. Phản lực phân bố trên đơn vị dài là  $s.v$  do đó công của nội lực bổ sung là:



$$W_{ng}^b = \frac{1}{2} \int (sv) v dx$$

$$= \frac{1}{2} \int sv^2 dx$$
(8.31)

Thay  $v = \mathbf{H} \cdot \mathbf{q}$  vào (8.31), ta có:

$$W_n^b = \frac{1}{2} \mathbf{q}^t \left( s \int_e \mathbf{H}' \mathbf{H} dx \right) \mathbf{q}$$
(8.32)

Căn cứ vào (8.8) và (8.15), ta được

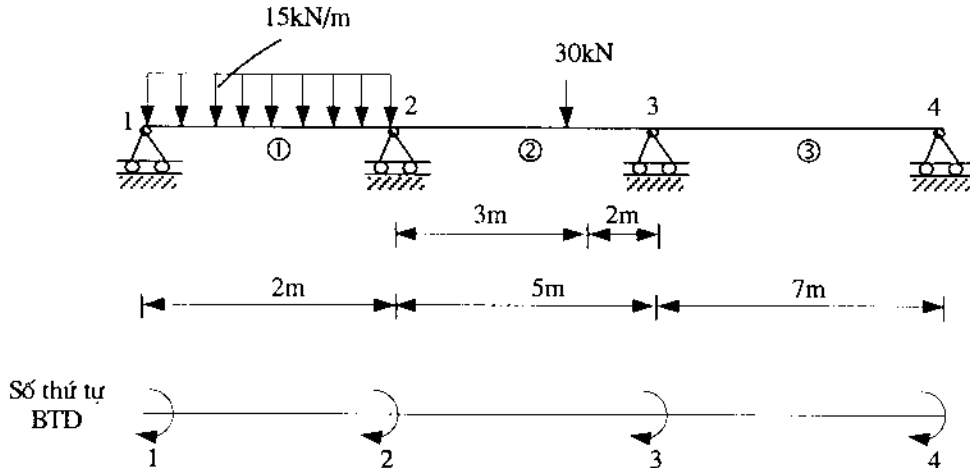
$$\mathbf{k}_e^b = \frac{SL_d}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L_d & 54 & -13L_d \\ 22L_d & 4L_d^2 & 13L_d & -3L_d^2 \\ 54 & 13L_d & 156 & -22L_d \\ -13L_d & -3L_d^2 & -22L_d & 4L_d^2 \end{bmatrix}$$
(8.33)

Trong đó:  $s$  là độ cứng trên đơn vị dài của nền đàn hồi;

$L_d$  là chiều dài của nền đàn hồi.

Ma trận  $\mathbf{k}_e^b$  cần được cộng vào ma trận (8.23) trong trường hợp có 4 bậc tự do.

**Ví dụ 8.1:**



Môđun đàn hồi:  $21 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ ; Mômen quán tính:  $23 \cdot 10^6 \text{ m}^4$

**Hình 8.11**

Dùng phương pháp FTHH tính:

- 1- Chuyển vị
- 2- Mômen
- 2- Lực cắt

*Giải:*

Số thanh: 3

số BTD cần tính: 4

Chuyển vị là các góc xoay, nội lực là các mômen uốn.

1- Tính ma trận độ cứng riêng theo (8.23)

$$\text{Thanh 1:} \quad \mathbf{k}_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 9660 & 4830 \\ & 9660 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\text{Thanh 2:} \quad \mathbf{k}_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2760 & 1380 \\ & 3864 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\text{Thanh 3:} \quad \mathbf{k}_3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2760 & 1380 \\ & 2760 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

2- Ghép các MTĐC riêng thanh MTĐC tổng thể:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 9660 & 4830 & 0 & 0 \\ & 9660 & 1932 & 0 \\ & +3864 & & \\ \hline & 13524 & & \\ & & 3864 & 1380 \\ & & +2760 & \\ & & \hline & & 6624 & \\ & & & 2760 \end{bmatrix}$$

3- Đưa các tải trọng trên nhịp về các tải trọng tác dụng tại nút. Ta có vector tải trọng.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9,4 \\ -21,6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4- Giải hệ phương trình:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{F}$$

Ta được các thành phần chuyển vị như sau:

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = (-0,147; 1,329; -4,073; 2,036) \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

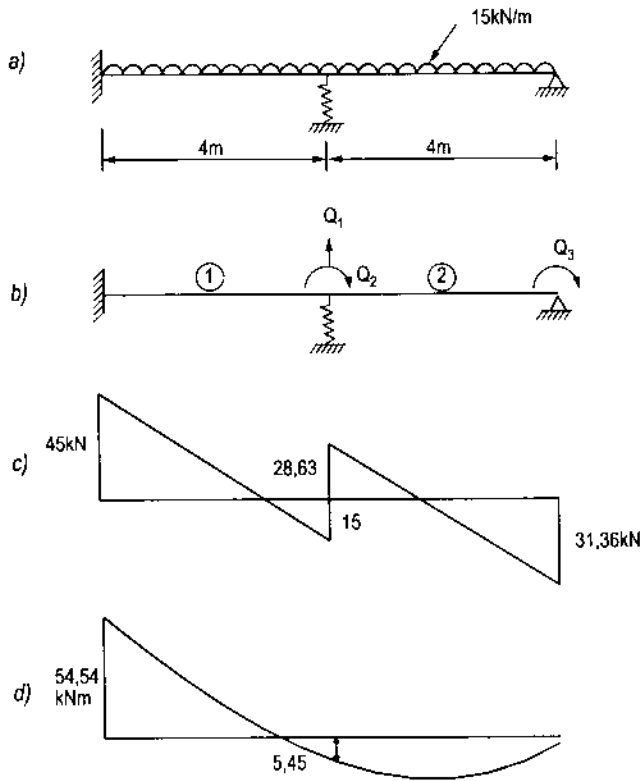
5- Tính nội lực theo (8.30)

Giá trị mômen và lực cắt thống kê trong bảng dưới:

Phần tử	Mômen (kN - m)		Lực cắt (kN)	
	1	0	17,132	6,434
2	-17,132	8,431	12,300	17,699
3	-8,431	0	1,204	-1,204

**Ví dụ 8.2:**

Tính dầm liên tục biểu thị trên hình (8.12a). Gối tựa trung gian là 1 lò xo có độ cứng  $\frac{24EI}{L^3}$ ;  $EI=400$  đơn vị. Vẽ biểu đồ lực cắt và biểu đồ mômen.



**Hình 8.12**

*Giải:*

Xác định các ma trận độ cứng:

Bậc tự do cục bộ trong mỗi dầm là  $q_1, q_2, q_3, q_4$ . Các bậc tự do tổng thể là  $Q_1, Q_2, Q_3$  như trên hình (8.12b).

Ma trận độ cứng của các phần tử tính theo (8.23) (bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc)

Phần tử 1:

$$\begin{array}{cccc}
 & 0 & 0 & 1 & 2 & \leftarrow \text{BTD tổng thể} \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & \leftarrow \text{BTD cục bộ} \\
 k_1 = & \begin{array}{c} 0 \ 1 \\ 0 \ 2 \\ 1 \ 3 \\ 2 \ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 75 & 150 & -75 & 150 \\ & 400 & -150 & 200 \\ & & 75 & -150 \\ \text{Đổi xứng} & & & 400 \end{bmatrix} & & & (a) \\
 \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{BTD tổng thể} \\ \uparrow \\ \text{BTD cục bộ} \end{array} & & & & & & 
 \end{array}$$

Véc tơ tải trọng tính theo (8.26) ( $p < 0$ )

$$f_1 = \begin{pmatrix} +\frac{WL}{2} \\ -\frac{WL^2}{12} \\ +\frac{WL}{2} \\ \frac{WL^2}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ +20 \\ -30 \\ -20 \end{pmatrix} \quad (b)$$

Phần tử 2:

$$\begin{array}{cccc}
 & 1 & 2 & 0 & 3 & \leftarrow \text{BTD tổng thể} \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & \leftarrow \text{BTD cục bộ} \\
 k_2 = & \begin{bmatrix} 75 & 150 & -75 & 150 \\ & 400 & -150 & 200 \\ \text{đổi xứng} & & 75 & -150 \\ & & & 400 \end{bmatrix} & & & (c)
 \end{array}$$

Véc tơ tải trọng:

$$f_2 = \begin{pmatrix} -30 \\ +20 \\ -30 \\ -20 \end{pmatrix} \quad (d)$$

## Công ty Hóa Chất Xây Dựng Phương Nam

Ghép các ma trận độ cứng riêng và các vectơ tải trọng như đã làm trong các chương trước. Vì gốc tọa độ trung gian là 1 lò xo có độ cứng bằng  $\frac{24 \times 400}{4^3} = 150 \text{ kN/m}$ , ta phải cộng số này vào phần tử thứ nhất trên đường chéo chính (lò xo nằm trên phương BTD  $Q_1$ ). Cuối cùng, ta có hệ phương trình cân bằng tổng thể:

$$\begin{bmatrix} 300 & 0 & 150 \\ & 800 & 200 \\ \text{Đối xứng} & & 400 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} \quad (e)$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$\begin{aligned} Q_3 &= \frac{2}{11} \\ Q_2 &= -\frac{1}{22} \\ Q_1 &= -\frac{16}{55} \end{aligned} \quad (f)$$

Theo (8.30), nội lực cuối cùng của các phần tử như sau:

Phần tử 1:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 75 & 150 & -75 & 150 \\ & 400 & -150 & 200 \\ \text{Đối xứng} & & 75 & -150 \\ & & & 400 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -16/55 \\ -1/22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ -20 \\ 30 \\ +20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45.0 \\ 54.54 \\ 15.0 \\ 5.45 \end{pmatrix} \quad (g)$$

Phần tử 2:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 75 & 150 & -75 & 150 \\ & 400 & -150 & 200 \\ \text{Đối xứng} & & 75 & -150 \\ & & & 400 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -16/55 \\ -1/22 \\ 0 \\ 2/11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ -20 \\ 30 \\ +20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28.63 \\ -5.45 \\ 31.36 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

Căn cứ vào các kết quả tính trên, ta vẽ biểu đồ lực cắt và biểu đồ mômen như trên hình (8.12c), (8.12d).

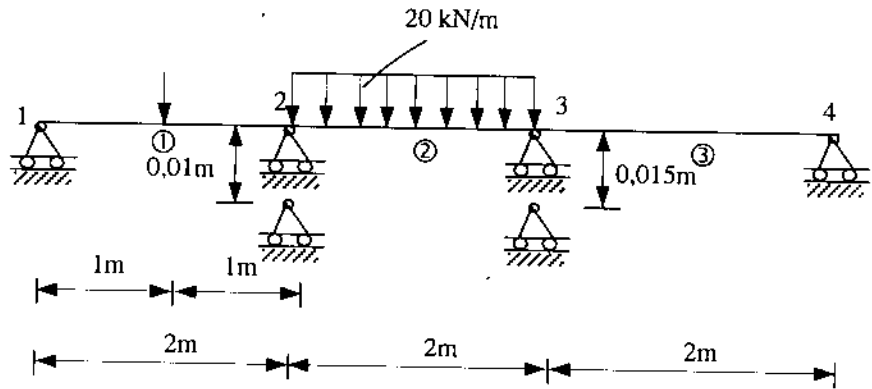
**Ví dụ 8.3:** Một dầm liên tục như trên hình (8.13)

Độ lún gối tựa 2: 0,01m.

Độ lún gối tựa 3: 0,015m

Môđun đàn hồi:  $21 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ ;

Mômen quán tính:  $23 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$



Hình 8.13

Dùng phương pháp mô hình lò xo tính:

- 1- Chuyển vị
- 2- Mômen
- 3- Lực cắt

Giải:

Trong phương pháp lò xo, cần phải thống kê toàn bộ các bậc tự do. Vì mỗi nút có 2 bậc tự do nên ta có.

Tổng số bậc tự do =  $2 \times 4 = 8$

Số bậc tự do có chuyển vị cho trước: 4

Số thứ tự BTD có chuyển vị cho: 1, 3, 5, 7

Các chuyển vị tương ứng: 0; 0,01 (độ lún); 0,015 (độ lún); 0

Ứng với BTD thứ  $i$  có chuyển vị cho trước, phân tử thứ  $i$  trên đường chéo chính của ma trận độ cứng tổng thể cần được cộng thêm số  $c$  khá lớn, phân tử thứ  $i$  của vector tải trọng cũng cần được cộng thêm giá trị ( $c \times$  chuyển vị tương ứng).

Trình tự tính toán như sau:

1) Lập các ma trận độ cứng riêng theo (8.23)

Thanh 1:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 7245 & -7245 & -7245 & -7245 \\ & 9660 & 7245 & 4830 \\ & & 7245 & 7245 \\ & & & 9660 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Thanh 2:

$$S_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 7245 & -7245 & -7245 & -7245 \\ & 9660 & 7245 & 4830 \\ \text{đối xứng} & & 7245 & 7245 \\ & & & 9660 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix}$$

Thanh 3:

$$S_3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 7245 & -7245 & -7245 & -7245 \\ & 9660 & 7245 & 4830 \\ \text{đối xứng} & & 7245 & 7245 \\ & & & 9660 \end{matrix} & \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{matrix}$$

2- Ghép các ma trận độ cứng riêng thành MTĐC tổng thể:

$$S = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 7245 * & -7245 & -7245 & -7245 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 9660 & 7245 & 4830 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 14490 * & 0 & -7245 & -7245 & 0 & 0 \\ & & & 19320 & 7245 & 4830 & 0 & 0 \\ & & & & 14490 * & 0 & -7245 & -7245 \\ & & & & & 19320 & 7245 & 4830 \\ & & & & & & 7245 * & 7245 \\ & & & & & & & 9660 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{matrix}$$

3- Đưa các tải trọng trên nhịp về các tải trọng tập trung tại các nút. Ta có vectơ tải trọng:

$$f = \begin{matrix} & \begin{matrix} -15 * \\ 7,5 \\ -35 * \\ -0,83 \\ -20 * \\ -6,67 \\ 0 * \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{matrix}$$

4- Biến đổi ma trận độ cứng tổng thể và vector tải trọng.

Giá trị cực đại tuyệt đối của các phần tử trong MTĐC tổng thể là 19320. Chọn giá trị  $c = 19320 \cdot 10^8$ .

Các giá trị của các phần tử có đánh dấu sao trong MTĐC tổng thể cần sửa lại như sau:

$$S(1,1) = 7245 + 19320 \cdot 10^8 \qquad S(3,3) = 14490 + 19320 \cdot 10^8$$

$$S(5,5) = 14490 + 19320 \cdot 10^8 \qquad S(7,7) = 7245 + 19320 \cdot 10^8$$

Các phần tử có đánh dấu sao trong vector tải trọng cần sửa lại như sau:

$$f(1,1) = -15 + c \times 0 = -15 \qquad f(3,3) = -35 + c \times (-0,01)$$

$$f(5,5) = -20 + c \times (-0,015) \qquad f(7,7) = 0 + c \times 0 = 0$$

5- Căn cứ vào MTĐC tổng thể và vector tải trọng đã được biến đổi, giải hệ phương trình đã được các giá trị thành phần chuyển vị:

$$(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8) = (0 \quad -4,137 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad -0,01 \text{ m}$$

$$-5,173 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad -0,015 \text{ m} \quad 2,155 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad 0 \quad 1,017 \times 10^{-2} \text{ rad})$$

6- Căn cứ vào (8.30), tính mômen và lực cắt. Kết quả thống kê trong bảng (8.2)

**Bảng 8.2**

Phần tử	Lực		Mômen (kN - m)		Lực cắt (kN)	
1	0	10	0	10	10	20
2	-10	38,725	-10	38,725	5,638	34,362
3	-38,725	0	-38,725	0	19,362	-19,362

### §.8.2 DẦM HAI CHIỀU CÓ TRỤC KHÔNG SONG SONG VỚI HỆ TỌA ĐỘ TỔNG THỂ KHUNG PHẪNG.

Dầm hai chiều nằm nghiêng biểu thị trên hình (8.14). Bây giờ, trục dầm  $x_m$  trong hệ tọa độ cục bộ không còn song song với trục  $x$  trong hệ tọa độ tổng thể  $x, y, z$ .

#### 8.2.1. Ma trận xoay

Trong trường hợp dầm hai chiều nằm nghiêng, ta có 2 hệ tọa độ: hệ tọa độ cục bộ  $x_m, y_m, z_m$  và hệ tọa độ tổng thể  $x, y, z$ . (hình 8.14). Các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ cục bộ là:

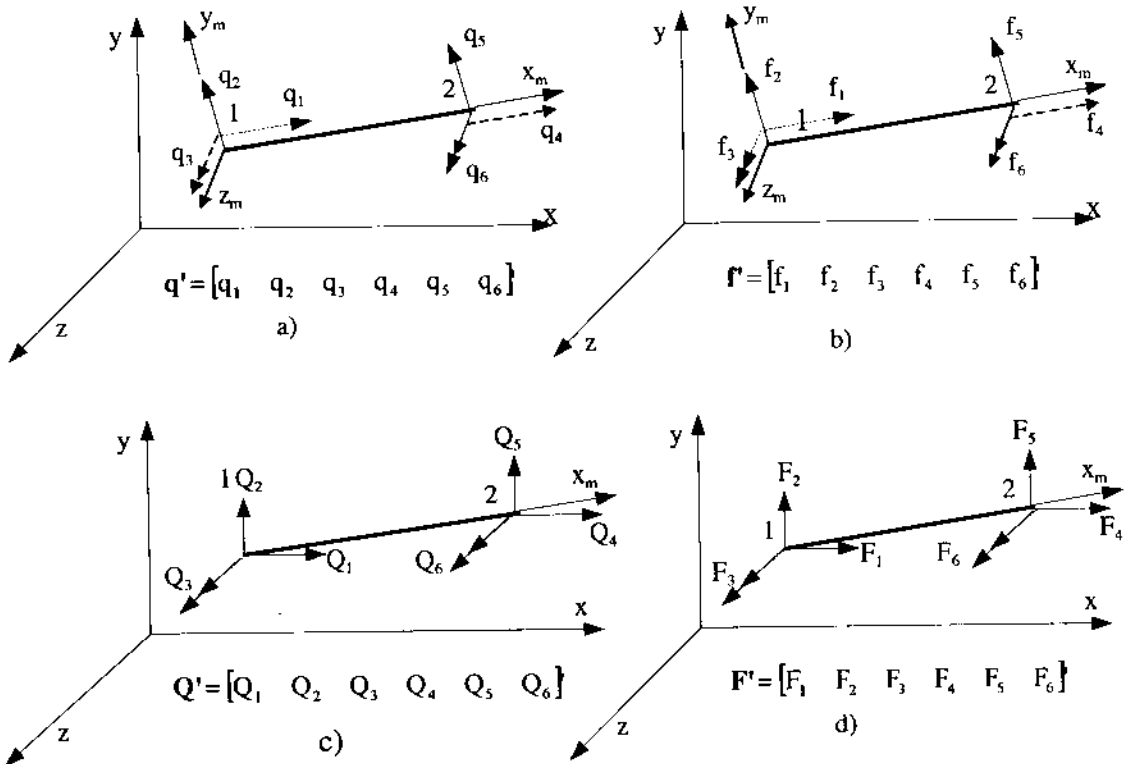
$$\mathbf{q}' = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6] \qquad (8.35)$$

Trong đó:  $q_1, q_4$  - các thành phần chuyển vị trên phương  $x_m$  tại nút 1 và nút 2;

$q_2, q_5$  - các thành phần chuyển vị trên phương  $y_m$  tại nút 1 và nút 2;

$q_3, q_6$  - các thành phần góc xoay trên phương  $z_m$  tại nút 1 và nút 2.





**Hình 8.14:**

- a) Các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ cục bộ;  
 b) Các thành phần tải trọng trong hệ tọa độ cục bộ;  
 c) Các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ tổng thể;  
 d) Các thành phần tải trọng trong hệ tọa độ tổng thể

Các thành phần tải trọng trong hệ tọa độ cục bộ là:

$$\mathbf{f}' = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6] \quad (8.36)$$

Trong đó:  $f_1, f_4$  - các thành phần tải trọng trên phương  $x_m$  tại nút 1 và nút 2;  
 $f_2, f_5$  - các thành phần tải trọng trên phương  $y_m$  tại nút 1 và nút 2;  
 $f_3, f_6$  - các thành phần mômen xoay quanh trục  $z_m$ .

Các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ tổng thể:

$$\mathbf{Q}' = [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6] \quad (8.37)$$

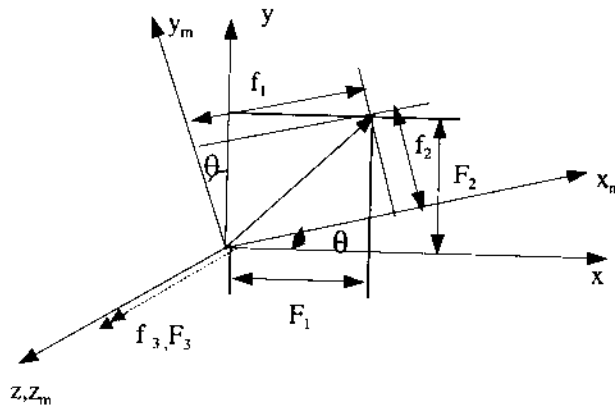
Trong đó:  $Q_1, Q_4$  - các thành phần chuyển vị trên phương  $x$  tại nút 1 và nút 2;  
 $Q_2, Q_5$  - các thành phần chuyển vị trên phương  $y$  tại nút 1 và nút 2;  
 $Q_3, Q_6$  - các thành phần góc xoay quay trục  $z$  tại nút 1 và nút 2.

Các thành phần tải trọng trong hệ tọa độ tổng thể:

$$\mathbf{F}' = [F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4 \quad F_5 \quad F_6] \quad (8.38)$$

Trong đó:  $F_1, F_4$ - các thành phần tải trọng trên phương x tại nút 1 và nút 2;  
 $F_2, F_5$ - các thành phần tải trọng trên phương y tại nút 1 và nút 2;  
 $F_3, F_6$ - các thành phần mômen xoay quanh trục z tại nút 1 và nút 2.

Nếu cho mặt  $x_m y_m$  trùng với mặt xy, ta có hình (8.15)



Hình 8.15

Hệ thức giữa các thành phần tải trọng trong hệ tọa độ cục bộ và hệ tọa độ tổng thể như sau:

$$\begin{aligned} f_1 &= F_1 \cos \theta + F_2 \sin \theta = F_1 C_x + F_2 C_y \\ f_2 &= -F_1 \sin \theta + F_2 \cos \theta = -F_1 C_y + F_2 C_x \end{aligned} \quad (8.39)$$

Trong đó:  $C_x = \cos \theta \quad C_y = \sin \theta \quad (8.40)$

Riêng đối với các thành phần mômen  $f_3$  và  $F_3$ , chúng bằng nhau:

$$f_3 = F_3 \quad (8.41)$$

Từ trên, ta có hệ thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 \\ -C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (8.42)$$

Vậy là ta đã dùng các thành phần chuyển vị tại nút 1 trong hệ tọa độ tổng thể để biểu thị các thành phần chuyển vị tại nút đó trong hệ tọa độ cục bộ (8.42) có thể viết:

$$\mathbf{f}_{(1)} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_{(1)} \quad (8.42a)$$

Trong đó:  $\mathbf{f}_{(1)}$  vectơ tải trọng tại nút 1 trong hệ tọa độ cục bộ;  
 $\mathbf{F}_{(1)}$  vectơ tải trọng tại nút 1 trong hệ tọa độ tổng thể;  
 $\mathbf{T}$  ma trận xoay hoặc ma trận biến đổi.

Đối với các thành phần chuyển vị, ta cũng có những hệ thức tương tự như trên:

$$\mathbf{q}_{(1)} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}_{(1)} \quad (8.43)$$

Trong đó:  $\mathbf{q}_{(1)}$  vectơ chuyển vị tại nút 1 trong hệ tọa độ cục bộ;

$\mathbf{Q}_{(1)}$  vectơ chuyển vị tại nút 1 trong hệ tọa độ tổng thể.

Trong thực tế, mỗi dầm có 2 nút (hình 8.13) nên đối với nút 2, ta cũng có những hệ thức tương tự như trên:

$$\mathbf{f}_{(2)} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_{(2)} \quad (8.44)$$

$$\mathbf{q}_{(2)} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}_{(2)} \quad (8.45)$$

Đối với toàn bộ dầm, ta có hệ thức ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_y & C_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_x & C_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} \quad (8.46)$$

Dưới dạng ma trận chia khối, ta có:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{(1)} \\ \mathbf{f}_{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{(1)} \\ \mathbf{F}_{(2)} \end{bmatrix} \quad (8.47)$$

Trong đó:  $\mathbf{f}_{(1)}, \mathbf{f}_{(2)}, \mathbf{F}_{(1)}, \mathbf{F}_{(2)}$  là những ma trận cấp  $3 \times 1$ ;

$\mathbf{T}, \mathbf{0}$  là các ma trận cấp  $3 \times 3$ .

(8.46) có thể viết:

$$\mathbf{f} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{F} \quad (8.48)$$

Trong đó:  $\mathbf{f}$  - vectơ tải trọng của toàn bộ dầm trong hệ tọa độ cục bộ;

$\mathbf{F}$  - vectơ tải trọng của toàn bộ dầm trong hệ tọa độ tổng thể.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (8.49)$$

$\mathbf{R}$  gọi là ma trận xoay tổng thể.

Đối với vectơ chuyển vị, ta có hệ thức tương tự:

$$\mathbf{q} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q} \quad (8.50)$$

Trong đó:  $\mathbf{q}$  và  $\mathbf{Q}$  như đã trình bày trong (8.35) và (8.37)

Ngược lại, ta có thể dùng các thành phần trong hệ tọa độ cục bộ để biểu thị các thành phần trong hệ tọa độ tổng thể. Từ (8.48), ta có:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{f}$$

nhưng  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}'$  nên

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}' \cdot \mathbf{f}$$

Từ (8.50):

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}' \cdot \mathbf{q}$$

(8.52)

### 8.2.2. Ma trận độ cứng. Vector tải trọng của hệ khung phẳng.

Một dầm 2 chiều ở vị trí bất kỳ là một thành phần của hệ khung phẳng.

*Ma trận độ cứng:*

Vận dụng nguyên lý bảo toàn năng lượng (chương một), theo (1.43), ta có ma trận độ cứng tổng thể của dầm như sau:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}' \cdot \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{R}$$

(8.53)

Trong đó:  $\mathbf{R}$  - ma trận xoay, tính theo (8.49);

$\mathbf{k}_e$  - ma trận độ cứng trong hệ tọa độ cục bộ tính theo (8.24) (trường hợp tổng quát có 6 bậc tự do).

Sau khi thực hiện phép nhân ma trận trong (8.53) ta được ma trận độ cứng tổng thể  $\mathbf{K}$  như sau:

Số thứ tự BTĐ cục bộ :1,2,3,4,5,6.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ C_1 & C_2 & C_4 & -C_1 & -C_2 & C_4 \\ & C_3 & -C_5 & -C_2 & -C_3 & -C_5 \\ & & C_6 & -C_4 & C_5 & C_7 \\ & & & C_1 & C_2 & -C_4 \\ & \text{đối xứng} & & & C_3 & C_5 \\ & & & & & C_6 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

(8.53a)

Trong đó:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{AE}{L} \cdot l^2 + \frac{12EI}{L^3} \cdot m^2; C_2 = \left( \frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) \cdot lm; \\ C_3 &= \frac{AE}{L} \cdot m^2 + \frac{12EI}{L^3} \cdot l^2; C_4 = \frac{6EI}{L^2} \cdot m; \\ C_5 &= \frac{6EI}{L^2} \cdot l; C_6 = \frac{4EI}{L}; C_7 = \frac{2EI}{L}; \end{aligned} \right\}$$

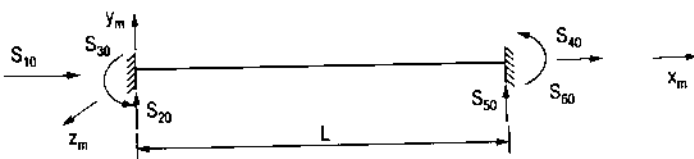
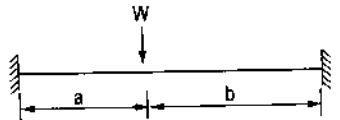
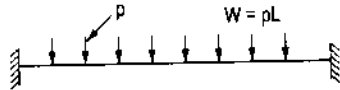
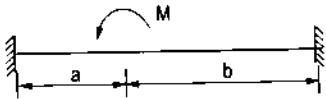
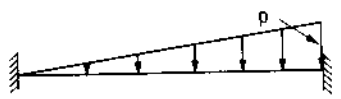
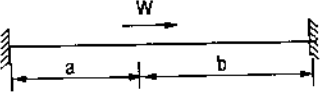

(8.53b)

A: diện tích; E: môđun đàn hồi; L: chiều dài  
l, m: cosin định hướng

*Vectơ tải trọng:*

Để tiện cho việc tính toán, người ta lập sẵn bảng (8.1) trong đó đã được thống kê các phản lực ở 2 đầu dầm ở trạng thái ngàm do các loại tải trọng khác nhau gây ra.

**Bảng 8.1. Các phản lực ở hai đầu dầm trong trạng thái ngàm do các loại tải trọng khác nhau gây ra**

	
	
$S_{30} = \frac{Wab^2}{L^2} \qquad S_{60} = \frac{Wa^2b}{L^2}$ $S_{20} = \frac{Wb^2}{L^3}(2a + b) \qquad S_{50} = \frac{Wa^2}{L^3}(2b + b)$	$S_{30} = -S_{60} = \frac{-WL}{12}$ $S_{20} = -S_{50} = \frac{W}{2}$
	
$S_{30} = \frac{Mb}{L^2}(2a - b) \qquad S_{60} = \frac{Ma}{L^2}(2b - a)$ $S_{20} = -S_{50} = \frac{6Mab}{L^3}$	$S_{30} = \frac{PL}{30} \qquad S_{60} = \frac{+PL^2}{20}$ $S_{20} = \frac{3PL}{20} \qquad S_{50} = \frac{7PL}{20}$
	
$S_{10} = -\frac{Wb}{L} \qquad S_{40} = -\frac{Wa}{L}$	$S_{70} = -\frac{M_x b}{L} \qquad S_{80} = -\frac{M_x a}{L}$

Trong bảng (8.1):  $S_{10}, S_{40}$  - lực dọc;  
 $S_{20}, S_{50}$  - lực cắt;  
 $S_{30}, S_{60}$  - mômen.

Khi tính vectơ tải trọng trong hệ tọa độ cục bộ, ta lấy các giá trị phản lực trong bảng (8.1) nhưng phải đổi dấu toàn bộ. Chẳng hạn dầm chịu tải trọng  $w$ , vectơ tải trọng phải tính như sau:

$$[f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6] = \left[ 0 \quad +\frac{Wb^2}{L^3}(3a+b) \quad -\frac{Wab^2}{L^2} \quad 0 \quad +\frac{Wa^2}{L^3}(a+3b) \quad +\frac{Wa^2b}{L^3} \right]$$

Cần chú ý đến dấu của lực và dấu của mômen đã quy ước trong phần trước.

Sau khi xác định được các ma trận độ cứng trong hệ tọa độ tổng thể và các vectơ tải trọng, ta ghép chúng lại như đã làm trong các chương trước để có hệ phương trình cân bằng tổng thể:

$$K \cdot Q = F$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ tổng thể. Tiếp theo áp dụng (8.50) để tính các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ cục bộ. Nội lực cuối cùng ở hai đầu dầm tính như sau:

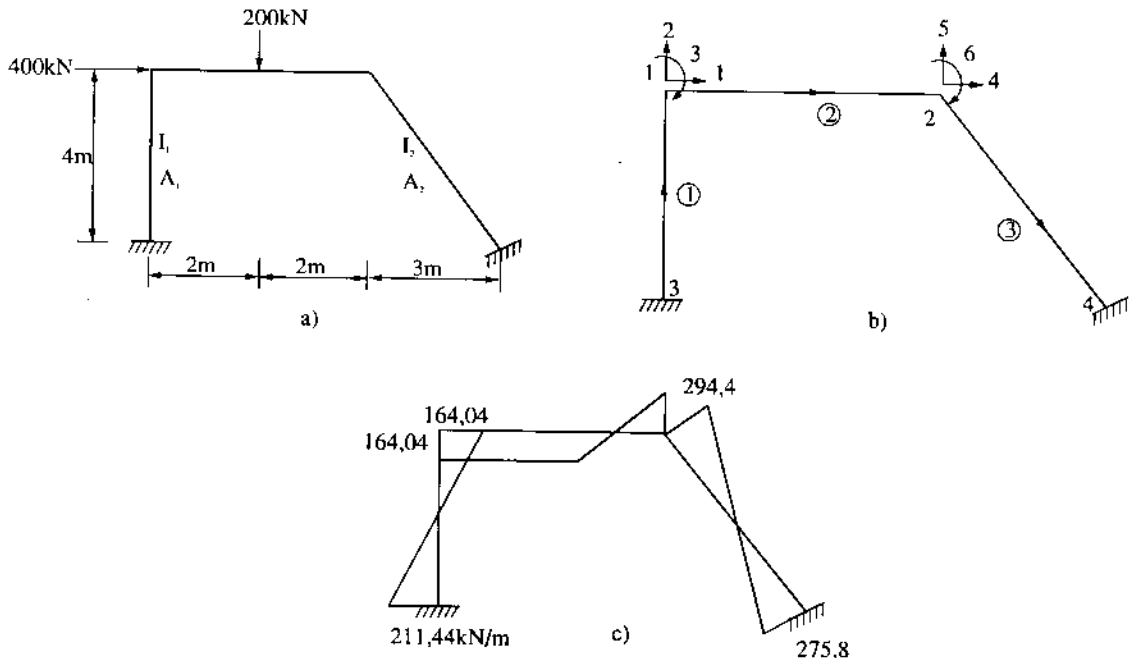
$$S = k_c \cdot q + S_0 \quad (8.54)$$

So tra ở bảng (8.1)

**Ví dụ 8.4:** Cho 1 khung như trên hình (8.16).

$$E = 2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2; I_1 = 12 \times 10^{-5} \text{ m}^4; A_1 = 0,03 \text{ m}^2; I_2 = 15 \times 10^{-5} \text{ m}^4; A_2 = 0,035 \text{ m}^2$$

Vẽ biểu đồ mômen. Bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc.



Hình 8.16

Giải:

Căn cứ vào ma trận xoay  $\mathbf{R}$  ở (8.46) và ma trận độ cứng  $\mathbf{k}_e$  trong hệ tọa độ cục bộ ở (8.24), ta tính ma trận độ cứng tổng thể cho từng phần tử. Tiếp theo, căn cứ vào bảng (8.1) để tính vector tải trọng trong hệ tọa độ cục bộ, từ đó, dùng (8.51) để tính vector tải trọng trong hệ tọa độ tổng thể.

Phần tử 1:

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} 15 \times 10^4 & 0 & 0 & -15 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 450 & 900 & 0 & -450 & 900 \\ 0 & 900 & 2400 & 0 & -900 & 1200 \\ -15 \times 10^4 & 0 & 0 & 15 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -450 & -900 & 0 & 450 & -900 \\ 0 & 900 & 1200 & 0 & -900 & 2400 \end{bmatrix} \quad (a)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (b)$$

Ma trận độ cứng tổng thể  $\mathbf{K} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{R}$ :

BTD tổng thể	7	8	9	1	2	3
7	450	0	-900	-450	0	-900
8	0	$15 \times 10^4$	0	0	$-15 \times 10^4$	0
9	-900	0	2400	900	0	1200
1	-450	0	900	450	0	900
2	0	$-15 \times 10^4$	0	0	$15 \times 10^4$	0
3	-900	0	1200	900	0	2400

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 450 & 0 & -900 & -450 & 0 & -900 \\ 0 & 15 \times 10^4 & 0 & 0 & -15 \times 10^4 & 0 \\ -900 & 0 & 2400 & 900 & 0 & 1200 \\ -450 & 0 & 900 & 450 & 0 & 900 \\ 0 & -15 \times 10^4 & 0 & 0 & 15 \times 10^4 & 0 \\ -900 & 0 & 1200 & 900 & 0 & 2400 \end{bmatrix} \quad (c)$$

↑  
BTD tổng thể

Phần tử 2:

Trục phần tử 2  $x_m$  song song với trục x trong hệ trục tọa độ tổng thể nên không cần biến đổi ma trận độ cứng.

$$\text{BTD tổng thể} \rightarrow \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \mathbf{K}_2 = & \begin{bmatrix} 15 \times 10^4 & 0 & 0 & -15 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 450 & 900 & 0 & -450 & 900 \\ 0 & 900 & 2400 & 0 & -900 & 1200 \\ -15 \times 10^4 & 0 & 0 & 15 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -450 & -900 & 0 & 450 & -900 \\ 0 & 900 & 1200 & 0 & -900 & 2400 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (d)$$

Căn cứ vào bảng (8.1), tính vector tải trọng trong hệ tọa độ tổng thể (không cần biến đổi):

$$\mathbf{F}_{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{WL}{2} \\ \frac{WL}{8} \\ 0 \\ \frac{WL}{2} \\ \frac{WL}{8} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -100 \\ +100 \\ 0 \\ -100 \\ 100 \end{Bmatrix} \quad (e)$$

Phần tử 3:

$$\mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} 14 \times 10^4 & 0 & 0 & -14 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 288 & 720 & 0 & -288 & 720 \\ 0 & 720 & 2400 & 0 & -720 & 1200 \\ -14 \times 10^4 & 0 & 0 & 14 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -288 & -720 & 0 & 288 & -720 \\ 0 & 720 & 1200 & 0 & -720 & 2400 \end{bmatrix} \quad (f)$$

$$C_x = 0,6$$

$$C_y = -0,8$$



$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (g)$$

$$\mathbf{K}_3 = \mathbf{R}' \cdot \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{R}$$

$$\begin{array}{l} \text{BTD tổng thể} \rightarrow \\ \begin{array}{cccccc} & 4 & 5 & 6 & 10 & 11 & 12 \\ \begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} & \begin{bmatrix} 50584 & -67062 & 576 & -50584 & 67062 & 576 \\ -67062 & 89704 & 432 & 67062 & -89704 & 432 \\ 576 & 432 & 2400 & 576 & 432 & 1200 \\ -50584 & 67062 & 576 & 50584 & -67062 & -576 \\ 67062 & -89704 & 432 & -67062 & 89704 & -432 \\ 576 & 432 & 1200 & -576 & -432 & 2400 \end{bmatrix} \end{array} \\ \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{BTD tổng thể} \end{array} \end{array} \quad (h)$$

Sau khi ghép các ma trận độ cứng  $\mathbf{K}_i$  và các vectơ tải trọng ta được:

$$\begin{bmatrix} 150450 & 0 & 900 & -150000 & 0 & 0 \\ 0 & 150450 & 900 & 0 & -450 & 900 \\ 900 & 900 & 4800 & 0 & -900 & 1200 \\ -150000 & 0 & 0 & 200584 & -67062 & 576 \\ 0 & -450 & -900 & -67062 & 90154 & -468 \\ 0 & 900 & 1200 & 576 & -468 & 4800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ -100,0 \\ -100,0 \\ 0,0 \\ -100,0 \\ 100,0 \end{bmatrix} \quad (i)$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị:

$$Q = \begin{bmatrix} 0,2876 \\ 0,00010073 \\ -0,0395 \\ 0,2856 \\ 0,2107 \\ 0,0169 \end{bmatrix} \quad (j)$$

Nội lực ở hai đầu thanh:

Nội lực ở hai đầu của mỗi phần tử tính theo (8.54).

$$S = k_e \cdot q + S_0$$

Trong đó:  $q$  tính theo (8.50):

$$q = R \cdot Q$$

$S_0$  tra ở bảng (8.1)

Phần tử 1:

$$q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,2876 \\ 1,0073 \times 10^{-4} \\ -0,0395 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1,0073 \times 10^{-4} \\ -0,2876 \\ -0,0395 \end{bmatrix} \quad (k)$$

$$S = \begin{bmatrix} 15 \times 10^4 & 0 & 0 & -15 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 450 & 900 & 0 & -450 & 900 \\ 0 & 900 & 2400 & 0 & -900 & 1200 \\ -15 \times 10^4 & 0 & 0 & 15 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -450 & -900 & 0 & 450 & -900 \\ 0 & 900 & 1200 & 0 & -900 & 2400 \end{bmatrix} \times \quad (l)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1,0073 \times 10^{-4} \\ -0,2876 \\ -0,0395 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15,11 \\ 93,87 \\ 211,44 \\ 15,11 \\ -93,87 \\ 164,04 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2: Vì phần tử 2 song song với trục x nên  $\mathbf{q} = \mathbf{Q}$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 15 \times 10^4 & 0 & 0 & -15 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 450 & 900 & 0 & -450 & 900 \\ 0 & 900 & 2400 & 0 & -900 & 1200 \\ -15 \times 10^4 & 0 & 0 & 15 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -450 & -900 & 0 & 450 & -900 \\ 0 & 900 & 1200 & 0 & -900 & 2400 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} 0,2876 \\ 1,0073 \times 10^{-4} \\ -0,0395 \\ 0,2856 \\ 0,2107 \\ 0,0169 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0 \\ 100,0 \\ -100,0 \\ 0,0 \\ 100,0 \\ +100,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300,0 \\ -15,1 \\ -164,06 \\ -300,0 \\ 215,1 \\ -296,4 \end{bmatrix} \quad (\text{m})$$

Phần tử thứ 3:

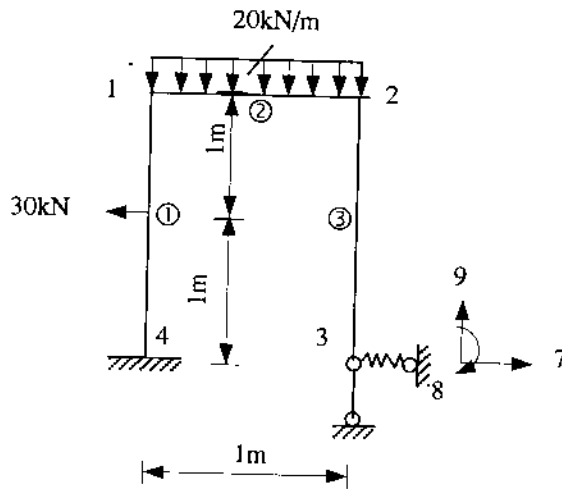
$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & -0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,2856 \\ 0,2107 \\ 0,0169 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,8 \times 10^{-3} \\ 0,3549 \\ 0,0169 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix} \quad (\text{n})$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 14 \times 10^4 & 0 & 0 & -14 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 288 & 720 & 0 & -288 & 720 \\ 0 & 720 & 2400 & 0 & -720 & 1200 \\ -14 \times 10^4 & 0 & 0 & 14 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -288 & -720 & 0 & 288 & -720 \\ 0 & 720 & 1200 & 0 & -720 & 2400 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} 2,8 \times 10^{-3} \\ 0,3549 \\ 0,0169 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +392,0 \\ +114,4 \\ 296,1 \\ -392,0 \\ -114,4 \\ 275,8 \end{bmatrix} \quad (\text{o})$$

Biểu đồ mômen vẽ trên hình (3.16c).

Ví dụ 8.5: Cho 1 khung phẳng như trên hình 8.17.



Diện tích:  $8 \times 10^{-3} \text{ m}^2$   
 Mômen quán tính:  $2 \times 10^{-4} \text{ m}^4$   
 Môđun đàn hồi:  $21 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$   
 Gối tựa đàn hồi men theo BTD thứ 7  
 Hệ số độ cứng:  $10 \times 10^4 \text{ KN/m}$

Hình 8.17

Dùng phương pháp phần tử hữu hạn tính:

- 1- Chuyển vị
- 2- Mômen
- 3- Lực cắt

Giải:

Số BTD cần tính: 8

Số BTD triệt tiêu: 4

Số thứ tự BTD triệt: 9, 10, 11, 12

Lập các MTĐC riêng:

Căn cứ vào (8.53a) ta được các MTĐC riêng như sau:

Thanh 1:

$$S_1 = \begin{matrix} \text{BTD tổng thể} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 63000 & 0 & -63000 \\ \text{đối xứng} & & 0 \\ & & 84000 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

Thanh 2:

$$S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1680000 & 0 & 0 & -1680000 & 0 & 0 \\ & 504000 & -252000 & 0 & -504000 & -252000 \\ & & 1680000 & 0 & 252000 & 84000 \\ & & & 1680000 & 0 & 0 \\ & \text{đối xứng} & & & 504000 & 252000 \\ & & & & & 168000 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Thanh 3:

$$S_3 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 8 \\ 63000 & 0 & -63000 & -63000 & 0 & -63000 \\ & 840000 & 0 & 0 & 840000 & 0 \\ & & 84000 & 63000 & 0 & 42000 \\ & & & 63000 & 0 & 63000 \\ & \text{đối xứng} & & & 840000 & 0 \\ & & & & & 84000 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \\ 8 \end{matrix}$$

2- Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1743000 & 0 & -63000 & -1680000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1344000 & -252000 & 0 & -504000 & -252000 & 0 & 0 \\ & & 2520000 & 0 & 252000 & 8400 & 0 & 0 \\ & & & 1743000 & 0 & -63000 & 0 & -63000 \\ & & & & 1344000 & 252000 & 0 & 0 \\ & & & & & 2000 & 0 & 42000 \\ & \text{đối xứng} & & & & & 840000^* & 0 \\ & & & & & & & 840000 \end{bmatrix}$$

3- Đưa các tải trọng trên nhịp về tải trọng tác dụng tại các nút

Ta có vectơ tải trọng:

$$f = \begin{bmatrix} -15 \\ -10 \\ 9,167 \\ 0 \\ -10 \\ -1,667 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



*Giải:*

Trong phương trình mô hình lò xo, phải thống kê toàn bộ các BTD. Ở đây toàn bộ BTD = 12. Số BTD cần tính = 12. Số BTD có chuyển vị cho trước: 5. Số thứ tự BTD có chuyển vị cho trước: 1, 2, 3, 10, 11. Các chuyển vị cho trước tương ứng: 0 0 0 0,02 -0,03.

Các phần tử trên đường chéo chính ứng các số thứ tự BTD nói trên cần được cộng thêm số C khá lớn. Các phần tử của vector tải trọng ứng với các số thứ tự BTD nói trên cũng cần được cộng thêm giá trị (C × chuyển vị tương ứng).

1- Căn cứ vào (8.53a), thành lập các MTĐC riêng:

Thanh 1:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 63000 & 840000 & 63000 & -63000 & -840000 & 63000 & 1 \\ & 840000 & 0 & -840000 & -840000 & 0 & 2 \\ & & 840000 & -63000 & 0 & 42000 & 3 \\ & & & 63000 & 840000 & -63000 & 4 \\ & \text{đối xứng} & & & 840000 & 0 & 5 \\ & & & & & 840000 & 6 \end{bmatrix}$$

Thanh 2:

$$S_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1680000 & 1680000 & 0 & -1680000 & -1680000 & 0 & 4 \\ & 504000 & -252000 & -1680000 & -504000 & -252000 & 5 \\ & & 1680000 & 0 & 252000 & -252000 & 6 \\ & & & 1680000 & 1680000 & 0 & 7 \\ & \text{đối xứng} & & & 504000 & 252000 & 8 \\ & & & & & 84000 & 9 \end{bmatrix}$$

Thanh 3:

$$S_3 = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ -63000 & 840000 & -63000 & 63000 & -840000 & -63000 \\ & -840000 & 0 & -840000 & 840000 & 0 \\ & & 840000 & 63000 & 0 & 42000 \\ & & & -63000 & 840000 & 63000 \\ & \text{đối xứng} & & & -840000 & 0 \\ & & & & & 840000 \end{bmatrix}$$

2- Ghép các ma trận độ cứng riêng vào MTĐC tổng thể:

$$\begin{bmatrix}
 63000 * & 840000 & 63000 & -63000 & -840000 & 63000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 840000 * & 0 & -840000 & -840000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 840000 * & -63000 & 0 & 42000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 1743000 & 2520000 & -63000 & -1680000 & -1680000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 1344000 & -252000 & -1680000 & -504000 & -252000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 2520000 & 0 & 252000 & -252000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 1617000 & 2520000 & -63000 & 63000 & -840000 & -63000 & 0 \\
 & & & & & & & -336000 & 252000 & -840000 & 840000 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & 1680000 & 63000 & 0 & 42000 & 0 \\
 & & & & & & & & & -63000 * & 840000 & 63000 & 0 \\
 & & & & & & & & & & -840000 * & 0 & 840000
 \end{bmatrix}$$

3- Đưa các tải trọng trên nhịp về tải trọng tác dụng tại các nút (tạo ra trạng thái ngàm). Ta có vectơ tải trọng.

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -15 * \\ 0 * \\ -7,5 * \\ -15 \\ -10 \\ 9,167 \\ 0 \\ -10 \\ -1,67 \\ 0 * \\ 0 * \\ 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

4- Biến đổi MTĐC tổng thể và vectơ tải trọng. Ứng với các phần tử có dấu ngôi sao trên đường chéo chính của MTĐC tổng thể S, cần cộng thêm giá trị c.

Giá trị cực đại tuyệt đối của MTĐC tổng thể là  $|\max| = 2520000$ . Chọn giá trị  $c = 2520000 \times 10^8 = 252 \times 10^{12}$ .

$$S(1,1) = 63000 + 252 \times 10^{12}$$

$$S(2,2) = 840000 + 252 \times 10^{12}$$

$$S(3,3) = 840000 + 252 \times 10^{12}$$

$$S(10,10) = -63000 + 252 \times 10^{12}$$

$$S(11,11) = -840000 + 252 \times 10^{12}$$

Ứng với các phần tử có đánh dấu sao trên vectơ tải trọng, ta cộng thêm giá trị (c x chuyển vị tương ứng):



$$f(1) = -15 + c \times 0 = -15$$

$$f(2) = 0 + c \times 0 = 0$$

$$f(3) = -7,5 + c \times 0 = -7,5$$

$$f(10) = 0 + c \times 0,02$$

$$f(11) = 0 + c \times (-0,03)$$

5- Căn cứ vào MTĐC  $S^*$  và vectơ tải trong  $f^*$  đã được biến đổi, ta giải hệ phương trình để được các giá trị chuyển vị.

$$(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8, Q_9, Q_{10}, Q_{11}, Q_{12}) =$$

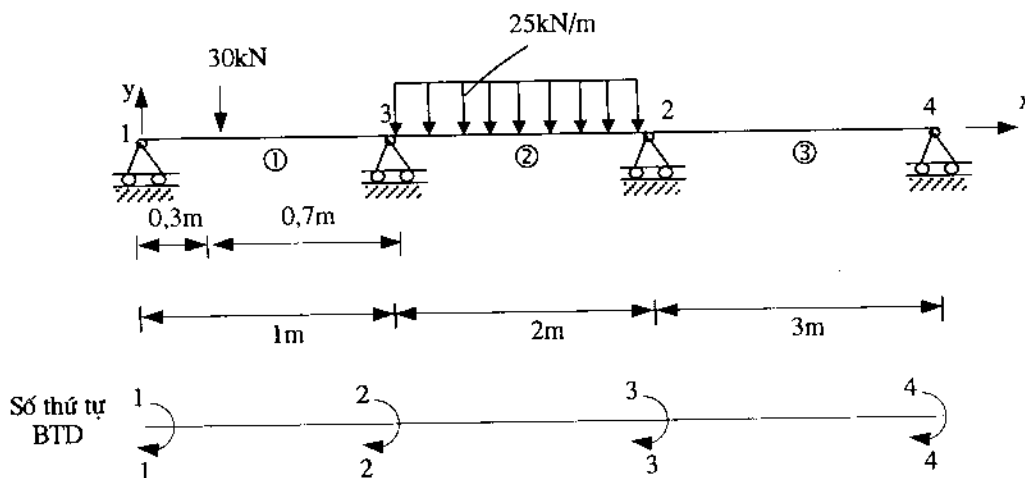
$$(0 \quad 0 \quad 0 \quad -0,028m \quad 0,008m \quad -0,026rad \quad -0,028m \quad 0,029m \quad -0,028rad \quad 0,02m \quad -0,03m \quad -0,022rad)$$

6- Căn cứ vào (8,24); (8, 50), (8,54), tính nội lực cho mỗi phần tử của khung. Kết quả ghi trong bảng (8.4).

Phần tử	Nội lực	Mômen (kN - m)		Lực cắt (kN)	
1	-	-694,269	416,118	-154,076	124,076
2		-416,118	248,151	-654,269	674,269
3		-248,151	0	124,076	-124,076

### §8.3. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TÍNH DÂM LIÊN TỤC TRÊN GỐI TỰA THÔNG THƯỜNG (CRT 10)

Lấy thí dụ trên hình (8.19).



**Hình 8.19**

1- Nhập số liệu

Số thanh = 3; Số BTD có chuyển vị = 4;

Có 3 loại thanh cần thống kê:

- a) Thanh chịu tải trong phân bố đều
- b) Thanh chịu tải trọng tập trung
- c) Thanh không chịu tải trọng

Trong thí dụ trên:

Số thanh chịu tải trọng phân bố đều = 1

Số thanh chịu tải trọng tập trung = 1

Số thanh không chịu tải trọng = 1

Số thứ tự thanh chịu tải trọng phân bố đều = 2

Cường độ tải trọng tương ứng: -25kN/m

Số thứ tự thanh chịu tải trọng tập trung: 1

- Tải trọng tương ứng: -30kN

- Vị trí tải trọng tương ứng: 0,3m; 0,7m

Số thứ tự thanh không chịu tải trọng: 3

Ở trên, quy ước dấu của tải trọng như sau:

- Dương nếu cùng chiều với trục tọa độ y

- Âm trong trường hợp ngược lại

Các số liệu khác thống kê trong bảng (8.5)

**Bảng 8.5**

Phần tử	Chiều dài	Môđun đàn hồi	Mômen quán tính	Số TT BTĐ $d_1$	Số TT BTĐ $d_2$
1	1m	$21 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$	$23 \times 10^{-6} \text{ m}^4$	1	2
2	2m	$21 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$	$23 \times 10^{-6} \text{ m}^4$	2	3
3	3m	$21 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$	$23 \times 10^{-6} \text{ m}^4$	3	4

2- Căn cứ vào các số liệu nhập vào, tính các ma trận độ cứng riêng theo (8.23) (ở đây, chỉ xét đến mômen, không xét đến lực cắt).

3- Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể

4- Lập vectơ tải trọng

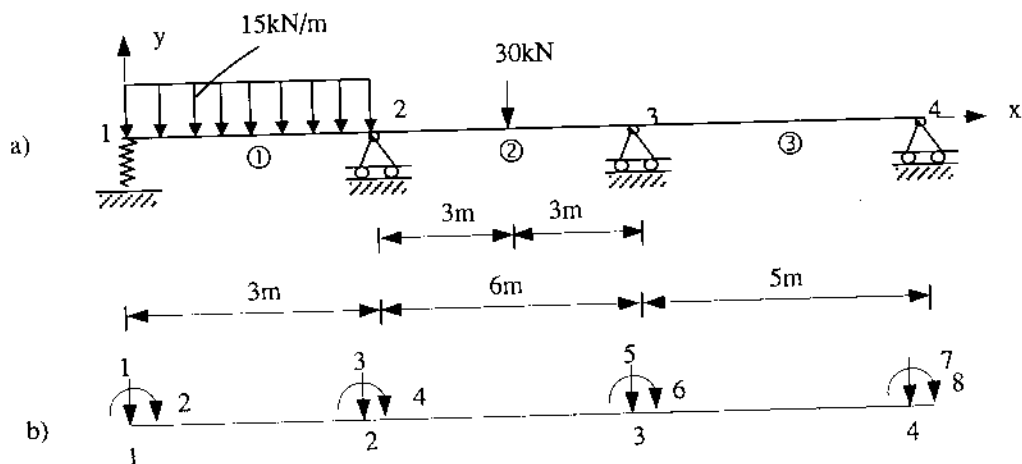
5- Giải hệ phương trình để được giá trị các thành phần chuyển vị

6- Tính mômen theo (8.30)

7- Tính lực cắt theo giá trị mômen vừa tính trên.

#### §8.4. THUẬT TOÁN TÍNH DẦM LIÊN TỤC TRÊN GỖI TỰA ĐÀN HỒI (CTR 11)

Lấy thí dụ trên hình (8.20)



Hình 8.20

1- Nhập các số liệu:

Mỗi nút có 2 BTD. Số thứ tự BTD biểu thị như sau:

Tại nút i: - Lực thẳng đứng:  $2i - 1$

- Mômen:  $2i$  (xem hình (8.20b))

Số thanh: 3

Số bậc tự do có chuyển vị: 5

Số thứ tự BTD có chuyển vị: 1, 2, 4, 6, 8 (hình 8.20b)

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 3

Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 3, 5, 7

Số BTD có gối tựa đàn hồi: 1

Số thứ tự BTD có gối tựa đàn hồi: 1 (hình 3.20a)

Hệ số độ cứng tương ứng:  $10 \times 10^4$  kN/m

Số thanh chịu tải trọng phân bố đều: 1

Số thanh chịu tải trọng tập trung: 1

Số thanh không chịu tải trọng: 1

Số thứ tự thanh chịu tải trọng phân bố đều: 1

Cường độ tải trọng: -50 kN/m

Số thứ tự thanh chịu tải trọng tập trung: 2

- Tải trọng: -30kN

- Vị trí tải trọng tập trung: 3, 3 (hình 8.20a)

Số thứ tự thanh không chịu tải trọng : 3

Các số liệu khác thống kê trong bảng (8.6)

Bảng 8.6

Phần tử	Chiều dài	Môđun đàn hồi	Mômen quán tính	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$
1	3m	$21 \times 10^7$	$120 \times 10^{-6}$	1	2	3	4
2	6m	$21 \times 10^7$	$120 \times 10^{-6}$	3	4	5	6
3	5m	$21 \times 10^7$	$120 \times 10^{-6}$	5	6	7	8

2- Căn cứ vào (8.23), lập các ma trận độ cứng riêng

3- Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể

4- Biến đổi MTĐC tổng thể

Cộng vào phần tử thứ nhất trên đường chéo chính của MTĐC tổng thể số C khá lớn.

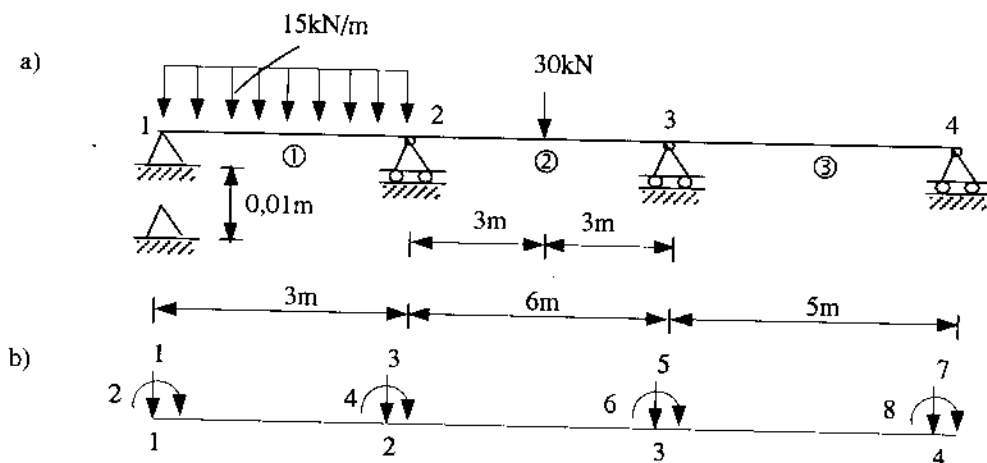
5- Lập vectơ tải trọng

6- Giải hệ phương trình để được giá trị các thành phần chuyển vị

7- Tính nội lực trung tâm liên tục theo (8.30)

### §8.5. THUẬT TOÁN TÍNH DẦM LIÊN TỤC TRÊN GỐI TỤ LÚN THEO PHƯƠNG PHÁP MÔ HÌNH Lò XO (CTR 12)

Lấy thí dụ trên hình (8.21).



Hình 8.21

1- Nhập các số liệu

Số thứ tự các BTD thống kê như trong chương trình CTR 11.

Số thanh: 3

Tổng số BTD: 8

Số thanh chịu tải trọng phân bố đều: 1

- Số thanh chịu tải trọng tập trung: 1
- Số thanh không chịu tải trọng: 1
- Số thứ tự thanh chịu tải trọng phân bố đều: 1
- Cường độ tải trọng:  $-15 \text{ kN/m}$
- Số thứ tự thanh chịu tải trọng tập trung: 2
  - Tải trọng:  $-30 \text{ kN}$
  - Vị trí tải trọng tập trung: 3,3 (hình 8.21)
- Số BTĐ có chuyển vị cho trước: 4
- Số thứ tự BTĐ có chuyển vị cho trước: 1, 3, 5, 7
- Chuyển vị cho trước tương ứng: 0,01; 0; 0; 0
- Các số liệu khác thống kê trong bảng (8.7)

**Bảng 8.7**

Phần tử	Chiều dài	Môđun đàn hồi	Mômen quán tính	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$
1	3m	$21 \times 10^7$	$120 \times 10^{-6}$	1	2	3	4
2	6m	$21 \times 10^7$	$120 \times 10^{-6}$	3	4	5	6
3	5m	$21 \times 10^7$	$120 \times 10^{-6}$	5	6	7	8

- 2- Căn cứ vào (8.23), lập các ma trận độ cứng riêng
- 3- Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể
- 4- Gọi chương trình con để tính giá trị cực đại tuyệt đối của các phần tử trong MTĐC tổng thể. Chọn giá trị C.
- 5- Biến đổi MTĐC tổng thể bằng cách thêm số C vào mỗi phần tử ứng với số thứ tự BTĐ có chuyển vị cho trước trên đường chéo chính của MTĐC tổng thể.
- 6- Lập vector tải trọng: Biến đổi vector tải trọng bằng cách thêm vào giá trị (C x chuyển vị tương ứng) cho mỗi phần tử ứng với số thứ tự BTĐ có chuyển vị cho trước.
- 7- Gọi chương trình con để giải hệ phương trình.
- 8- Tính nội lực theo (8.30).

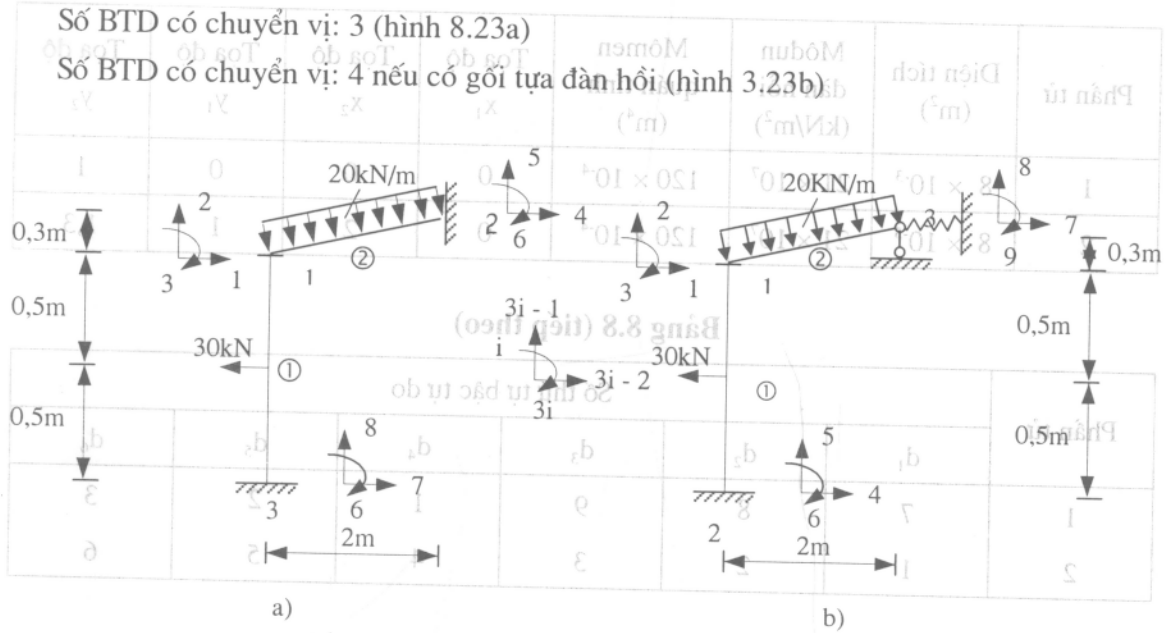
### §8.6. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TÍNH KHUNG PHẪNG TRÊN GỐI TỰA THÔNG THƯỜNG HOẶC GỐI TỰA ĐÀN HỒI (CTR 14)

Lấy thí dụ trên hình (8.22)

- 1- Nhập số liệu

Số thanh: 2

Bảng 8.8



Hình 8.22 (trường hợp có gối tựa đàn hồi)

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 6 (hình 3.22a)	Môđun đàn hồi (m <sup>2</sup> )	Diện tích (m <sup>2</sup> )	Phần tử
Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 4, 5, 6, 7, 8, 9 (hình 3.22a)			
Số BTD có gối tựa đàn hồi: 1 (hình 8.22b)	$2 \times 10^4$	$21 \times 10^4$	
- Số BTD triệt tiêu: 4, 5, 6, 8 (hình 3.22b)	$2 \times 10^4$	$21 \times 10^4$	
- Số thứ tự BTD có gối tựa đàn hồi: 7 (hình 3.22b)			
- Hệ số độ cứng tương ứng: $10 \times 10^4$ kN/m			
Số thanh chịu tải trọng phân bố: 1			
Số thanh chịu tải trọng tập trung: 1			
Số thanh không chịu tải trọng: 0			
Số thứ tự thanh chịu tải trọng phân bố đều: 2			
Cường độ tải trọng: -20 kN/m.			

Hình 8.23

Số thứ tự thanh chịu tải trọng tập trung: 1

- Tải trọng: 30kN

- Vị trí tải trọng tập trung: 0,5m; 0,5m (hình 3.22).

Quy ước về dấu của tải trọng (xem hình 8.22) như sau: Từ chiều dương của trục thanh x quay một góc 90° ngược chiều kim đồng hồ; tải trọng là dương nếu cùng chiều với trục y, là âm trong trường hợp ngược lại. Các số liệu còn lại thống kê trong các bảng (8.8) và (8.9).

**Bảng 8.8**

Phần tử	Diện tích (m <sup>2</sup> )	Môđun đàn hồi (kN/m <sup>2</sup> )	Mômen quán tính (m <sup>4</sup> )	Tọa độ x <sub>1</sub>	Tọa độ x <sub>2</sub>	Tọa độ y <sub>1</sub>	Tọa độ y <sub>2</sub>
1	8 × 10 <sup>-3</sup>	21 × 10 <sup>7</sup>	120 × 10 <sup>-4</sup>	0	0	0	1
2	8 × 10 <sup>-3</sup>	21 × 10 <sup>7</sup>	120 × 10 <sup>-4</sup>	0	2	1	1,3

**Bảng 8.8 (tiếp theo)**

Phần tử	Số thứ tự bậc tự do					
	d <sub>1</sub>	d <sub>2</sub>	d <sub>3</sub>	d <sub>4</sub>	d <sub>5</sub>	d <sub>6</sub>
1	7	8	9	1	2	3
2	1	2	3	4	5	6

**Bảng 8.9 (trường hợp có gối tựa đàn hồi)**

Phần tử	Diện tích (m <sup>2</sup> )	Môđun đàn hồi (kN/m <sup>2</sup> )	Mômen quán tính (m <sup>4</sup> )	Tọa độ (m)			
				x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>
1	8 × 10 <sup>-3</sup>	21 × 10 <sup>7</sup>	2 × 10 <sup>-4</sup>	0	0	0	1
2	8 × 10 <sup>-3</sup>	21 × 10 <sup>7</sup>	2 × 10 <sup>-7</sup>	0	2	1	1,3

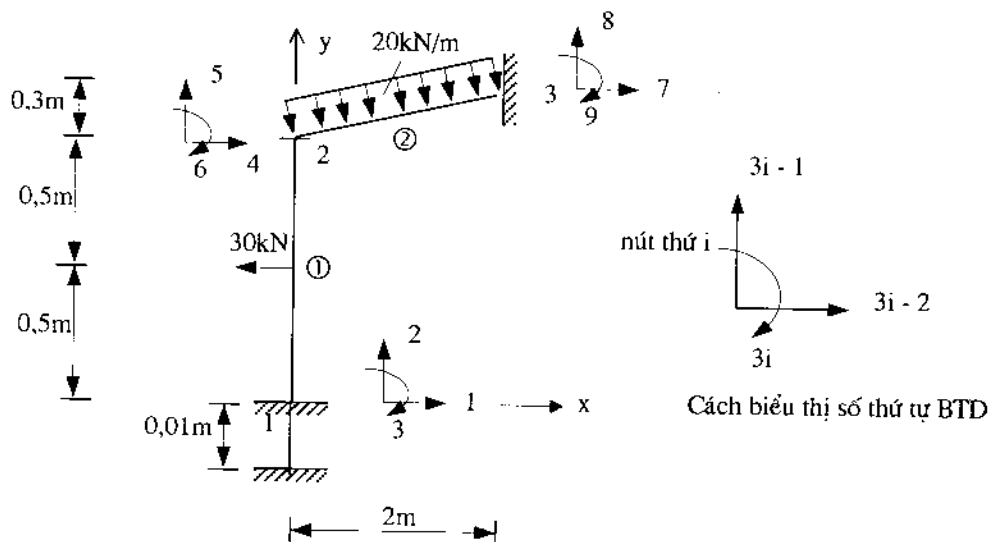
**Bảng 8.9 (tiếp theo)**

Phần tử	Số thứ tự bậc tự do					
	d <sub>1</sub>	d <sub>2</sub>	d <sub>3</sub>	d <sub>4</sub>	d <sub>5</sub>	d <sub>6</sub>
1	4	5	6	1	2	3
2	1	2	3	7	8	9

- 2- Lập các ma trận độ cứng riêng theo (8.53a)
- 3- Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể
- 4- Nếu có gối tựa đàn hồi, biến đổi MTĐC tổng thể như trong ví dụ (8.5)
- 5- Lập vectơ tải trọng
- 6- Gọi chương trình con để giải hệ phương trình
- 7- Tính nội lực theo (8.24), (8.50), (8.54)

§8.7. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TÍNH KHUNG PHẪNG TRÊN GỐI TỤ LÚN THEO PHƯƠNG PHÁP MÔ HÌNH LÒ XO (CTR 15)

Lấy thí dụ trên hình (8.24)



Hình 8.24

I- Nhập số liệu

Số thanh: 2.

Tổng số BTD: 9.

Số BTD có chuyển vị cho trước 1, 2, 3, 7, 8, 9 (hình 8.24).

Số thứ tự BTD có chuyển vị cho trước 1, 2, 3, 7, 8, 9 (hình 8.24).

Chuyển vị tương ứng: 0; -0,01; 0; 0; 0; 0.

Số thanh chịu tải trọng phân bố đều: 1.

Số thanh chịu tải trọng tập trung: 1.

Số thanh không chịu tải trọng: 0.

Số thứ tự thanh chịu tải trọng phân bố đều: 2.

Cường độ tải trọng: -20kN/m.

Số thứ tự thanh chịu tải trọng tập trung: 1.

Tải trọng: 30 kN.

Vị trí tải trọng tập trung: 0,5m, 0,5m.

Quy ước dấu tải trọng như trong CTR 14.

Các số liệu khác thống kê trong bảng (8.10).



**Bảng 8.10**

Phần tử	Diện tích (m <sup>2</sup> )	Môđun đàn hồi (kN/m <sup>2</sup> )	Mômen quán tính (m <sup>4</sup> )	Tọa độ (m)			
				x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>
1	8 × 10 <sup>-3</sup>	21 × 10 <sup>7</sup>	2 × 10 <sup>-4</sup>	0	0	0	1
2	8 × 10 <sup>-3</sup>	21 × 10 <sup>7</sup>	2 × 10 <sup>-7</sup>	0	2	1	1,3

**Bảng 8.10 (tiếp theo)**

Phần tử	Số thứ tự bậc tự do					
	d <sub>1</sub>	d <sub>2</sub>	d <sub>3</sub>	d <sub>4</sub>	d <sub>5</sub>	d <sub>6</sub>
1	1	2	3	4	5	6
2	4	5	6	7	8	9

- 2- Lập các MTĐC riêng theo (8.53a)
- 3- Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể
- 4- Biến đổi MTĐC tổng thể như đã làm trong ví dụ (8.3)
- 5- Lập vectơ tải trọng
- 6- Biến đổi vectơ tải trọng như đã làm trong ví dụ (8.3)
- 7- Căn cứ vào MTĐC tổng thể và vectơ tải trọng đã được biến đổi, gọi chương trình con để giải hệ phương trình
- 8- Tính nội lực theo (8.24), (8.50), (8.54).