

## Chương 9

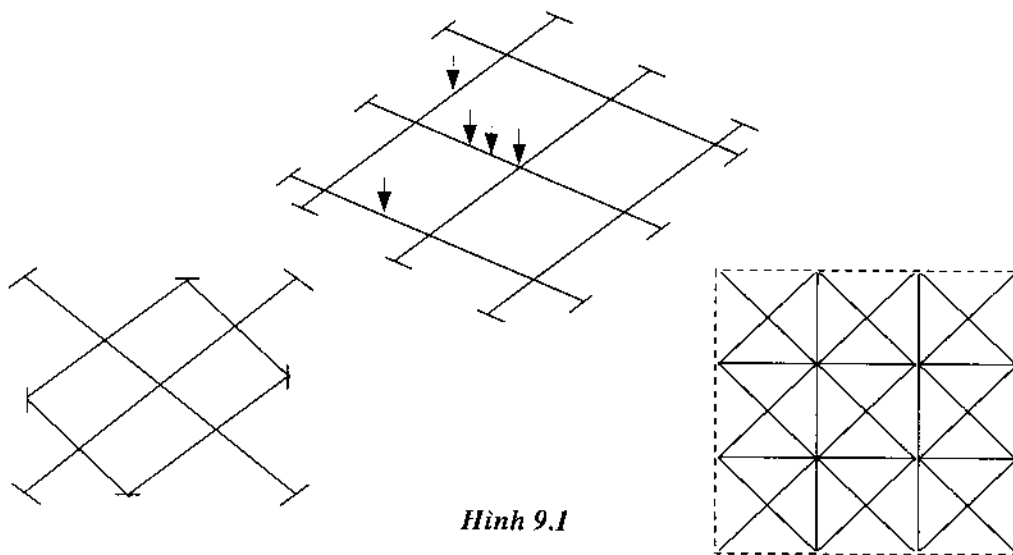
# HỆ DẪM GIAO NHAU

Hệ dầm giao nhau là hệ trong đó các dầm trực giao hoặc không trực giao cùng nằm trong một mặt phẳng, còn tải trọng thì vuông góc với mặt phẳng đó (hình 9.1). Khác với hệ phẳng có nút cứng, sự làm việc của hệ dầm giao nhau có tính chất không gian.

Hệ dầm giao nhau thường thấy trong sàn nhà, mái nhà, sàn cầu.

Mỗi phần tử của hệ dầm giao nhau có các thành phần nội lực: mômen uốn, lực cắt và mômen xoắn. Bậc tự do gồm có góc xoay, góc xoắn và chuyển vị trên phương vuông góc với mặt phẳng của dầm.

Cách tính hệ dầm giao nhau tương tự như cách tính hệ khung. Trước hết, ta thành lập hệ thức ma trận giữa vectơ nội lực và vectơ chuyển vị của mỗi phần tử, sau đó xuất phát từ điều kiện cân bằng của từng nút để thành lập hệ thức ma trận giữa vectơ tải trọng và vectơ chuyển vị của các nút.



Hình 9.1

### §9.1 HỆ THỨC MA TRẬN GIỮA VECTƠ NGOẠI LỰC VÀ VECTƠ CHUYỂN VỊ TRONG HỆ TỌA ĐỘ CHUNG. MA TRẬN ĐỘ CỨNG CỦA PHẦN TỬ TRONG HỆ TỌA ĐỘ CHUNG

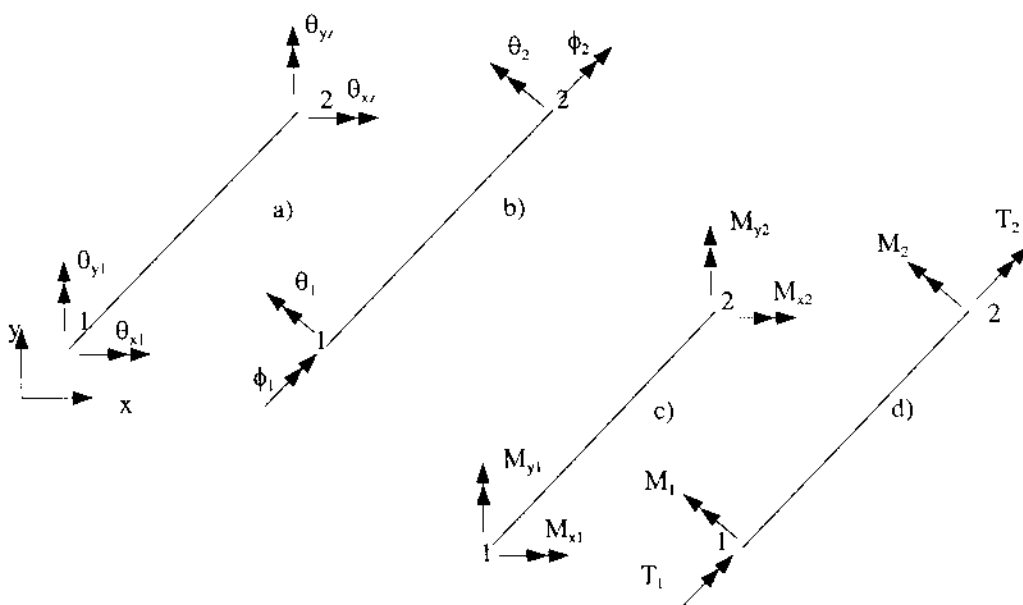
Giả sử một phần tử bất kỳ có 2 đầu 1 và 2 liên kết với 2 nút nào đó của hệ (hình 9.2). Ta chọn hệ tọa độ chung  $X, Y, Z$  trong đó các trục  $X$  và  $Y$  nằm trong mặt phẳng của hệ dầm, trục  $Z$  vuông góc với mặt phẳng của dầm.

Trong hệ tọa độ riêng (hình 9.2b và 9.2d), ta có các thành phần nội lực.

$M_1, M_2$  - mômen uốn tại đầu 1 và đầu 2;  $T_1, T_2$  - mômen xoắn tại đầu 1 và đầu 2;  $F_{z1}, F_{z2}$  - lực cắt tại đầu 1 và đầu 2 trên phương của trục Z (không biểu thị trên hình vẽ). Các thành phần chuyển vị tương ứng là:  $\theta_1, \theta_2$  - góc xoay tại đầu 1 và đầu 2;  $\psi_1, \psi_2$  - góc xoắn tại đầu 1 và đầu 2;  $W_1, W_2$  - thành phần chuyển vị tại đầu 1 và đầu 2 trên phương trục Z (không biểu thị trên hình vẽ).

Trong hệ tọa độ chung (hình 9.2a và 9.2c) ta có các thành phần nội lực:

$M_{x1}, M_{x2}$  - mômen quanh trục X tại đầu 1 và đầu 2;  $M_{y1}, M_{y2}$  - mômen quanh trục Y tại đầu 1 và đầu 2;  $F_{z1}, F_{z2}$  như trên. Các thành phần chuyển vị tương ứng là:  $\theta_{x1}, \theta_{x2}$  - góc xoay quanh trục X tại đầu 1 và đầu 2;  $\theta_{y1}, \theta_{y2}$  - góc xoay quanh trục Y tại đầu 1 và đầu 2;  $W_1, W_2$  như trên.



Hình 9.2

Đối với mômen xoắn, ta có các hệ thức:

$$\left. \begin{aligned} T_2 &= G \cdot J (\psi_2 - \psi_1) \\ T_1 &= -T_2 \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

Trong đó:  $G$  - môđun trượt;

$J$  - mômen quán tính xoắn.

Bây giờ ta tìm cách đưa các thành phần nội lực và các thành phần chuyển vị về tọa độ chung X, Y, Z. Từ hình (9.2), ta có các công thức:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \theta_{x1} \cdot l + \theta_{y1} \cdot m & \psi_2 &= \theta_{x2} \cdot l + \theta_{y2} \cdot m \\ \theta_1 &= -\theta_{x1} \cdot m + \theta_{y1} \cdot l & \theta_2 &= -\theta_{x2} \cdot m + \theta_{y2} \cdot l \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

Trong đó:  $l, m$  - cosin định hướng của phân tử 1 - 2.

Căn cứ vào công thức (9.2), ta có hệ thức ma trận giữa các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ riêng và các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ tổng thể như sau:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \psi_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \psi_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -m & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \end{bmatrix}$$

Vậy ma trận xoay  $R$  có dạng.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -m & 1 \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

Căn cứ vào (8.33) (chương 8) và công thức (9.1), ta có hệ thức ma trận giữa nội lực và các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ riêng như sau:

$$\begin{bmatrix} F_{z1} \\ T_1 \\ M_1 \\ F_{z2} \\ T_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{-12EI}{L^3} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{JG}{L} & 0 & 0 & \frac{-JG}{L} & 0 \\ \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{-GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \psi_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \psi_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

Vậy ma trận độ cứng riêng trong hệ tọa độ cục bộ có dạng:

$$k_e = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{-12EI}{L^3} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{JG}{L} & 0 & 0 & \frac{-JG}{L} & 0 \\ \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{-GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (9.5)$$

Theo (1.39) (chương một), ta có ma trận độ cứng riêng trong hệ tọa độ chung như sau:

$$K = R' \cdot k_e \cdot R \quad (9.6)$$

Sau khi thực hiện phép nhân ma trận, ta được:

$$K = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & -C_1 & C_2 & C_3 \\ & C_4 & C_5 & -C_2 & C_6 & C_7 \\ & & C_8 & -C_3 & C_7 & C_9 \\ & & & C_1 & -C_2 & -C_3 \\ \text{Đối xứng} & & & & C_4 & C_5 \\ & & & & & C_8 \end{bmatrix} \quad (9.6a)$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} C_1 &= 12EI/L^3 & C_2 &= \frac{6EI}{L^2} \cdot m \\ C_3 &= \frac{-6EI}{L^2} \cdot l & C_4 &= (4m^2 + \alpha l^2) \cdot \frac{EI}{L} \\ C_5 &= (4 - \alpha) \cdot l \cdot m \cdot \frac{EI}{L} & C_6 &= (2m^2 - \alpha l^2) \cdot \frac{EI}{L} \\ C_7 &= -(2 + \alpha) \cdot l \cdot m \cdot \frac{EI}{L} & C_8 &= (4l^2 + \alpha m^2) \cdot \frac{EI}{L} \\ C_9 &= (2l^2 - \alpha m^2) \cdot \frac{EI}{L} & \alpha &= \frac{GJ}{EI} \end{aligned}$$

Cuối cùng, ta có hệ thức ma trận giữa vectơ ngoại lực và vectơ chuyển vị trong hệ tọa độ chung ứng với một phần tử như sau:

$$\begin{bmatrix} F_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ F_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_e \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

Các ký hiệu đã được giải thích trong phần đầu.

Phương trình ma trận (9.7) có thể viết dưới dạng:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{Q}_e \quad (9.8)$$

Trong đó:  $\mathbf{F}_e$  - vectơ ngoại lực của phần tử e;

$\mathbf{K}_e$  - ma trận độ cứng tổng thể của phần tử e;

$\mathbf{Q}_e$  - vectơ chuyển vị của phần tử e trong hệ tọa độ tổng thể.

Sau khi ghép các vectơ  $\mathbf{F}_e$  và ma trận  $\mathbf{K}_e$  như đã làm trong các chương trước, ta được hệ phương trình cân bằng trong hệ tọa độ chung:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{Q} \quad (9.9)$$

Trong đó:  $\mathbf{F}$  - vectơ ngoại lực ứng với toàn hệ;

$\mathbf{K}$  - ma trận độ cứng tổng thể ứng với toàn hệ;

$\mathbf{Q}$  - vectơ chuyển vị ứng với toàn hệ.

Giải hệ phương trình (9.9), ta được giá trị các thành phần chuyển vị của toàn hệ trong hệ tọa độ chung.

Tính các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ riêng theo công thức sau:

$$\mathbf{q} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q} \quad (9.10)$$

Cuối cùng, tính nội lực của mỗi phần tử theo hệ thức ma trận (9.4).

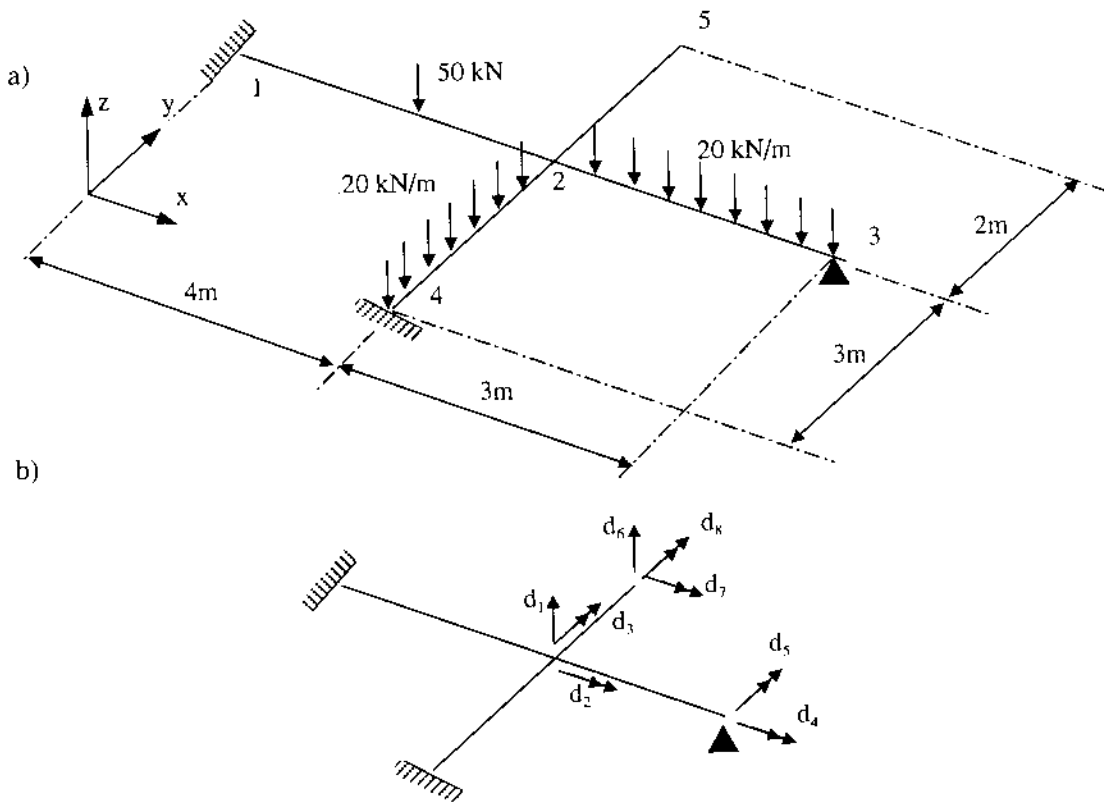
## §9.2. TRÌNH TỰ TÍNH TOÁN HỆ DẦM GIAO NHAU

Lấy thí dụ hệ trên hình (9.3). Ta tiến hành tính toán theo các bước sau:

1. Chọn hệ trục tọa độ X, Y, Z trong đó các trục X, Y nằm trong mặt phẳng của hệ dầm, trục Z vuông góc với mặt phẳng của dầm. Thống kê tọa độ của các nút như trong bảng sau:

Tọa độ các nút

Nút	x	Y	Nút	x	Y
1	0	3	4	4	0
2	4	3	5	4	5
3	7	3			



Hình 9.3

2- Xác định bậc tự do của hệ. Như trên đã trình bày, mỗi nút có 3 bậc tự do (2 góc xoay và 1 thành phần chuyển vị trên phương trục Z). Vậy số bậc tự do.

$$n = 3 \times \text{số nút} - \text{số bậc tự do triệt tiêu ở các gối tựa}$$

Đối với hệ trên hình (9.3a):  $n = 3.5 - (6 + 1) = 8$ . Các bậc tự do biểu thị trên hình (9.3b) và thống kê trong bảng sau:

Nút	w	$\theta_x$	$\theta_y$
1	0	0	0
2	$d_1$	$d_2$	$d_3$
3	0	$d_4$	$d_5$
4	0	0	0
5	$d_6$	$d_7$	$d_8$

3- Xác định vị trí các đầu 1 và 2 của các phần tử. Dùng số thứ tự của các nút để biểu thị vị trí của các đầu 1 và 2 đồng thời tính các cosin định hướng của các phần tử. Đối với các phần tử trên hình (9.3), ta thống kê các số liệu trong bảng sau:

Vị trí các đầu 1 và 2

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2	l	m
1	1	2	1	0
2	2	3	1	0
3	4	2	0	1
4	2	5	0	1

4- Theo (9.6a), thành lập ma trận độ cứng của các phần tử.

5- Khi các phần tử chịu tác dụng trực tiếp của các tải trọng tập trung hoặc tải trọng phân bố, cần tạo ra trạng thái ngàm và trạng thái tự do. Chẳng hạn đối với hệ trên hình (9.3), ta có trạng thái ngàm như trên hình (9.4a). Cần chú ý trong các bảng tính sẵn, người ta chỉ cho biểu thức của các nội lực ở trạng thái ngàm trong hệ tọa độ riêng. Để đưa các nội lực này về hệ tọa độ chung, ta áp dụng các công thức:

$$M_{x1} = T_1 l - M_1 \cdot m;$$

$$M_{y1} = T_1 m + M_1 \cdot l;$$

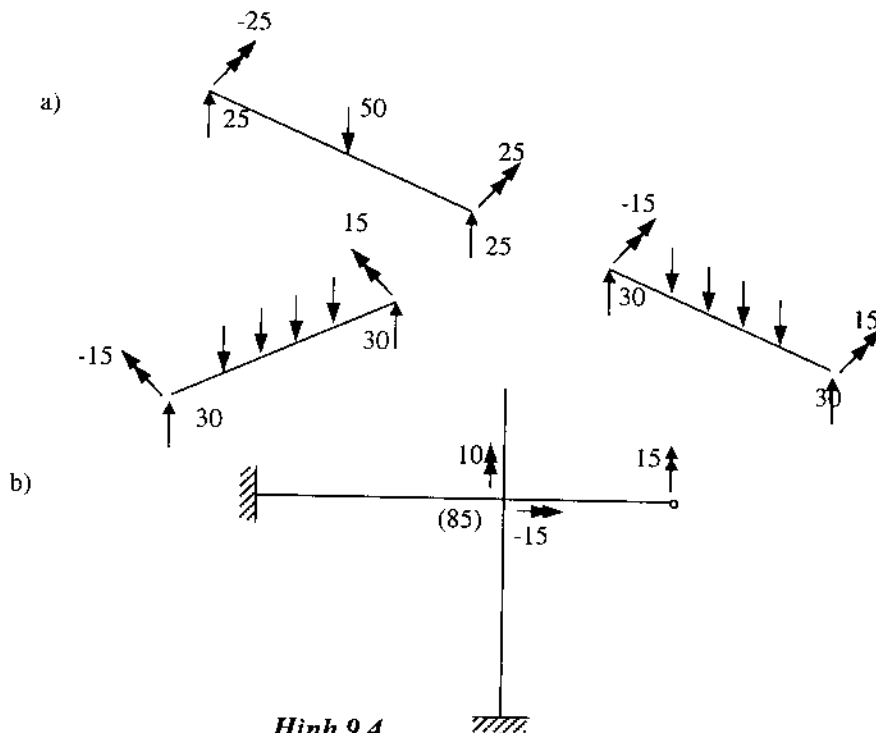
$$M_{x2} = T_2 l - M_2 \cdot m;$$

$$M_{y2} = T_2 m + M_2 \cdot l;$$

Trong đó:  $T_1, T_2$  - mômen xoắn tại đầu 1 và đầu 2;

$M_1, M_2$  - mômen uốn tại đầu 1 và đầu 2.

Vì các nút bị chốt nên sản sinh ra phản lực tại các nút như trên hình (9.4b), số nằm trong dấu ngoặc là phản lực trên phương trục Z.



Hình 9.4

Cần tạo ra trạng thái tự do bằng cách giữ nguyên giá trị tuyệt đối của các phản lực trên hình (9.4b) nhưng đổi chiều của chúng. Như vậy, từ hình (9.4b), ta suy ra các thành phần tải trọng tác dụng lên hệ ở trạng thái tự do như sau:

$$F_1 = -(85) = -85; \quad F_2 = -(-15) = 15; \quad F_3 = -(10) = -10;$$

$$F_4 = 0 \quad F_5 = -(15) = -15; \quad F_6 = F_7 = F_8 = 0$$

6- Căn cứ vào các thành phần tải trọng trên, ta được hệ thức ma trận:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}}_F = \begin{bmatrix} & & & \\ & \mathbf{K} & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}}_Q$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị của vectơ chuyển vị ( $d_1, d_2, \dots, d_n$ ).

7- Tính nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do. áp dụng các công thức:

$$M_1 = \frac{EI}{L} \left[ (4\theta_1 + 2\theta_2) - \frac{6}{L}(W_2 - W_1) \right]$$

$$M_2 = \frac{EI}{L} \left[ (2\theta_1 + 4\theta_2) - \frac{6}{L}(W_2 - W_1) \right]$$

$$T_1 = -T_2 = \frac{GJ}{L} (\Phi_2 - \Phi_1) \tag{9.11}$$

Trong đó:  $\theta_1 = -\theta_{x1} \cdot m + \theta_{y1} \cdot l; \quad \theta_2 = -\theta_{x2} \cdot m + \theta_{y2} \cdot l;$   
 $\psi_1 = \theta_{x1} \cdot l + \theta_{y1} \cdot m; \quad \psi_2 = \theta_{x2} \cdot l + \theta_{y2} \cdot m;$

8- Tính tổng nội lực = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do.

**Thí dụ: 9.1:**

Cho một hệ như trên hình (9.5)

$E = 14.10^6 \text{ kN/m}^2$

$G = 6,36.10^6 \text{ kN/m}^2$

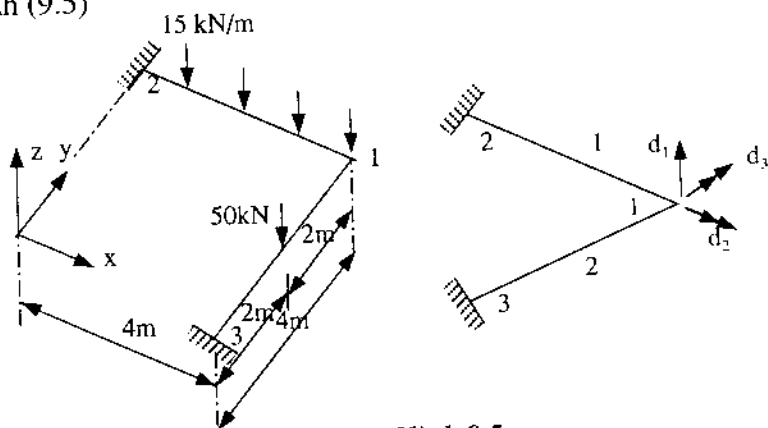
$I = 2600.10^{-6} \text{ m}^4$

$J = 1821.10^{-6} \text{ m}^4$

$L = 4\text{m}$

$A = 125000.10^{-6} \text{ m}^2$

Yêu cầu tính nội lực



**Hình 9.5**

## Công ty Hóa Chất Xây Dựng Phương Nam

*Giải:*

1- Xác định bậc tự do của hệ. Số bậc tự do  $n = 3.3 - 6 = 3$ . Các số liệu ban đầu kê trong các bảng sau:

Tọa độ nút			Bậc tự do				Vị trí các đầu 1 và 2				
Nút	x	y	Nút	W	$\theta_x$	$\theta_y$	Phần tử	Đầu 1	Đầu 2	l	m
1	0	4	1	0	0	0	1	1	2	1	0
2	4	4	2	$d_1$	$d_2$	$d_3$	2	3	1	0	1
3	4	0	3	0	0	0					

2- Thành lập ma trận độ cứng của các phần tử theo (9.6a)

Phần tử 1:

$$k_1 = 10^3 \begin{bmatrix} 6,83 & 0 & 13,65 \\ 0 & 2,895 & 0 \\ 13,65 & 0 & 36,40 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$k_2 = 10^3 \begin{bmatrix} 6,83 & -13,65 & 0 \\ -13,65 & 36,40 & 0 \\ 0 & 0 & 2,895 \end{bmatrix}$$

3- Ghép các ma trận độ cứng riêng thành ma trận độ cứng tổng thể K:

$$K = 10^3 \begin{bmatrix} 6,83 & -13,65 & 13,65 \\ + & & \\ \hline 6,83 & & \\ \hline 13,66 & & \\ & 2,895 & 0 \\ + & & \\ \hline & 36,40 & \\ & \hline & 39,295 & \\ & & 2,895 \\ + & & \\ \hline & & 36,40 \\ & & \hline & & 39,295 \end{bmatrix}$$

Đối xứng

4- Tạo ra trạng thái ngàm (hình 9.6) và trạng thái tự do. Các thành phần tải trọng tại các nút ở trạng thái tự do tính như sau (hình 9.6):

$$F_1 = -(30 + 25) = -55$$

$$F_2 = -(25) = -25$$

$$F_3 = -(20) = -20$$

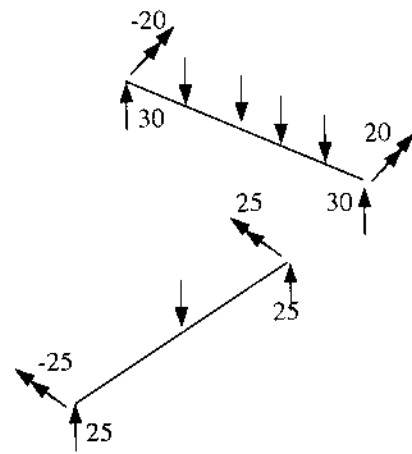
Nội lực ở trạng thái ngàm thống kê trong bảng sau:

Nội lực ở trạng thái ngàm

Phần tử	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>
1	-20	20
2	-25	25

5- Căn cứ vào các thành phần tải trọng đã tính, ta có hệ thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -55 \\ -25 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & K & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$



Hình 9.6

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$(d_1, d_2, d_3) = 10^{-3}(-9,4482, -2,6458, 2,7731)m$$

6- Xác định nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do theo (9.4). Kết quả thống kê trong bảng sau:

**Nội lực do chuyển vị (trạng thái tự do)**

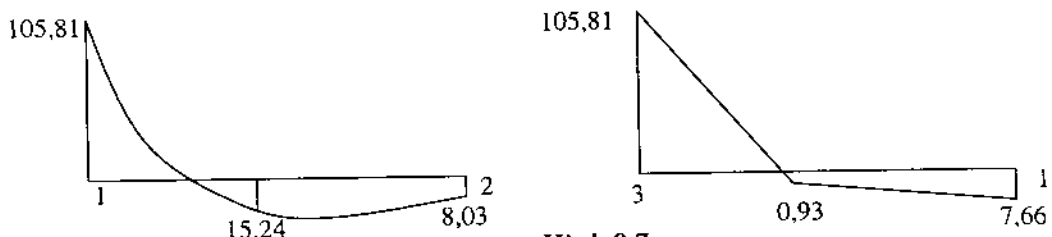
Phần tử	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	T <sub>2</sub> = -T <sub>1</sub>
1	-78,49	-28,03	-7,66
2	-80,81	-32,66	8,03

7- Tính tổng nội lực = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực ở trạng thái tự do. Kết quả thống kê trong các bảng sau:

Phần tử	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	T <sub>2</sub> = -T <sub>1</sub>
1	-20 - 78,49 = -98,49	20 - 28,03 = -8,03	-7,66
2	-25 - 80,81 = -105,81	25 - 32,66 = -7,66	-8,03

8- Vẽ biểu đồ mômen (hình 9.7)

Cần chú ý là tại nút 2, các mômen không cân bằng nhau vì 2 phần tử trực giao với nhau.



Hình 9.7

**Ví dụ 9.2:** Cho một hệ như trên hình (9.8).  $E = 14.10^6 \text{ kN/m}^2$ ,  $G = 6,36.10^6 \text{ kN/m}^2$ . Các đặc trưng hình học thống kê kê trong bảng sau:

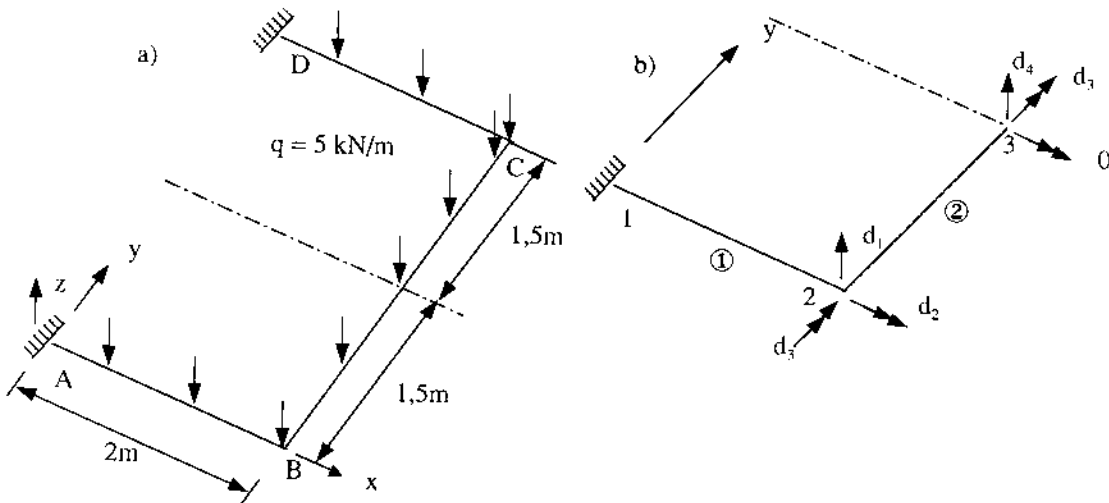
**Đặc trưng hình học (đơn vị bằng mét)**

Phần tử	L	$I \times 10^{-6}$	$J \times 10^{-6}$	$A \times 10^{-6}$
A - B	2	66,67	46,67	20000
D - C	2	66,67	46,67	20000
B - C	3	27,31	19,12	12800

Yêu cầu tính nội lực.

*Giải:*

Vì hệ đối xứng và tải trọng cũng đối xứng nên sơ đồ tính đưa về nửa hệ như trên hình (9.8b).



**Hình 9.8**

1- Xác định bậc tự do. Vì nút 3 nằm trên trục đối xứng nên góc xoay  $\theta_x$  quanh trục triệt tiêu. Mặt khác, góc xoắn của dầm BC tại điểm B và điểm C bằng nhau nên góc xoay nút 2 bằng góc xoắn tại nút 3. Vậy số bậc tự do  $n = 3 + 1 = 4$ . Các số liệu ban đầu thống kê kê trong các bảng sau:

**Tọa độ nút**

Nút	x	y
1	0	0
2	2	0
3	2	1.5

**Bậc tự do**

Nút	w	$\theta_x$	$\theta_y$
1	0	0	0
2	$d_1$	$d_2$	$d_3$
3	$d_4$	0	$d_5$

**Vị trí các đầu 1 và 2**

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2	l	m
1	1	2	1	0
2	2	3	0	1



$$F_3 = -(1,667) = -1,667; F_4 = -(3,75) = -3,75$$

5- Căn cứ vào các thành phần tải trọng trên. ta có hệ thức ma trận:

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8,75 \\ 0,94 \\ -1,67 \\ -3,75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$(d_1, d_2, d_3, d_4) = 10^{-3}(-32,14; -9,30; 23,21; -41,87) \text{ m}$$

6- Tính nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do. Kết quả thống kê trong bảng sau:

**Nội lực do chuyển vị (trạng thái tự do)**

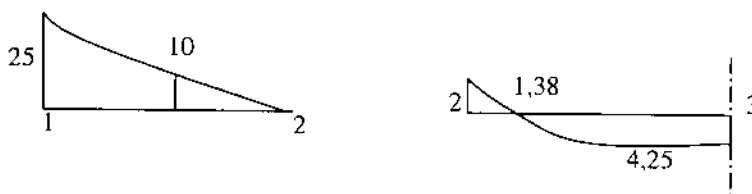
Phần tử	$M_1$	$M_2$	$T_2 = -T_1$
1	-23,33	-1,67	-1,38
2	-0,44	-5,18	0

7- Tính tổng nội lực = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do. Kết quả thống kê trong bảng sau:

**Tổng nội lực**

Phần tử	$M_1$	$M_2$	$T_2 = -T_1$
1	$-1,67 - 23,33 = -25,0$	$1,67 - 1,67 = 0$	-1,38
2	$-0,94 - 0,44 = -1,38$	$0,94 - 5,18 = -4,24$	0

8- Biểu đồ mômen vẽ trên hình (9.10)



**Hình 9.10**

**Ví dụ 9.3:** Cho một hệ như trên hình (9.11).

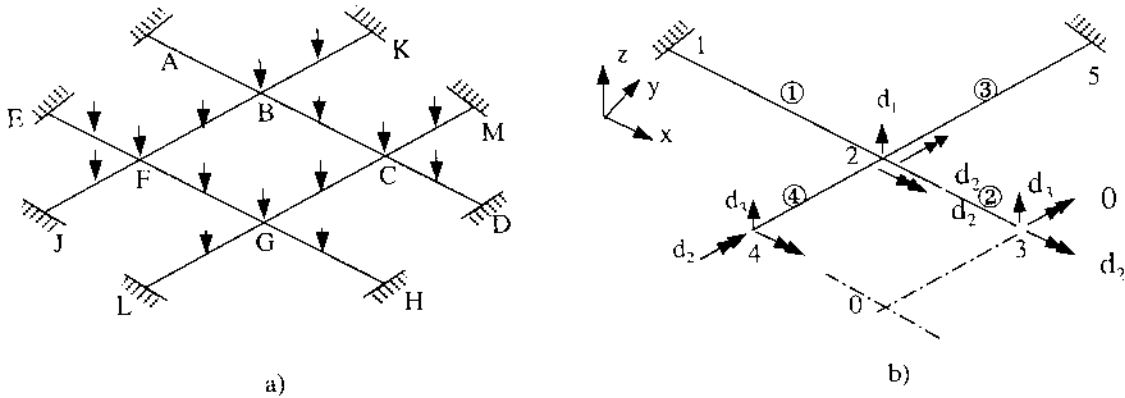
$$E = 14.10^6 \text{ kN/m}^2; G = 6,36.10^6 \text{ kN/m}^2; I = 41666,67.10^{-6} \text{ m}^4$$

$$J = 29166,67.10^{-6} \text{ m}^4; A = 0,5 \text{ m}^2; L = 4 \text{ m}$$

Tải trọng phân bố đều  $q = 2200 \text{ kN/m}$ .

*Giải:*

Vì kết cấu đối xứng và tải trọng đối xứng đối với 2 trục X và Y, ta đưa sơ đồ tính về một phần tư hệ như trên hình (9.11b).



**Hình 9.11**

1- Xác định bậc tự do. Vì các thành phần chuyển vị trên phương trục Z tại các điểm B, C, F, G bằng nhau nên các thành phần chuyển vị trên tại 2 nút 3 và 4 cũng bằng nhau (hình 9.11b). Các dầm BC và FG xoay như một vật thể tuyệt đối cứng (tức không chịu xoắn) nên các góc xoay  $\theta_x$  tại 2 nút 2 và 3 bằng nhau. Phân tích một cách tương tự, góc xoay  $\theta_y$  tại 2 nút 2 và 4 cũng bằng nhau. Vì các nút 3 và 4 nằm trên các trục đối xứng nên  $\theta_x = 0$  tại nút 4,  $\theta_y = 0$  tại nút 3. Cũng vì tính chất đối xứng,  $\theta_x = \theta_y$  tại nút 2. Do sự phân tích trên, số bậc tự do  $n = 3$ . Các bậc tự do biểu thị trên hình (9.11b). Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau:

Tọa độ nút			Bậc tự do			Vị trí các đầu 1, đầu 2					
Nút	x	y	Nút	w	$\theta_x$	$\theta_y$	Phần tử	Đầu 1	Đầu 2	l	m
1	0	2	1	0	0	0	1	1	2	1	0
2	4	2	2	$d_1$	$d_2$	$d_2$	2	2	3	1	0
3	6	2	3	$d_3$	$d_2$	0	3	2	5	0	1
4	4	0	4	$d_3$	0	$d_2$	4	4	2	0	1
5	4	6	5	0	0	0					

2- Thành lập ma trận độ cứng của các phần tử theo (9.6a)

Phần tử 1:

$$k_1 = 10^4 \begin{bmatrix} 10,94 & 0 & 21,88 \\ 0 & 4,64 & 0 \\ 21,88 & 0 & 58,33 \end{bmatrix}$$



**Nội lực ở trạng thái ngàm**

Phần tử	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>
1	-266,67	266,67
2	-66,67	66,67
3	-266,67	266,67
4	-66,67	66,67

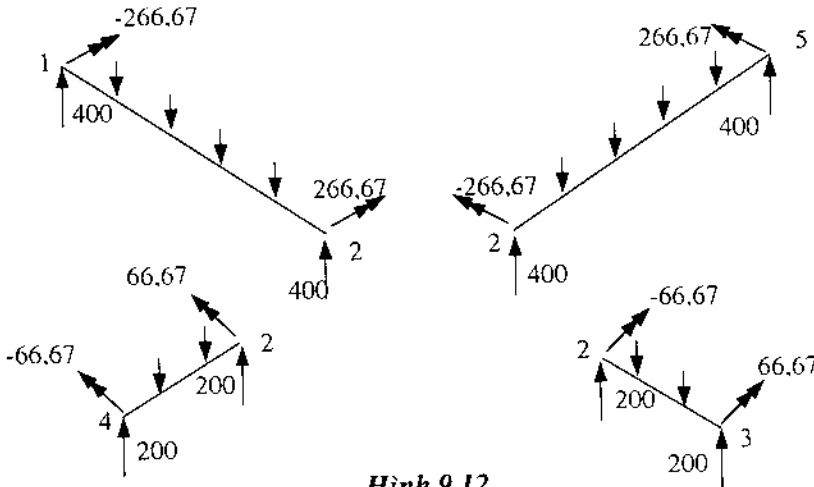
Các thành phần tải trọng tác dụng tại các nút ở trạng thái tự do tính như sau (xem hình 9.12):

$$F_1 = -(400 + 200 + 200 + 400) = -1200$$

$$F_2 = -(266,67 - 66,67 - 66,67 + 266,67) = -400$$

$$F_3 = -(200 + 200) = 400$$

Cần chú ý rằng bậc tự do  $d_2$  hoặc  $d_3$  có thể có phương khác nhau hoặc vị trí khác nhau từ nút này sang nút khác (xem hình 9.11b) nhưng khi tính  $F_2$  hoặc  $F_3$  cần phải lấy tổng của các phản lực tương ứng.



**Hình 9.12**

5- Căn cứ vào các thành phần tải trọng đã tính, ta có hệ thức ma trận

$$\begin{bmatrix} -1200 \\ -400 \\ -400 \end{bmatrix} = \cdot \begin{bmatrix} & & \\ & K & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$(d_1, d_2, d_3) = 10^{-3}(13,93; 3,307; -17,462)m$$

6- Tính nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do theo (9.4). Kết quả thống kê kê trong bảng sau:

Nội lực do chuyển vị (trạng thái tự do)

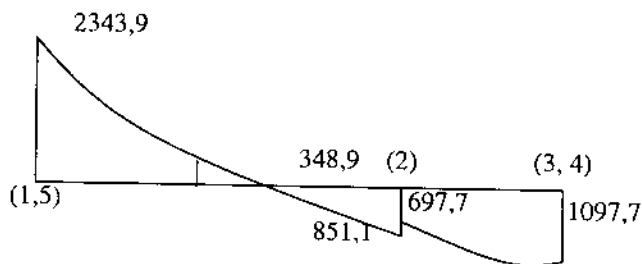
Phần tử	$M_1$	$M_2$	$T_2 = -T_1$
1	-2082,19	-1117,81	153,42
2	764,38	-1164,38	0
3	1117,81	2082,19	-153,42
4	1164,38	-764,38	0

7- Tính tổng nội lực = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực ở trạng thái tự do. Kết quả thống kê trong bảng sau:

Tổng nội lực

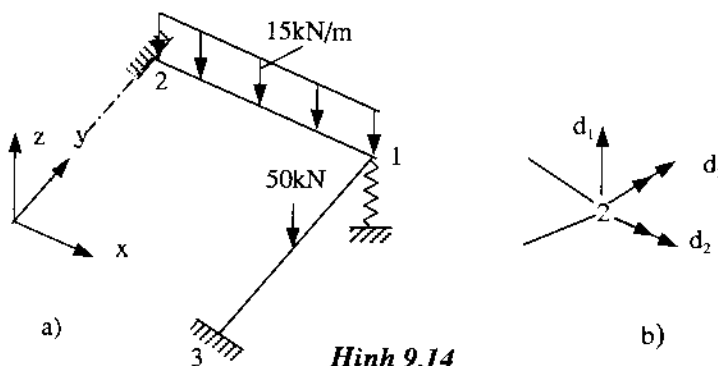
Phần tử	$M_1$	$M_2$	$T_2 = -T_1$
1	-2348,56	-851,14	153,42
2	697,71	-1097,71	0
3	851,14	2348,86	-153,42
4	1097,71	-697,71	0

5- Biểu đồ mômen vẽ trên hình (9.13)



Hình 9.13

Ví dụ 9.4: Dầm dề giống ví dụ (9.1) nhưng thêm gối tựa đàn hồi vào nút 1 (hình 9.14). Hệ số độ cứng:  $40 \cdot 10^3$  kN/m. Tính nội lực.



Hình 9.14

Giải:

Trong ví dụ (9.1), ta đã suy ra phương trình cân bằng:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 13,65 & -13,65 & 13,65 \\ & 39,30 & 0 \\ \text{Đối xứng} & & 39,30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Vì gối tựa đàn hồi men theo BTĐ có số thứ tự 1 (hình 9.14b), ta phải cộng thêm vào giá trị hệ số độ cứng ( $40 \cdot 10^3$ ) vào phần tử thứ nhất trên đường chéo chính của MTĐC tổng kể **K**:

$$K(1, 1) = (13,65 + 40) \cdot 10^3$$

Sau khi đã biến đổi ma trận **K**, giải hệ phương trình cân bằng trên. Ta được:

$$Q = [d_1 \ d_2 \ d_3]' = 10^{-3}[-0,891 \ 0,327 \ -0,199]'m$$

Căn cứ vào (9.10) và (9.4), ta được các thành phần nội lực như sau:

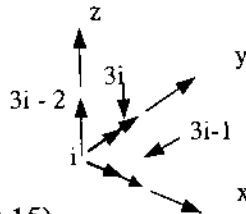
Phần tử	Mômen uốn (kN - m)		Môn xoắn (kN - m)	
	1	2	1	2
1	-35,70	0,58	-0,93	0,93
2	-43,11	0,95	0,58	-0,58

### §9.3. THUẬT TOÁN TÍNH HỆ DẦM TRỤC GIAO (CTR 16)

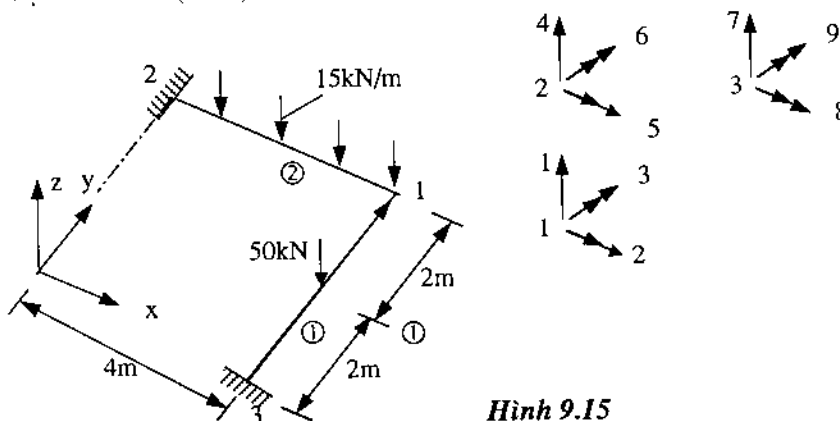
Đối với hệ dầm trục giao, nên chọn hệ tọa độ có các trục X, Y song song với các trục dầm. Chiều của các trục dầm nên chọn sao cho các cosin định hướng đều dương.

Số thứ tự các BTĐ nên chọn như sau:

Tại nút i



Lấy thí dụ trên hình (9.15)



Hình 9.15

## Công ty Hóa Chất Xây Dựng Phương Nam

### I- Nhập số liệu

Số thanh: 2

Số BTT có chuyển vị: 3

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 6

Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 4, 5, 6, 7, 8, 9 hình (9.15)

Tổng số BTD: 9

Số BTD có gối tựa đàn hồi (nếu có)

Số thứ tự BTD có gối tựa đàn hồi (nếu có)

Hệ số độ cứng tương ứng (nếu có)

Số thanh chịu tải trọng phân bố đều: 1

Số thanh chịu tải trọng tập trung: 1

Số thanh không chịu tải trọng : 0

Số thứ tự thanh chịu tải trọng phân bố đều: 2

Cường độ tải trọng:  $-15\text{kN/m}$

Số thứ tự thanh chịu tải trọng tập trung: 1

Tải trọng:  $-50\text{kN}$

Vị trí tải trọng tập trung: 2, 2

Dấu của tải trọng quy ước như sau: dương nếu cùng chiều với trục Z của hệ tọa độ chung, âm trong trường hợp ngược lại. Các số liệu còn lại thống kê trong bảng (9.1).

**Bảng 9.1**

Phần tử	Chiều dài (m)	Cosin định hướng		Diện tích (m <sup>2</sup> )	Mômen quán tính x (m <sup>4</sup> )	Mômen quán tính y (m <sup>2</sup> )	Môđun đàn hồi kN/m <sup>2</sup>	Môđun trượt kN/m <sup>2</sup>
		l	m					
1	4	0	1	0,125	$1821 \cdot 10^{-6}$	$36 \cdot 10^{-6}$	$14 \cdot 10^6$	$6,36 \cdot 10^6$
2	4	1	0	0,125	$1821 \cdot 10^{-6}$	$36 \cdot 10^{-6}$	$14 \cdot 10^6$	$6,36 \cdot 10^6$

**Bảng 9.1 (tiếp theo)**

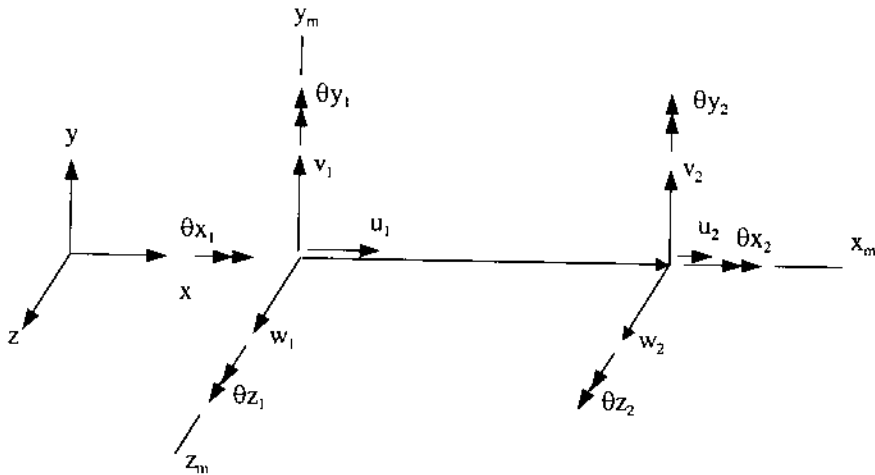
Phần tử	Số thứ tự bậc tự do					
	d <sub>1</sub>	d <sub>2</sub>	d <sub>3</sub>	d <sub>4</sub>	d <sub>5</sub>	d <sub>6</sub>
1	7	8	9	1	2	3
2	4	5	6	1	2	3

- 2- Xác định các ma trận độ cứng riêng theo (9.6a)
- 3- Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể
- 4- Biến đổi MTĐC tổng thể nếu có gối tựa đàn hồi (xem ví dụ (9.4))
- 5- Đưa các tải trọng trên nhịp về tải trọng tác dụng tại cát nút
- 6- Ghép các vectơ tải trọng
- 7- Gọi chương trình con để giải hệ phương trình
- 8- Tính nội lực theo (9.10) và (9.4).

Chương 10

**DẦM BA CHIỀU VÀ KHUNG KHÔNG GIẢN**

§10.1. DẦM BA CHIỀU TRONG HỆ TỌA ĐỘ CỤC BỘ



*Hình 10.1: Dầm 3 chiều trong hệ tọa độ cục bộ*

Dầm ba chiều trong hệ tọa độ cục bộ biểu thị trên hình (10.1). Gọi  $x_m, y_m, z_m$  là hệ tọa độ cục bộ. Trục  $x_m$  trùng với trục của dầm, các trục  $y_m, z_m$  nằm trong mặt cắt ngang của dầm. Dầm có 2 đầu 1 và 2 (trong hệ tọa độ cục bộ), chiều dương của trục  $x_m$  đi từ đầu 1 đến đầu 2. Dầm có tất cả 12 bậc tự do:

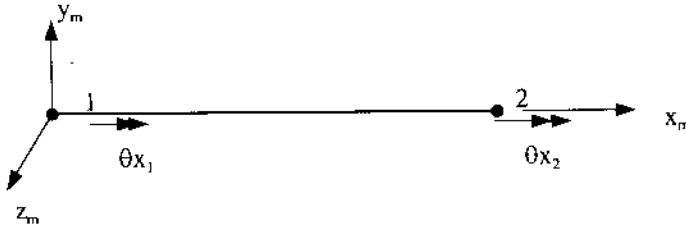
- $u_1(q_1), u_2(q_7)$  - các thành phần chuyển vị trên phương trục  $x_m$  tại đầu 1 và đầu 2.
- $v_1(q_2), v_2(q_8)$  - các thành phần chuyển vị trên phương trục  $y_m$  tại đầu 1 và đầu 2.
- $w_1(q_3), w_2(q_9)$  - các thành phần chuyển vị trên phương trục  $z_m$  tại đầu 1 và đầu 2.
- $\theta_{x_1}(q_4), \theta_{x_2}(q_{10})$  - các thành phần góc xoắn tại đầu 1 và đầu 2.
- $\theta_{y_1}(q_5), \theta_{y_2}(q_{11})$  - các thành phần góc xoay quanh trục  $y_m$  tại đầu 1 và đầu 2.
- $\theta_{z_1}(q_6), \theta_{z_2}(q_{12})$  - các thành phần góc xoay quanh trục  $z_m$  tại đầu 1 và đầu 2.

Để tiện cho việc lập trình, ta biểu thị vectơ chuyển vị của dầm 3 chiều trong hệ tọa độ cục bộ như sau:

$$\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8 \ q_9 \ q_{10} \ q_{11} \ q_{12}]' \tag{10.1}$$

Trước hết, ta sẽ suy ra hệ số độ cứng do xoắn và sau đó, sẽ lợi dụng các hệ số độ cứng do uốn trong mặt phẳng để suy ra ma trận độ cứng của dầm 3 chiều trong hệ tọa độ cục bộ.

### 10.1.1. Hệ số độ cứng do xoắn



Hình 10.2: Góc xoắn tại đầu 1 và đầu 2

Xét dầm trên hình (10.2) trong đó  $\theta_{x_1}$  và  $\theta_{x_2}$  là các góc xoắn tại đầu 1 và đầu 2. Góc xoắn biến thiên tuyến tính dọc theo chiều dài của dầm giống như chuyển vị dọc trục đã nghiên cứu trong các phần trước. Góc xoắn tại 1 điểm bất kỳ trên dầm có thể biểu thị bằng hàm nội suy tuyến tính:

$$\theta_x = L_1 \theta_{x_1} + L_2 \theta_{x_2} \quad (10.2)$$

Trong đó:  $L_1, L_2$  là các tọa độ tự nhiên (xem chương hai).

Biến thiên góc xoắn trên đơn vị dài:

$$\alpha = \frac{d\theta_x}{dx} = \frac{1}{L} (\theta_{x_2} - \theta_{x_1}) \quad (10.3)$$

$$\text{Mômen xoắn có thể viết: } M_x = GI_x \alpha = GI_x \frac{1}{L} (\theta_{x_2} - \theta_{x_1}) \quad (10.4)$$

Xem  $\theta_{x_2} - \theta_{x_1} / L$  như  $\varepsilon$  và  $M_x$  như  $\sigma$  (trong trường hợp biến dạng dọc trục), ta có:

$$D = G \cdot I_x \quad (10.5)$$

$$B = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.6)$$

Theo (2.79) (chương 2), ma trận độ cứng của dầm do xoắn có thể viết:

$$k_m = \int_0^L B' D B dl \quad (10.7)$$

Thay (10.5), (10.6) vào (10.7), ta được:

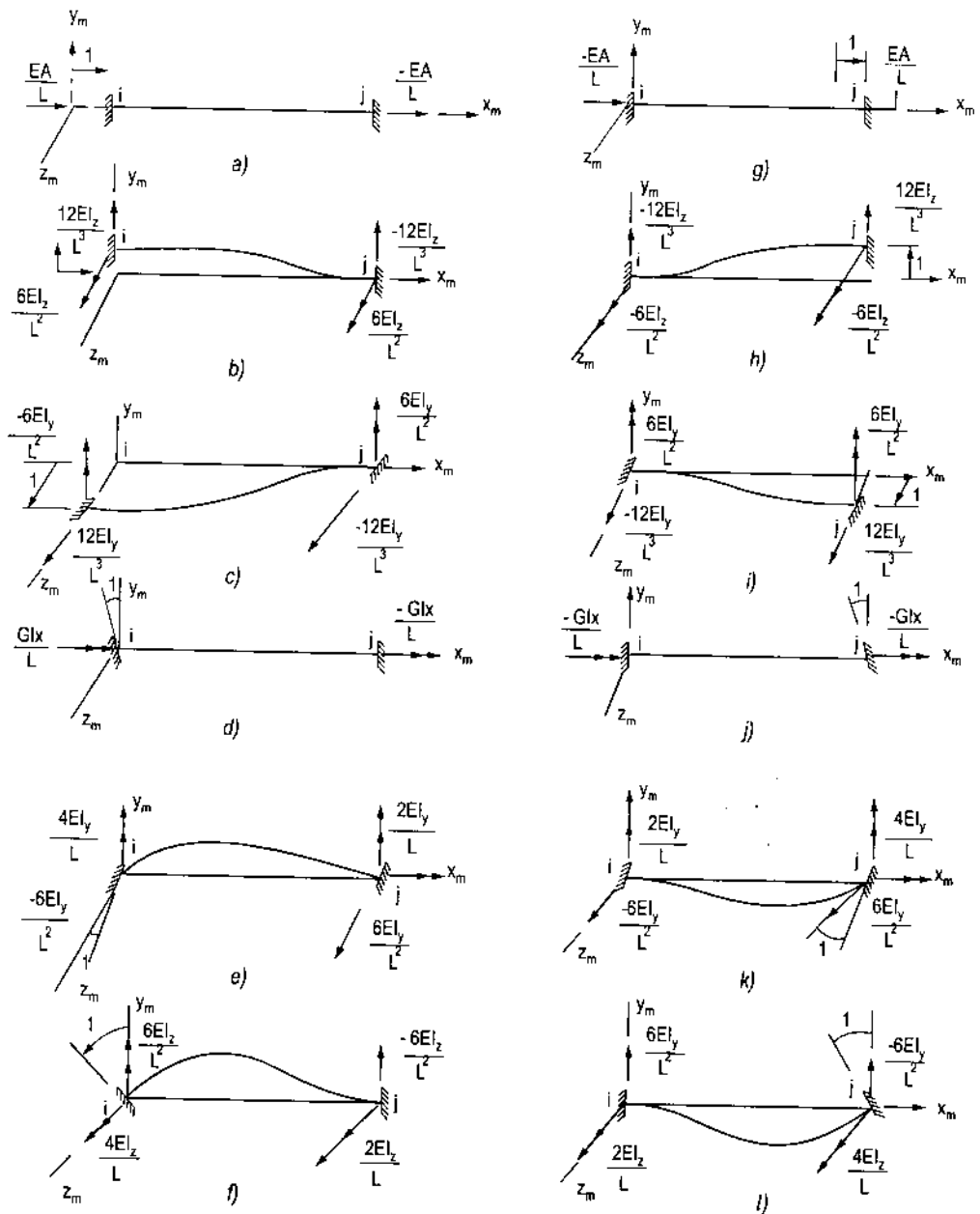
$$k_m = \frac{GI_x}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} dl$$

$$k_m = \frac{GI_x}{L} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \quad (10.8)$$

### 10.1.2. Ma trận độ cứng của dầm 3 chiều trong hệ tọa độ cục bộ

Giả sử dầm 3 chiều có 3 trục  $x_m, y_m, z_m$  lần lượt song song với 3 trục  $x, y, z$  trong hệ tọa độ tổng thể (hình 10.1). Các trục  $y_m$  và  $z_m$  cần chọn sao cho  $x_m - y_m$  và  $x_m - z_m$  là những mặt phẳng uốn chính.

Hình (10.3) trình bày công thức các hệ số độ cứng của dầm 3 chiều, ứng với các chuyển vị bằng đơn vị men theo 12 bậc tự do ở các đầu  $i$  và  $j$ .



Hình 10.3: Các hệ số độ cứng của dầm 3 chiều men theo 12 bậc tự do



Trên hình (10.3a) là lực dọc do chuyển vị bằng đơn vị trên phương  $x_m$  tại nút  $i$  gây ra; trên hình (10.3b) là lực cắt và mômen do chuyển vị bằng đơn vị trên phương  $y_m$  tại nút  $i$  gây ra (dầm chịu uốn thông thường); trên hình (10.3c) là lực cắt và mômen uốn do chuyển vị bằng đơn vị trên phương  $z_m$  tại nút  $i$  gây ra (uốn trong mặt phẳng  $x_m - z_m$ ); trên hình (10.3d) là mômen xoắn do góc xoắn bằng đơn vị tại nút  $i$  gây ra; trên hình (10.3e) là lực cắt và mômen uốn do góc xoay bằng đơn vị quanh trục  $z_m$  tại nút  $i$  gây ra (uốn trong mặt phẳng  $x_m - z_m$ ).

Trên hình (10.3f) là lực cắt và mômen uốn do góc xoay bằng đơn vị quanh trục  $y_m$  tại nút  $i$  gây ra; trên hình (10.3g) là lực dọc do chuyển vị bằng đơn vị trên phương  $x_m$  tại nút  $j$  gây ra; trên hình (10.3h) là lực cắt và mômen uốn do chuyển vị bằng đơn vị trên phương  $y_m$  tại nút  $j$  gây ra; trên hình (10.3i) là lực cắt và mômen uốn do chuyển vị bằng đơn vị trên phương  $z_m$  tại nút  $j$  gây ra (uốn trong mặt phẳng  $x_m - z_m$ ); trên hình (10.3j) là mômen xoắn do góc xoắn quanh trục  $y_m$  tại nút  $j$  gây ra; trên hình (10.3k) là mômen uốn và lực cắt do góc xoay bằng đơn vị quanh trục  $z_m$  tại nút  $j$  gây ra (uốn trong mặt phẳng  $x_m - z_m$ ). Trên hình (10.3l) là lực cắt và mômen uốn do góc xoay bằng đơn vị quanh trục  $y_m$  tại nút  $j$  gây ra.

Các hệ số độ cứng trong hình (10.3) được sắp xếp theo số thứ tự các bậc tự do cục bộ trong bảng (10.9) để tạo thành ma trận độ cứng của dầm 3 chiều trong hệ tọa độ cục bộ.

Giữa các thành phần nội lực và các thành phần chuyển vị tương ứng trong hệ tọa độ riêng, ta có hệ thức ma trận:

$$\mathbf{NL} = \begin{bmatrix} N_1 \\ Q_{1y} \\ Q_{1z} \\ M_{1x} \\ M_{1y} \\ M_{1z} \\ N_2 \\ Q_{2y} \\ Q_{2z} \\ M_{2x} \\ M_{2y} \\ M_{2z} \end{bmatrix} = \mathbf{k} \begin{bmatrix} u_1 = q_1 \\ v_1 = q_2 \\ w_1 = q_3 \\ \theta_{1x} = q_4 \\ \theta_{1y} = q_5 \\ \theta_{1z} = q_6 \\ u_2 = q_7 \\ v_2 = q_8 \\ w_2 = q_9 \\ \theta_{2x} = q_{10} \\ \theta_{2y} = q_{11} \\ \theta_{2z} = q_{12} \end{bmatrix} \quad (10.10)$$

- Trong đó:  $N_1$  - lực dọc tại đầu 1;  
 $N_2$  - lực cắt tại đầu 2;  
 $Q_{1y}$  - lực cắt trên phương  $y$  tại đầu 1;

- $Q_{2y}$  - lực cắt trên phương y tại đầu 2;
- $Q_{1z}$  - lực cắt trên phương z tại đầu 1;
- $Q_{2z}$  - lực cắt trên phương z tại đầu 2;
- $M_{1x}$  - mômen xoắn tại đầu 1;
- $M_{2x}$  - mômen xoắn tại đầu 2;
- $M_{1y}$  - mômen quanh trục y tại đầu 1;
- $M_{2y}$  - mômen quanh trục y tại đầu 2;
- $M_{1z}$  - mômen quanh trục z tại đầu 1;
- $M_{2z}$  - mômen quanh trục z tại đầu 2;
- $u_1$  - thành phần chuyển vị trên phương dọc trục tại đầu 1;
- $u_2$  - thành phần chuyển vị trên phương dọc trục tại đầu 2;
- $v_1$  - thành phần chuyển vị trên phương trục y tại đầu 1;
- $v_2$  - thành phần chuyển vị trên phương trục y tại đầu 2;
- $w_1$  - thành phần chuyển vị trên phương trục z tại đầu 1;
- $w_2$  - thành phần chuyển vị trên phương trục z tại đầu 2;
- $\theta_{1x}$  - góc xoắn tại đầu 1;
- $\theta_{2x}$  - góc xoắn tại đầu 2;
- $\theta_{1y}$  - góc xoắn quay trục y tại đầu 1;
- $\theta_{2y}$  - góc xoắn quay trục y tại đầu 2;
- $\theta_{1z}$  - góc xoắn quay trục z tại đầu 1;
- $\theta_{2z}$  - góc xoắn quay trục z tại đầu 2.

Trong thực tế, dầm 3 chiều có thể có vị trí bất kỳ trong không gian. Vì vậy, ta phải tìm cách chuyển ma trận độ cứng từ hệ tọa độ cục bộ sang hệ tọa độ tổng thể. Để làm điều này, trước hết, ta cần tìm hiểu khái niệm về ma trận xoay.

### §10.2. DẦM 3 CHIỀU TRONG KHÔNG GIAN

Gọi  $x_m, y_m, z_m$  là hệ tọa độ cục bộ của dầm 3 chiều và  $x, y, z$  là hệ tọa độ tổng thể. Trong hệ tọa độ cục bộ, vectơ chuyển vị tại 2 đầu dầm là (hình 10.4a):

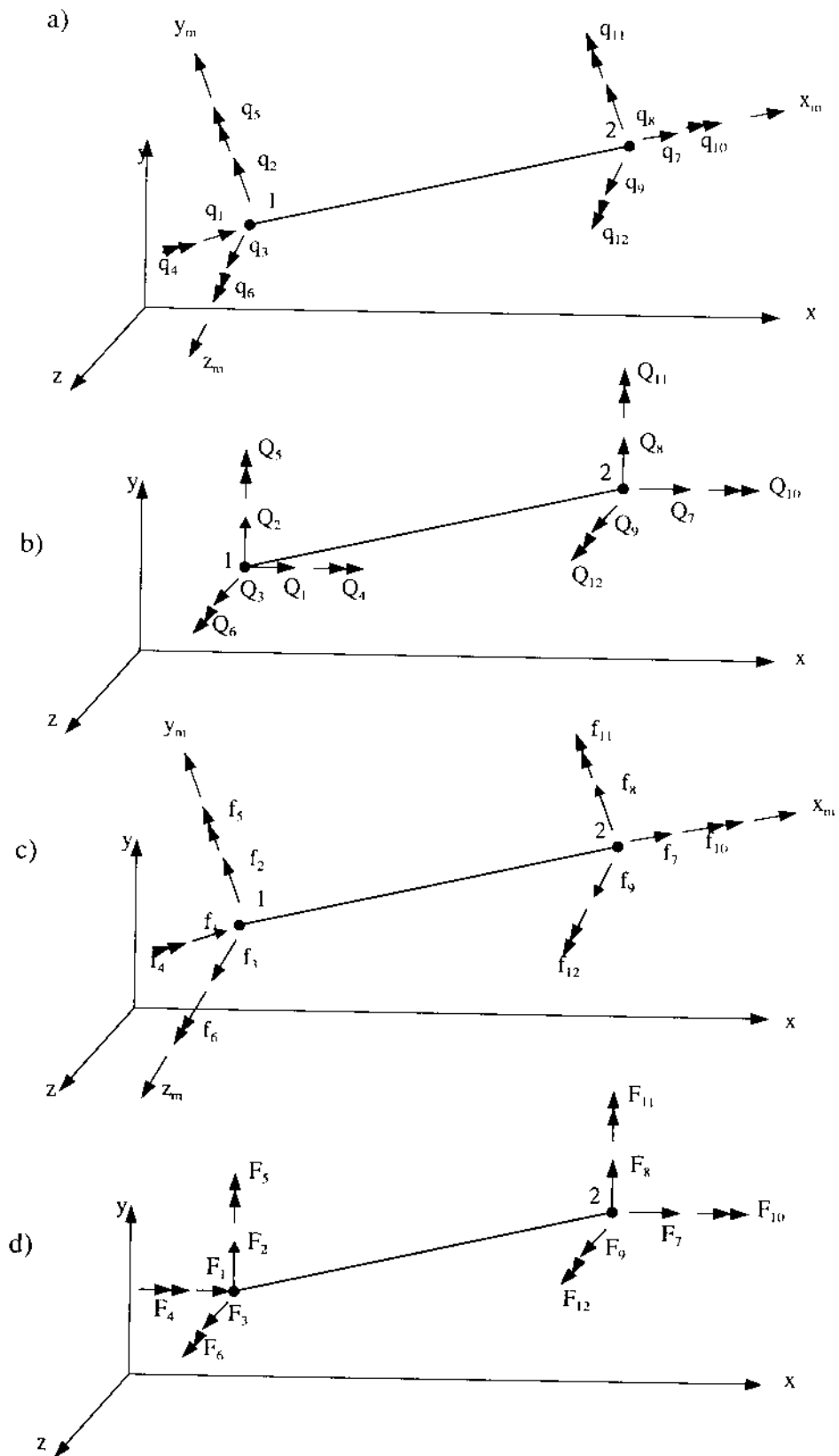
$$\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8 \ q_9 \ q_{10} \ q_{11} \ q_{12}]' \quad (10.11)$$

Trong hệ tọa độ tổng thể, vectơ chuyển vị (hình 10.4b) là:

$$\mathbf{Q} = [Q_1 \ Q_2 \ Q_3 \ Q_4 \ Q_5 \ Q_6 \ Q_7 \ Q_8 \ Q_9 \ Q_{10} \ Q_{11} \ Q_{12}]' \quad (10.12)$$

Vectơ tải trọng trong hệ tọa độ cục bộ (hình 10.4c) là:

$$\mathbf{f} = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6 \ f_7 \ f_8 \ f_9 \ f_{10} \ f_{11} \ f_{12}]' \quad (10.13)$$



Hình 10.4: Các thành phần chuyển vị và tải trọng trong dầm 3 chiều

Vectơ tải trọng trong hệ tọa độ tổng thể (hình 10.4d) là:

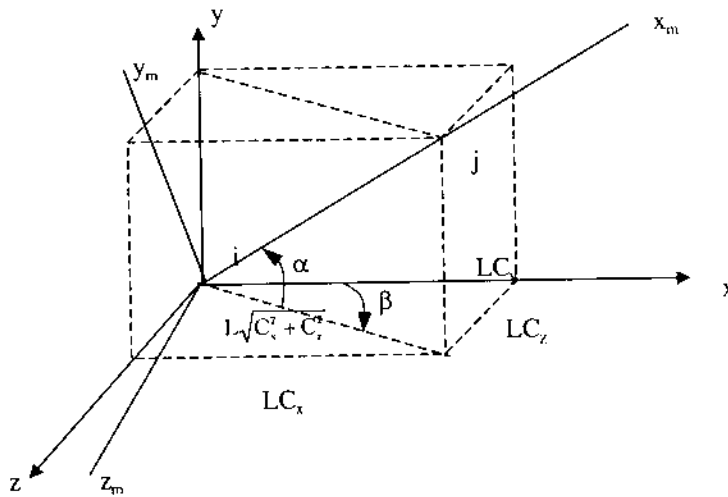
$$\mathbf{F} = [F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4 \ F_5 \ F_6 \ F_7 \ F_8 \ F_9 \ F_{10} \ F_{11} \ F_{12}]' \quad (10.14)$$

Cần có sự chuyển đổi từ  $\mathbf{q}$  sang  $\mathbf{Q}$  và từ  $\mathbf{f}$  sang  $\mathbf{F}$ .

Dưới đây, sẽ suy ra ma trận xoay dùng để thực hiện các chuyển đổi nói trên.

### §10.3. MA TRẬN XOAY (HOẶC MA TRẬN BIẾN ĐỔI)

Ta có thể suy ra ma trận xoay bằng cách ứng dụng các nguyên lý về đại số vectơ hoặc dùng phương pháp xoay dần các trục tọa độ. Ở đây, ta sẽ dùng phương pháp thứ hai.



**Hình 10.5:** Vị trí bất kỳ của dầm 3 chiều trong hệ tọa độ tổng thể

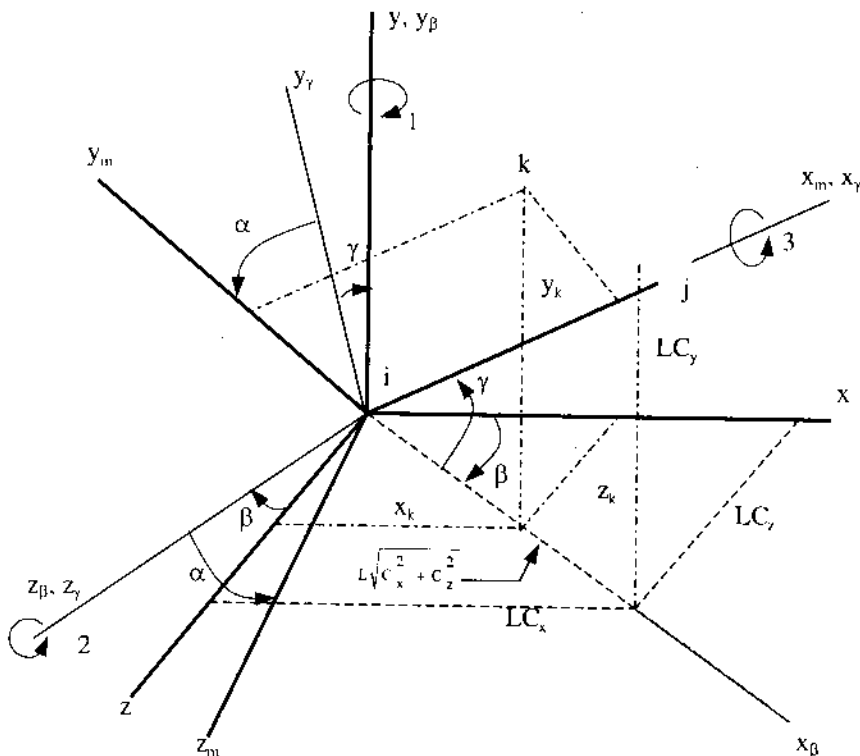
Hình (10.5) trình bày vị trí bất kỳ của trục dầm 3 chiều  $x_m$  và các quan hệ hình học trong hệ tọa độ tổng thể  $x, y, z$ .

Các trục của hệ tọa độ tổng thể sẽ được xoay dần quanh các trục  $y, z, x$  sao cho cuối cùng, hệ tọa độ tổng thể hoàn toàn trùng với hệ tọa độ cục bộ.

Quá trình xoay các trục tọa độ biểu thị trên hình (10.6). Trước hết, ta xoay trục  $x$  quanh trục  $y$  một góc  $\beta$ . Như vậy, trục  $x$  có vị trí mới là trục  $x_\beta$ , trục này là hình chiếu của trục dầm  $x_m$  lên mặt phẳng  $x - z$ . Nói một cách khác, trục  $x_\beta$  bây giờ là giao tuyến giữa mặt phẳng  $y - x_m$  và mặt phẳng  $x - z$ . Bằng cách xoay như vậy, trục  $z$  chiếm vị trí trục  $z_\beta$  còn trục  $y$  vẫn không thay đổi. Các thành phần vectơ  $A_1, A_2, A_3$  trong hệ tọa độ  $x, y, z$  có thể tổ hợp thành vectơ  $A_{1\beta}, A_{2\beta}, A_{3\beta}$  trong hệ tọa độ mới  $x_\beta, y_\beta, z_\beta$  theo hệ thức sau:

$$\begin{bmatrix} A_{1\beta} \\ A_{2\beta} \\ A_{3\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (10.15)$$

Trong đó:  $\cos\beta$  và  $\sin\beta$  có thể biểu thị bằng các cosin định hướng của trục dầm  $x_m$  đối với các trục  $x, y, z$  như sau (xem hình 10.6).



Hình 10.6: Phương pháp xoay dần các trục tọa độ

$$\cos\beta = \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \quad (10.16)$$

$$\sin\beta = \frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \quad (10.17)$$

$$C_x = \frac{x_j - x_i}{L}, \quad C_y = \frac{y_j - y_i}{L} \quad (10.18)$$

$$C_z = \frac{z_j - z_i}{L}$$

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (10.19)$$

Trong đó:  $C_x, C_z$  - cosin định hướng của trục dầm  $x_m$  đối với các trục  $x$  và  $z$ ;  
 $x_i, x_j$  - tọa độ của điểm  $i$  và  $j$  trên trục  $x$ ;  $y_i$ ;  
 $y_j$  - tọa độ của điểm  $i$  và  $j$  trên trục  $y$ ;

$z_i, z_j$  - tọa độ của điểm  $i$  và  $j$  trên trục  $z$ ;

$L$  - chiều dài của dầm  $ij$ .

Sau khi xoay quanh trục  $y$  một góc  $\beta$ , từ (10.15), ta có ma trận biến đổi hoặc ma trận xoay:

$$\mathbf{T}_\beta = \begin{bmatrix} \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & \frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix} \quad (10.20)$$

Tiếp tục xoay các trục  $x_\beta, y_\beta$  quanh trục  $z_\beta$  một góc  $\gamma$  sao cho trục  $x_\beta$  trùng với trục dầm  $x_m$ , trục  $y_\beta$  (tức trục  $y$ ) dời đến vị trí trục  $y_\gamma$ , trục  $z_\beta$  không thay đổi; lúc bấy giờ, mặt phẳng  $y_\gamma - z_\gamma$  chứa các trục  $y_m$  và  $z_m$  của dầm 3 chiều. Các thành phần vectơ  $A_{1\beta}, A_{2\beta}, A_{3\beta}$  trên các trục  $x_\beta, y_\beta, z_\beta$  bây giờ được tổ hợp thành các vectơ  $A_{1\gamma}, A_{2\gamma}, A_{3\gamma}$  trên phương các trục mới  $x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma$  như sau:

$$\begin{bmatrix} A_{1\gamma} \\ A_{2\gamma} \\ A_{3\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1\beta} \\ A_{2\beta} \\ A_{3\beta} \end{bmatrix} \quad (10.21)$$

Vậy sau khi xoay góc  $\gamma$ , căn cứ vào (10.21), ta có ma trận biến đổi:

$$\mathbf{T}_\gamma = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.22)$$

Các số hạng trong (10.22) là các cosin định hướng của các trục  $x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma$  đối với các trục  $x_\beta, y_\beta, z_\beta$ . Từ hình (10.6), ta có:

$$\cos \gamma = \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \quad (10.23)$$

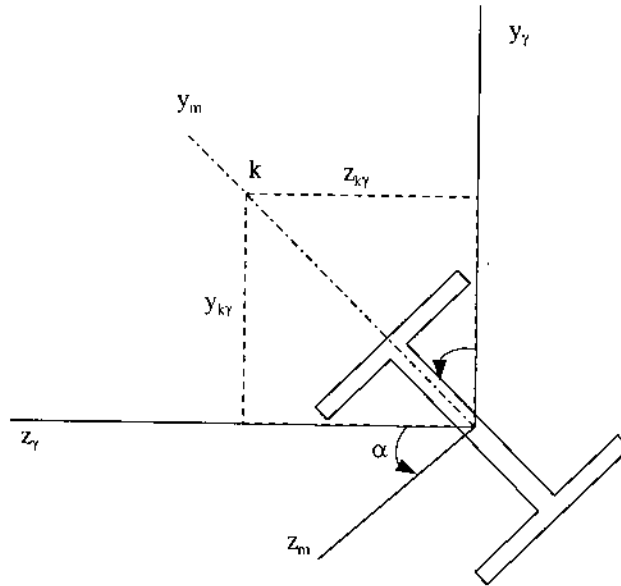
$$\sin \gamma = \frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}}$$

Vậy  $\mathbf{T}_\gamma$  có thể viết:

$$\mathbf{T}_\gamma = \begin{bmatrix} \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & \frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 \\ -\frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.24)$$

Cuối cùng, ta xoay quanh trục  $x_m$  các trục  $y_\gamma, z_\gamma$  một góc  $\alpha$  sao cho trục  $y_\gamma$  trùng với trục  $y_m$  và trục  $z_\gamma$  trùng với trục  $z_m$  (hình 10.6).

Hình (10.7) cho ta thấy mặt cắt ngang của dầm cùng vị trí của trục  $y_m$  và  $z_m$ , trục  $x_m$  vuông góc với mặt phẳng của tờ giấy.



Hình 10.7

Mặt phẳng  $x_m - y_m$  là một mặt phẳng thẳng đứng đi qua trục dầm và xác định góc giữa  $y_\gamma$  và  $y_m$  hoặc góc giữa  $z_\gamma$  và  $z_m$  (tức là góc  $\alpha$  được đo từ mặt phẳng đó đến một trong các trục chính của mặt cắt ngang hình 10.7).

Cuối cùng, các thành phần vectơ  $A_{1m}, A_{2m}, A_{3m}$  trên các trục  $x_m, y_m, z_m$  được biểu thị bằng các thành phần vectơ  $A_{1\gamma}, A_{2\gamma}, A_{3\gamma}$  trên các trục  $x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma$  như sau:

$$\begin{bmatrix} A_{1m} \\ A_{2m} \\ A_{3m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1\gamma} \\ A_{2\gamma} \\ A_{3\gamma} \end{bmatrix} \quad (10.25)$$

Sau khi xoay góc  $\alpha$ , căn cứ vào (10.25), ta có ma trận biến đổi:

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (10.26)$$

Các phần tử trong (10.26) là các cosin định hướng của các trục  $x_m, y_m, z_m$  đối với các trục  $x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma$  (hình 10.6).

Kết hợp các phương trình (10.20), (10.22), (10.24), các thành phần vectơ trong hệ tọa độ cục bộ  $x_m, y_m, z_m$  có thể biểu thị bằng các thành phần vectơ trong hệ tọa độ tổng thể như sau:

$$\mathbf{A}_m = \mathbf{T}_\alpha \mathbf{T}_\gamma \mathbf{T}_\beta \cdot \mathbf{A} \quad (10.27)$$

hay 
$$\mathbf{A}_m = \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \quad (10.28)$$

Trong đó: 
$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_\alpha \cdot \mathbf{T}_\gamma \cdot \mathbf{T}_\beta \quad (10.29)$$

$\mathbf{A}_m$  là vectơ cột biểu thị các thành phần vectơ trong hệ tọa độ cục bộ;  $\mathbf{A}$  là vectơ cột biểu thị các thành phần vectơ trong hệ tọa độ tổng thể. Các thành phần vectơ ở đây có thể là chuyển vị hoặc tải trọng.

Thay (10.20), (10.22), (10.24) vào (10.29), ta có:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ \frac{-C_x C_y \cos \alpha - C_z \sin \alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & \sqrt{C_x^2 + C_z^2} \cos \alpha & \frac{-C_y C_z \cos \alpha + C_x \sin \alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ \frac{C_x C_y \sin \alpha - C_z \cos \alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & -\sqrt{C_x^2 + C_z^2} \sin \alpha & \frac{C_y C_z \sin \alpha + C_x \cos \alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix} \quad (10.30)$$

Từ (10.27), ta có thể viết: 
$$\mathbf{A}_m = \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \quad (10.31)$$

Trong đó  $\mathbf{T}$  là ma trận biến đổi cấp  $3 \times 3$ .

Đối với dầm 3 chiều, ta có 12 bậc tự do nên cuối cùng, ma trận xoay có thể viết:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (10.32)$$

Trong đó:  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{0}$  là những ma trận con cấp  $3 \times 3$ .

Từ (10.11), (10.12), (10.13), (10.14), ta có các hệ thức:

$$\mathbf{q} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q} \quad (10.33)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{F} \quad (10.34)$$

$\mathbf{R}$  gọi là ma trận xoay tổng thể.

Trong ma trận biến đổi  $\mathbf{T}$  trong (10.30), chỉ còn góc  $\alpha$  là chưa được xác định. Để làm điều này, ta chọn một điểm k nằm trong mặt phẳng chính  $x_m - y_m$  nhưng không nằm trên trục  $x_m$  (hình 10.6 và 10.7). Giả sử tọa độ của điểm k trong hệ tọa độ tổng thể là  $x_k, y_k, z_k$ . Các thành phần của vectơ ik trong hệ tọa độ tổng thể là:

$$\begin{aligned} x_{ki} &= x_k - x_i \\ y_{ki} &= y_k - y_i \\ z_{ki} &= z_k - z_i \end{aligned} \quad (10.35)$$

Giả sử  $x_{ky}, y_{ky}, z_{ky}$  là các hình chiếu của vectơ ik trên các trục  $x_y, y_y, z_y$ . Áp dụng 2 phép biến đổi đầu tiên, ta có hệ thức:

$$\begin{bmatrix} x_{k\gamma} \\ y_{k\gamma} \\ z_{k\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_\gamma \cdot \mathbf{T}_\beta \cdot \begin{bmatrix} x_{ki} \\ y_{ki} \\ z_{ki} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{C_x^2 + C_z^2} & C_y & 0 \\ -C_y & \sqrt{C_x^2 + C_z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & \frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{ki} \\ y_{ki} \\ z_{ki} \end{bmatrix} \quad (10.36)$$

Sau khi đơn giản hoá:

$$\begin{aligned} x_{k\gamma} &= C_x x_{ki} + C_y y_{ki} + C_z z_{ki} \\ y_{k\gamma} &= -\frac{C_x C_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} x_{ki} + \sqrt{C_x^2 + C_z^2} \cdot y_{ki} - \frac{C_y C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \cdot z_{ki} \\ z_{k\gamma} &= \frac{-C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} x_{ki} + \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} z_{ki} \end{aligned} \quad (10.37)$$

Như vậy là đã xác định được tọa độ  $y_{k\gamma}$ ,  $z_{k\gamma}$  của điểm k trong mặt phẳng  $y_m - z_m$ . Từ hình (10.7), ta có:

$$\sin\alpha = \frac{z_{k\gamma}}{\sqrt{y_{k\gamma}^2 + z_{k\gamma}^2}} \quad (10.38a)$$

$$\cos\alpha = \frac{y_{k\gamma}}{\sqrt{y_{k\gamma}^2 + z_{k\gamma}^2}} \quad (10.38b)$$

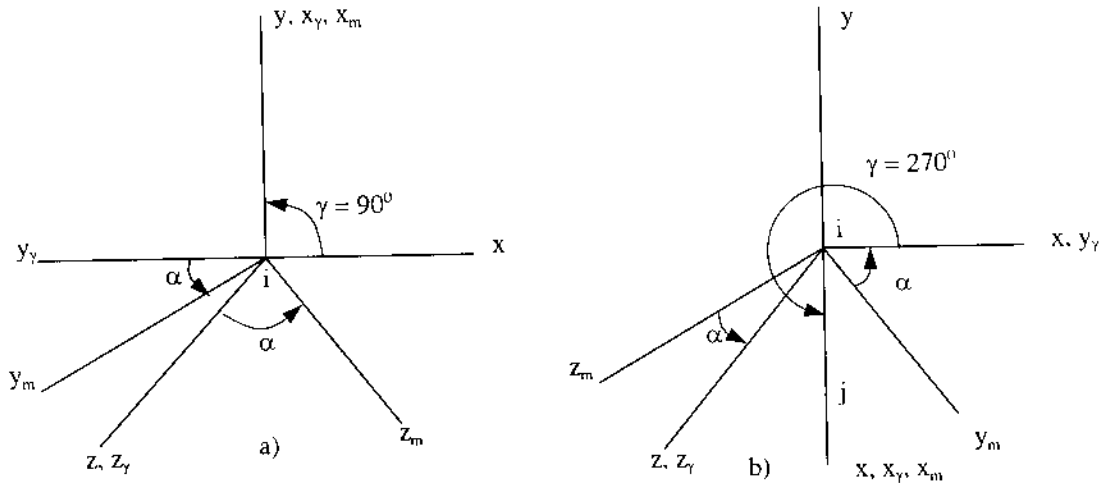
Trong đó,  $y_{k\gamma}$  và  $z_{k\gamma}$  tính theo (10.37). Vậy là ma trận biến đổi  $\mathbf{T}$  trong (10.30) hoàn toàn được xác định.

Cần chú ý rằng các hệ thức nói trên không thể áp dụng cho trường hợp trục của dầm 3 chiều  $x_m$  nằm trên phương thẳng đứng nghĩa là song song với trục y trong hệ tọa độ tổng thể.

Trong trường hợp này (hình 10.8),  $C_x$  và  $C_z$  đều triệt tiêu, điều này không thể đưa đến những kết quả chính xác.

Sau đây, ta xét 2 trường hợp: trục  $x_m$  cùng chiều với trục y và  $x_m$  ngược chiều với trục y.

Ta thực hiện 2 phép xoay. Trước hết, xoay 1 góc  $\gamma = 90^\circ$  (hình 10.8a) hoặc  $\gamma = 270^\circ$  (hình 10.8b). Khi  $\gamma = 90^\circ$ , trục x trùng với trục  $x_m$  (thẳng đứng) và trục y chuyển đến vị trí  $y_\gamma$ ,  $C_y = 1$  (hình 10.8a). Khi  $\gamma = 270^\circ$ , trục x trùng với trục  $x_m$  (ngược chiều với trục y), trục y chuyển đến vị trí trục  $y_\gamma$ ,  $C_y = -1$ . Tiếp theo, quay 1 góc  $\alpha$  quanh trục  $x_m$  để trục  $y_\gamma$  trùng với trục  $y_m$  và trục z trùng với trục  $z_m$ .



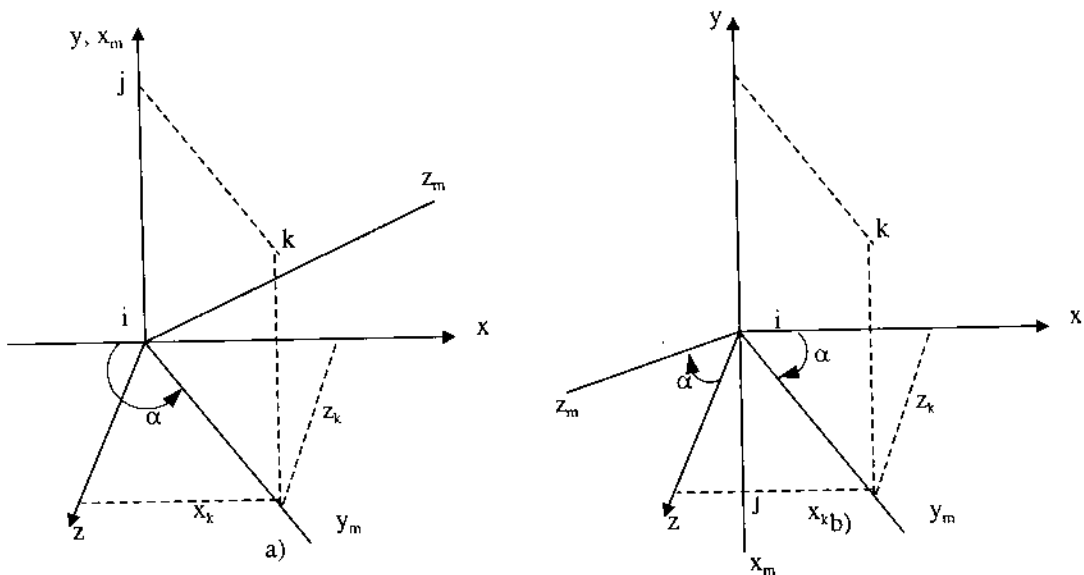
**Hình 10.8:**

a) Trục dầm cùng chiều với trục y; b) Trục dầm ngược chiều với trục y

Từ hình (10.8), ta có ma trận biến đổi:

$$\mathbf{T}_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & C_y & 0 \\ -C_y \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ C_y \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (10.39)$$

Góc  $\alpha$  trong (10.39) được xác định bằng cách tìm vị trí của điểm k nằm trong mặt phẳng uốn chính. Hình (10.9a) biểu thị 1 thanh đứng có nút dưới tại điểm i và nút trên tại điểm j.



**Hình 10.9:** Cách xác định góc  $\alpha$

Tọa độ của điểm k trên hình (10.9a) đều dương và góc  $\alpha$  nằm giữa  $90^0$  và  $180^0$ . Từ quan hệ hình học, ta có:

$$\sin\alpha = \frac{z_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} \quad \cos\alpha = \frac{-x_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} \quad (10.40)$$

Hình (10.9b) biểu thị một thanh đứng có nút trên là i và nút dưới là j. Trong trường hợp này, các tọa độ của điểm k đều dương và góc  $\alpha$  nằm giữa  $0^0$  và  $90^0$ . Từ các quan hệ hình học, ta có:

$$\sin\alpha = \frac{z_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} \quad \cos\alpha = \frac{x_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} \quad (10.41)$$

Kết hợp (10.40) và (10.41), ta có:

$$\sin\alpha = \frac{z_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} \quad \cos\alpha = \frac{-x_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} C_y \quad (10.42)$$

Trong đó  $C_y$  là cosin định hướng của thanh ij đối với trục y. Nó có giá trị bằng +1 (hình 10.9a) hoặc bằng -1 (hình 10.9b).

Thay các giá trị  $\sin\alpha$  và  $\cos\alpha$  từ (10.42) vào (10.39), ta xác định được ma trận biến đổi **T** cấp  $3 \times 3$  trong trường hợp đặc biệt trục dầm song song với trục y của hệ tọa độ tổng thể.

#### §10.4. TÍNH KHUNG KHÔNG GIAN

Khung không gian là tập hợp các dầm 3 chiều có vị trí bất kỳ trong không gian. Để tính khung không gian, ta phải thực hiện các bước sau:

1. Xác định ma trận độ cứng  $k_e$  của mỗi phần tử của khung trong hệ tọa độ cục bộ theo (10.9).
2. Xác định ma trận độ cứng  $k_c$  của mỗi phần tử của khung trong hệ tọa độ tổng thể theo công thức sau:

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{R}'k_e\mathbf{R} \quad (10.43)$$

Trong đó: **R** - ma trận xoay; tính theo (10.32)

Công thức (10.43) chứng minh tương tự như công thức (8.53) trong §8.2.2 (chương 8).

3. Căn cứ vào bảng (8.1) (chương 8), xác định vectơ tải trọng **f** trong hệ tọa độ cục bộ. Đối với dầm 3 chiều, tại mỗi nút có 6 thành phần tải trọng.

4. Xác định vectơ tải trọng **F** cho mỗi phần tử của khung theo (10.34):

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{R}_e\mathbf{F}_e$$

do đó:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{R}'_e\mathbf{f}_e \quad (10.44)$$

5. Sau khi ghép các ma trận  $k_e$  từ (10.43) và các ma trận  $F_e$  từ (10.44); ta được phương trình cân bằng tổng thể:

$$KQ = F \quad (10.45)$$

6. Giải hệ phương trình (10.45), ta được giá trị các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ tổng thể.

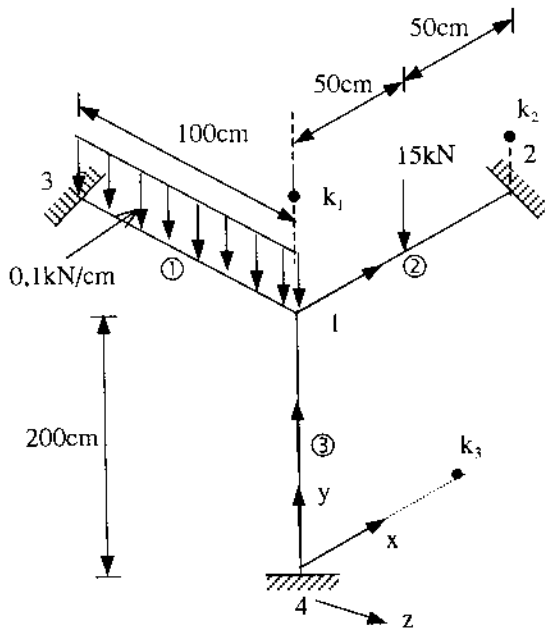
7. Xác định các thành phần chuyển vị của mỗi phần tử của khung theo (10.33).

$$q = RQ \quad (10.46)$$

8. Căn cứ vào công thức (8.54) và bảng (8.1) (chương 8), tính nội lực ở các đầu dầm:

$$S = k_e \cdot q + S_0 \quad (10.47)$$

**Ví dụ 10.1:** Một giàn không gian như trên hình (10.10)



Số BTD có chuyển vị: 6  
 Tổng số BTD: 24  
 Số thanh: 3  
 Số thanh loại 1: 2  
 Số thanh loại 2: 1  
 Số thanh chịu tải trọng phân bố đều: 1  
 Số thanh chịu tải trọng tập trung: 1

Hình 10.10

Dùng chương trình CTR18 tính nội lực.

**Giải:**

Đây là bài toán khối lượng tính rất lớn, không thể tích bằng tay mà phải nhờ vào sự hỗ trợ của máy tính.

Trước hết phải nhập các số liệu:

Nhập số liệu

Một phần đã trình bày trên hình (10.10). Tiếp theo, nhập các số liệu sau:

Số thứ tự thanh loại 1: 1, 2

## Công ty Hóa Chất Xây Dựng Phương Nam

Số thứ tự thanh loại 2: 3

Số thứ tự thanh chịu tải trọng phân bố đều: 1

Số thứ tự thanh chịu tải trọng tập trung: 2

Cường độ tải trọng phân bố: -0,1

Tải trọng tập trung: -15

Vị trí tải trọng tập trung: 50; 50

Các số liệu còn lại thống kê trong các bảng sau:

Phần tử	Diện tích (cm <sup>2</sup> )	Môđun xoắn (kN/cm <sup>2</sup> )	Mômen quán tính x (cm <sup>4</sup> )	Mômen quán tính y (cm <sup>4</sup> )	Mômen quán tính z (cm <sup>4</sup> )	Môđun đàn hồi (kN/cm <sup>2</sup> )
1	20	8077	4	55	750	21000
2	20	8077	4	55	750	21000
3	30	8077	10	150	2230	21000

Phần tử	Tọa độ (cm)						Tọa độ điểm k (cm)		
	x <sub>j</sub>	y <sub>j</sub>	z <sub>j</sub>	x <sub>i</sub>	y <sub>i</sub>	z <sub>i</sub>	x <sub>k</sub>	y <sub>k</sub>	z <sub>k</sub>
1	0	200	-100	0	200	0	0	250	0
2	0	200	0	100	200	0	100	250	0
3	0	0	0	0	200	0	50	0	0

Phần tử	Số thứ tự các bậc tự do											
	d <sub>1</sub>	d <sub>2</sub>	d <sub>3</sub>	d <sub>4</sub>	d <sub>5</sub>	d <sub>6</sub>	d <sub>7</sub>	d <sub>8</sub>	d <sub>9</sub>	d <sub>10</sub>	d <sub>11</sub>	d <sub>12</sub>
1	13	14	15	16	17	18	1	2	3	4	5	6
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	19	20	21	22	23	24	1	2	3	4	5	6

Tọa độ điểm k (xem hình (10.10):

Thanh 1: điểm k<sub>1</sub> nằm trên phương trục thanh 3

Thanh 2: điểm k<sub>2</sub> nằm trên phương thẳng đứng tại nút 2

Thanh 3 (cột): điểm k<sub>3</sub> nằm trên phương trục x tại nút 4

Kết quả chạy chương trình

Phân tử Nội lực	1	2
$Q_{y1}$ (kN)	-5,067	-5,067
$M_{x1}$ (kN - cm)	0	0
$M_{z1}$ (kN - cm)	-4,415	-4,46
$Q_{y2}$ (kN)	-10,398	-0,398
$M_{x2}$ (kN - cm)	0	0
$M_{z2}$ (kN - cm)	359,879	26,545

Phân tử Nội lực	3
$N_1$ (kN)	0
$M_{y1}$ (kN - cm)	18900
$M_{z1}$ (kN - cm)	164,434
$N_2$ (kN)	0
$M_{y2}$ (kN - cm)	18900
$M_{z2}$ (kN - cm)	-4,465

### §10.5. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TÍNH KHUNG KHÔNG GIAN

Về thuật toán này, nên kết hợp xem ví dụ 10.1.

Khối lượng tính rất lớn, hơn nữa do sự hạn chế của bộ nhớ trong máy tính, nên trong thuật toán này chỉ xét các trường hợp sau:

1. Chỉ xét 2 loại thanh

- Thanh có trục không song song với trục Y của hệ tọa độ tổng thể
- Thanh có trục song song và cùng chiều với trục Y của hệ tọa độ tổng thể.

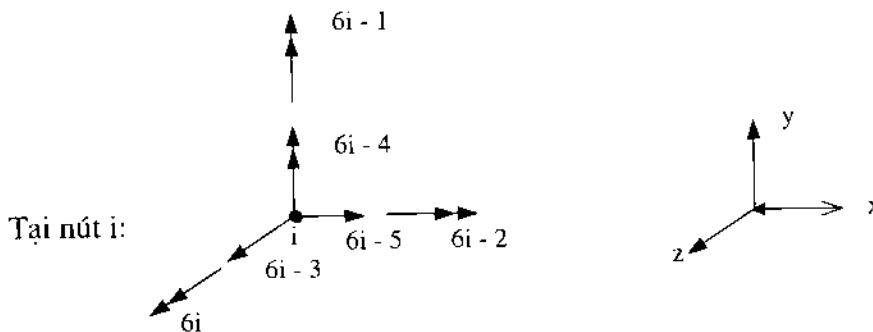
2. Tải trọng tác dụng trên dầm và nằm trong mặt phẳng thẳng đứng  $x - y$  trong hệ tọa độ cục bộ.

Để thuận tiện cho việc lập trình, số thứ tự các thanh nên xếp theo số thứ tự của dãy số tự nhiên 1, 2, 3... Các dầm chịu tải trọng phân bố đều xếp trước, sau đó đến các dầm chịu tải trọng tập trung, cuối cùng là các cột.

Số thứ tự các bậc tự do cũng nên xếp theo số thứ tự của dãy số tự nhiên, các bậc tự do có chuyển vị triệt tiêu nên xếp ở phần cuối.

Vì khối lượng tính quá lớn, chương trình được chia ra nhiều chương trình con (Procedure) để khi cần thì gọi đến.

Mỗi nút có 6 bậc tự do, được ký hiệu như sau:



Về các cosin định hướng, ở đây xét đến trường hợp tổng quát nhất: thanh có thể nằm ở vị trí bất kỳ trong không gian. Đối với các lực  $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$  các cosin định hướng có thể mang dấu dương hoặc âm, nhưng đối với các mômen  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  các cosin định hướng cần lấy giá trị tuyệt đối để giữ nguyên dấu của bản thân mômen.

Trong chương trình này, dấu của mômen quy ước là dương khi quay ngược chiều kim đồng hồ, quy ước là âm trong trường hợp ngược lại.

Vị trí của điểm  $k$  có thể chọn tùy ý nhưng phải nằm trong mặt phẳng quán tính chính  $x - y$  của dầm và không nằm trên trục  $x$  của nó (xem ví dụ 10.1). Đối với cột, điểm  $k$  nằm trong mặt phẳng  $x - z$  của hệ tọa độ tổng thể và nằm trên phương song song với trục  $x$  hoặc trục  $z$  tùy theo phương của trục  $y$  của nó. Trong ví dụ (10.1) điểm  $k_3$  nằm trên phương trục  $x$  của hệ tọa độ tổng thể.

Thuật toán được tiến hành theo các bước.

- Xác lập các ma trận độ cứng riêng theo (10.9)
- Xác lập các ma trận xoay theo (10.30), (10.32)
- Xác lập các MTĐC riêng trong hệ tọa độ tổng thể theo (10.43)
- Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể
- Xác lập vectơ tải trọng như đã làm đối với khung phẳng
- Gọi chương trình con để tính giá trị các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ tổng thể.
- Xác định các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ cục bộ theo (10.33).
- Xác định các thành phần nội lực theo (10.47)

Chương 11

**BÀI TOÁN BA CHIỀU**

§11.1. KHÁI NIỆM VỀ BÀI TOÁN BA CHIỀU

Trong các chương trước, ta đã nghiên cứu bài toán một chiều, bài toán hai chiều, hệ thanh gồm dầm và khung. Trong chương này, ta sẽ nghiên cứu bài toán 3 chiều thường gặp trong thực tế. Mô hình phần tử hữu hạn 4 mặt 4 nút sẽ được đề cập đến.

Cần nhắc lại rằng (xem lại chương 1) trong bài toán ba chiều, ta có các hệ thức sau đây.

Véc tơ các thành phần chuyển vị trong FTHH

$$\mathbf{u} = [u \quad v \quad w]^T \quad (11.1)$$

Trong đó:  $u, v, w$  - các thành phần chuyển vị trên phương các trục  $x, y, z$  tại 1 điểm trong FTHH.

Vectơ ứng suất  $\sigma$  và vectơ biến dạng  $\epsilon$ :

$$\sigma = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{xy}]^T \quad (11.2)$$

$$\epsilon = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{xy}]^T \quad (11.3)$$

Hệ thức ứng suất - biến dạng

$$\sigma = \mathbf{D}\epsilon \quad (11.4)$$

Trong đó:  $\mathbf{D}$  là ma trận cấu trúc vật liệu cấp  $6 \times 6$ . Đối với vật liệu đồng tính trên mọi phương,  $\mathbf{D}$  tính theo (1.17) (chương một).

Hệ thức biến dạng - chuyển vị:

$$\epsilon = \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^T \quad (11.5)$$

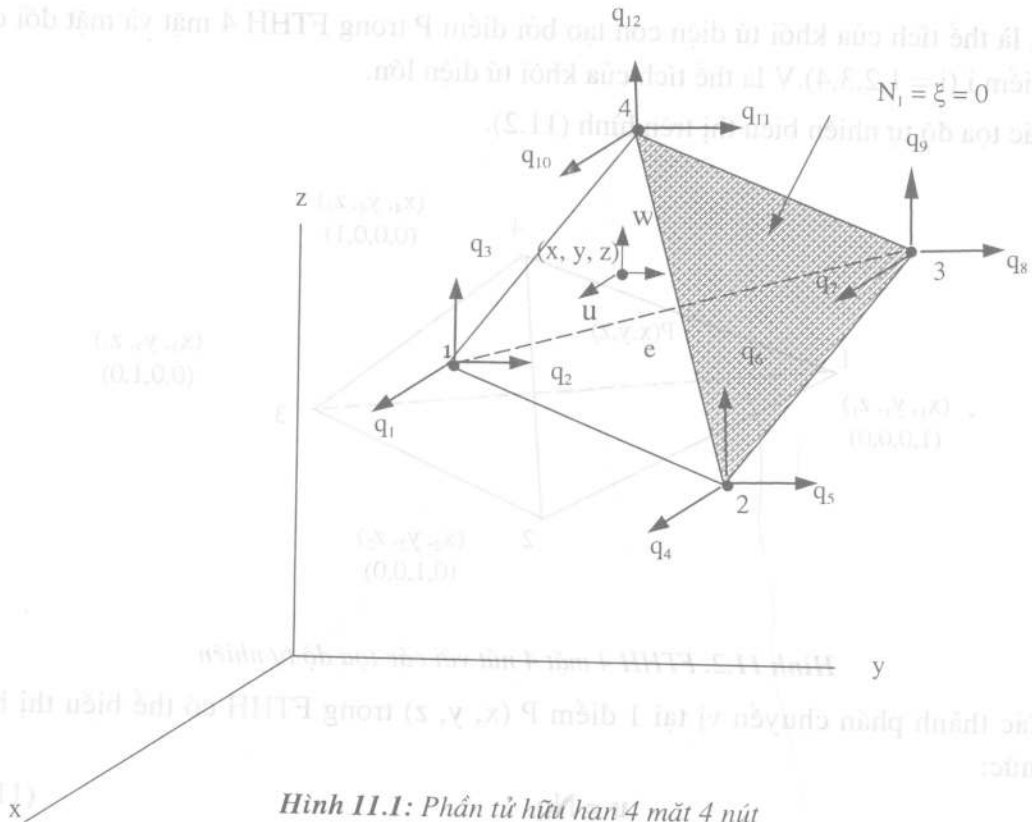
Vectơ lực thể tích  $\mathbf{f}$  và vectơ lực biên  $\mathbf{T}$

$$\mathbf{f} = [f_x \quad f_y \quad f_z]^T$$

$$\mathbf{T} = [T_x \quad T_y \quad T_z]^T \quad (11.7)$$

§11.2. MÔ HÌNH PHẦN TỬ HỮU HẠN

Ta chia vật thể thành các FTHH 4 mặt 4 nút như trên hình (11.1).



Hình 11.1: Phần tử hữu hạn 4 mặt 4 nút

Tại điểm có tọa độ  $(x, y, z)$  trong FTHH, có 3 thành phần chuyển vị  $u, v, w$  trên các phương  $x, y, z$ . Mỗi nút  $i$  của FTHH có 3 thành phần chuyển vị  $q_{3i-2}, q_{3i-1}, q_{3i}$ . Chẳng hạn tại nút 3, có 3 thành phần chuyển vị  $q_7, q_8, q_9$ . Ta gọi các thành phần chuyển vị này là các chuyển vị cục bộ. Các chuyển vị tổng thể tại nút  $i$  là  $Q_{3i-2}, Q_{3i-1}, Q_{3i}$ . Vậy vectơ chuyển vị cục bộ  $\mathbf{q}$  và vectơ chuyển vị tổng thể  $\mathbf{Q}$  là:

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad \dots \quad q_{12}]^T \quad (11.8)$$

$$\mathbf{Q} = [Q_1 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_N]^T \quad (1.9)$$

### 11.2.1. Hàm hình dạng. Hệ thức biến dạng - chuyển vị

Ta định nghĩa 4 hàm hình dạng Lagrange  $N_1, N_2, N_3, N_4$  như sau. Hàm hình dạng  $N_i$  tại nút  $i$  bằng đơn vị tại nút đó và triệt tiêu tại các nút còn lại. Chẳng hạn, hàm hình dạng  $N_1$  bằng đơn vị tại nút 1 và triệt tiêu tại các nút 2, 3, 4.

Hàm hình dạng được xác định bằng các tọa độ tự nhiên

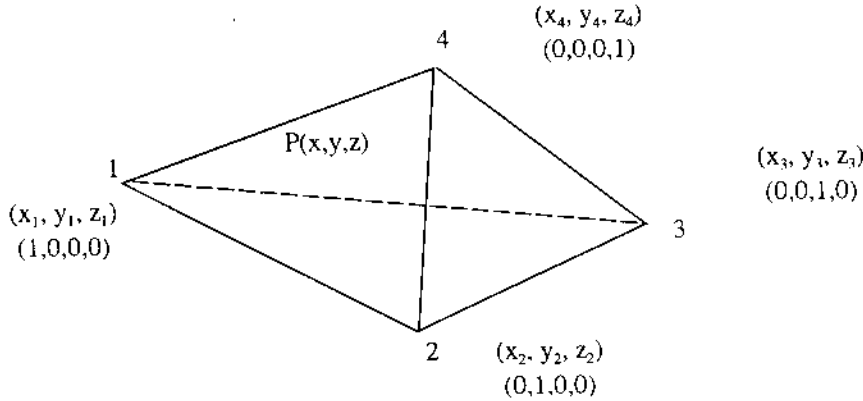
$$N_1 = L_1 \quad N_2 = L_2 \quad N_3 = L_3 \quad N_4 = 1 - L_1 - L_2 - L_3 \quad (11.10)$$

Trong đó:

$$L_i = \frac{V_i}{V}$$

$V_i$  là thể tích của khối tứ diện con tạo bởi điểm P trong FTTH 4 mặt và mặt đối diện với điểm i (i = 1,2,3,4). V là thể tích của khối tứ diện lớn.

Các tọa độ tự nhiên biểu thị trên hình (11.2).



**Hình 11.2. FTTH 4 mặt 4 nút với các tọa độ tự nhiên**

Các thành phần chuyển vị tại 1 điểm P (x, y, z) trong FTTH có thể biểu thị bằng hệ thức:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Nq} \tag{11.11}$$

Trong đó:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \tag{11.12}$$

$\mathbf{q}$  - vectơ các thành phần chuyển vị tại các nút.

Dưới dạng biểu thị cùng tham số, tọa độ của điểm P (x, y, z) trong phần tử hữu hạn có thể biểu thị bằng tọa độ của các nút (hình 11.2):

$$\begin{aligned} x &= N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + N_4x_4 \\ y &= N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4 \\ z &= N_1z_1 + N_2z_2 + N_3z_3 + N_4z_4 \end{aligned} \tag{11.13}$$

Thay  $N_i$  từ (11.10) vào (11.13) và áp dụng các ký hiệu  $x_{ij} = x_i - x_j$ ,  $y_{ij} = y_i - y_j$ ,  $z_{ij} = z_i - z_j$ , ta có:

$$\begin{aligned} x &= x_4 + x_{14}L_1 + x_{24}L_2 + x_{34}L_3 \\ y &= y_4 + y_{14}L_1 + y_{24}L_2 + y_{34}L_3 \\ z &= z_4 + z_{14}L_1 + z_{24}L_2 + z_{34}L_3 \end{aligned} \tag{11.14}$$

Theo quy tắc tính đạo hàm của hàm ẩn:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial L_1} \\ \frac{\partial u}{\partial L_2} \\ \frac{\partial u}{\partial L_3} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (11.15)$$

Trong đó,  $\mathbf{J}$  là ma trận Jacobian

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_1} & \frac{\partial y}{\partial L_1} & \frac{\partial z}{\partial L_1} \\ \frac{\partial x}{\partial L_2} & \frac{\partial y}{\partial L_2} & \frac{\partial z}{\partial L_2} \\ \frac{\partial x}{\partial L_3} & \frac{\partial y}{\partial L_3} & \frac{\partial z}{\partial L_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{14} & y_{14} & z_{14} \\ x_{24} & y_{24} & z_{24} \\ x_{34} & y_{34} & z_{34} \end{bmatrix} \quad (11.16)$$

Định thức của  $\mathbf{J}$ :

$$\det \mathbf{J} = x_{14}(y_{24}z_{34} - y_{34}z_{24}) + y_{14}(z_{24}z_{34} - z_{34}x_{24}) + z_{14}(x_{24}y_{34} - x_{34}y_{24}) \quad (11.17)$$

Thể tích FTTH tứ diện:

$$V_e = \left| \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \int_0^{1-L_1-L_2} \det \mathbf{J} \, dL_1 dL_2 dL_3 \right| \quad (11.18)$$

$$V_e = |\det \mathbf{J}| \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \int_0^{1-L_1-L_2} dL_1 dL_2 dL_3 \quad (11.18a)$$

Công thức tích phân đa thức có dạng như sau:

$$\int_0^1 \int_0^{1-L_1} \int_0^{1-L_1-L_2} L_1^m \cdot L_2^n \cdot L_3^p dL_1 dL_2 dL_3 = \frac{m!n!p!}{(m+n+p+3)!} \quad (11.19)$$

Áp dụng (11.19), ta được:

$$V_e = \frac{1}{6} |\det \mathbf{J}| \quad (11.20)$$

Hệ thức nghịch đảo của (11.15):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial L_1} \\ \frac{\partial u}{\partial L_2} \\ \frac{\partial u}{\partial L_3} \end{bmatrix} \quad (11.21)$$

Trong đó  $A$  là nghịch đảo của ma trận Jacobian:

$$\Lambda = J^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} (y_{24} \cdot z_{34} - y_{34} \cdot z_{24}) & (y_{34} z_{14} - y_{14} \cdot z_{34}) & (y_{14} z_{24} - y_{24} \cdot z_{14}) \\ (z_{24} \cdot x_{34} - z_{34} \cdot x_{24}) & (z_{34} x_{14} - z_{14} \cdot x_{34}) & (z_{14} \cdot x_{24} - z_{24} \cdot x_{14}) \\ (x_{24} \cdot y_{34} - x_{34} \cdot z_{24}) & (x_{34} y_{14} - x_{14} \cdot y_{34}) & (x_{14} \cdot y_{24} - x_{24} \cdot y_{14}) \end{bmatrix} \quad (11.22)$$

Theo (11.5) và (11.21), ta có:

$$\varepsilon = B \cdot q \quad (11.23)$$

Trong đó, ma trận  $B$  có dạng:

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & A_{12} & 0 & 0 & A_{13} & 0 & 0 & -\tilde{A}_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_{21} & 0 & 0 & A_{22} & 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & -\tilde{A}_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_{31} & 0 & 0 & A_{32} & 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & -\tilde{A}_3 \\ 0 & A_{31} & A_{21} & 0 & A_{32} & A_{22} & 0 & A_{33} & A_{23} & 0 & -\tilde{A}_3 & -\tilde{A}_2 \\ A_{31} & 0 & A_{11} & A_{32} & 0 & A_{12} & A_{33} & 0 & A_{13} & -\tilde{A}_3 & 0 & -\tilde{A}_1 \\ A_{21} & A_{11} & 0 & A_{22} & A_{12} & 0 & A_{23} & A_{13} & 0 & -\tilde{A}_2 & -\tilde{A}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.24)$$

Trong đó:  $A_{ij}$  là các phần tử của ma trận  $A$  trong (11.22)

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= A_{11} + A_{12} + A_{13} \\ \tilde{A}_2 &= A_{21} + A_{22} + A_{23} \\ \tilde{A}_3 &= A_{31} + A_{32} + A_{33} \end{aligned} \quad (11.25)$$

### 11.2.2. Ma trận độ cứng-Vectơ tải trọng

*Ma trận độ cứng:*

Theo (2.79) (chương hai), ta có ma trận độ cứng

$$k = \iiint B' D B dv \quad (11.26a)$$

Vì các ma trận  $B$  và  $D$  chứa các hằng số nên

$$k = B' D B \int dv$$

do đó:

$$k = V_e B' D B$$

Trong đó,  $V_e$  là thể tích của FTHH tứ diện, tính theo công thức (11.20).

*Véc tơ lực thể tích:*

Theo (2.80) (chương hai), ta có vectơ lực thể tích:

$$\mathbf{F}_t = \iiint \mathbf{N}' \mathbf{f} dV \quad (11.27a)$$

Vì lực thể tích tác dụng tại trọng tâm của FTHH tứ diện, trọng tâm này lại chia hình tứ diện thành 4 khối tứ diện con có thể tích bằng nhau nên theo (11.10).

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = \frac{1}{4}$$

Vì  $\mathbf{N}$  và  $\mathbf{f}$  chứa các hằng số,  $\mathbf{f}_t$  có thể viết

$$\mathbf{f}_t = \mathbf{N}' \mathbf{f} \int dV = \mathbf{N}' \cdot \mathbf{f} \cdot V \quad (11.27b)$$

Thay  $\mathbf{N}$  từ (11.12) và  $\mathbf{f} = [f_x \quad f_y \quad f_z]$  vào (11.27b) ta được:

$$\mathbf{f}_t = V \cdot \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 \\ N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 \\ N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 \\ N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \quad (11.27c)$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận và thay  $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = \frac{1}{4}$ , ta có công thức cuối cùng:

$$\mathbf{f}_t = \frac{V_e}{4} [f_x \quad f_y \quad f_z \quad f_x \quad f_y \quad f_z \quad f_x \quad f_y \quad f_z \quad f_x \quad f_y \quad f_z] \quad (11.28)$$

*Vectơ lực biên:*

Theo (2.80) (chương 2), ta có vectơ lực biên:

$$\mathbf{f}_b = \int \int \mathbf{N}'^s \mathbf{T} dA \quad (11.29)$$

Chẳng hạn, lực biên phân bố đều trên diện tích tam giác 1-2-3 có gạch chéo trên hình 11-3. Trên diện tích này, rõ ràng là  $N_4 = 0$ . Vì tổng lực biên tác dụng tại trọng tâm của tam giác 1-2-3, trọng tâm này lại chia tam giác 1-2-3 thành 3 tam giác con có diện tích như nhau nên:

$$\left. \begin{aligned} N_1 = N_2 = N_3 = \frac{1}{3} \\ N_4 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.30)$$

Vì ma trận  $\mathbf{N}$  và  $\mathbf{T}$  chứa các hằng số nên (11.29) có thể viết:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_b &= \mathbf{N}'^s \cdot \mathbf{T} \cdot \int dA \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{N}'^s \cdot \mathbf{T} \end{aligned} \quad (11.31a)$$

Thay  $\mathbf{N}$  từ (11.12) và

$$\mathbf{T} = [T_x \quad T_y \quad T_z]$$

vào (10.31a):

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 \\ N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 \\ N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 \\ N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} \quad (11.31b)$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận và thay  $N_1 = N_2 = N_3 = \frac{1}{3}$ ,  $N_4 = 0$  vào (11.31b), ta được công thức cuối cùng:

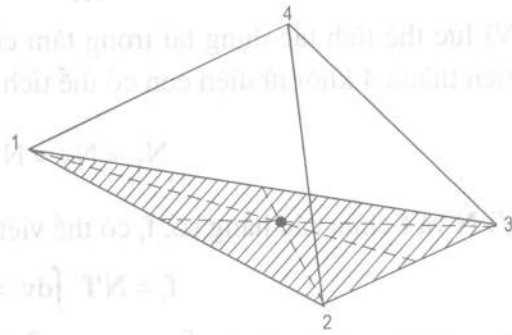
$$\mathbf{f}'_b = \frac{A_c}{3} [T_x \quad T_y \quad T_z \quad T_x \quad T_y \quad T_z \quad T_x \quad T_y \quad T_z \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (11.31)$$

Trong đó:  $A_c$  - diện tích mặt tam giác 1-2-3.

Trong phần trên, ta đã suy ra ma trận độ cứng, vectơ lực thể tích, vectơ lực biên đối với phần tử hữu hạn hình 4 mặt, 4 nút. Sau khi ghép các ma trận độ cứng và các vectơ tải trọng như thường lệ, ta có hệ phương trình cân bằng tổng thể:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{F} \quad (11.32)$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị.



Hình 11.3: Lực biên tác dụng trên mặt tam giác 1-2-3

### 11.2.3. Tính ứng suất

Vì  $\sigma = D.\epsilon$  và  $\epsilon = B.q$  nên ứng suất có thể viết:

$$\sigma = D.B.q \quad (11.34)$$

Các ứng suất chính  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  được tính theo các hệ thức sau. Ba bất biến của tenxơ ứng suất là:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{xy}^2 \\ I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{yz} \tau_{xz} \tau_{xy} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 \end{aligned} \quad (11.34)$$

Đặt:

$$\begin{aligned} a &= \frac{I_1^2}{3} - I_2 \\ b &= -2 \left( \frac{I_1}{3} \right)^3 + \frac{I_1 I_2}{3} - I_3 \\ c &= 2 \sqrt{\frac{a}{3}} \\ \theta &= \frac{1}{3} \cos^{-1} \left( -\frac{3b}{ac} \right) \end{aligned} \quad (11.35)$$

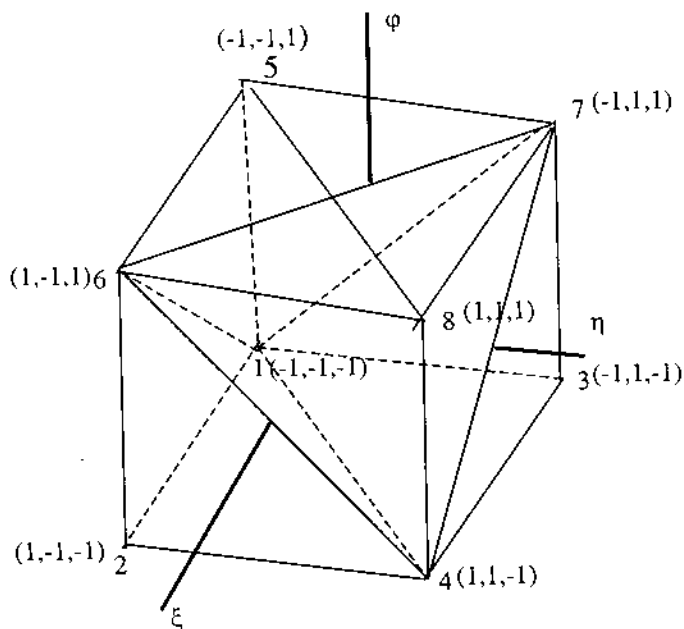
Các ứng suất chính:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{I_1}{3} + c \cos \theta \\ \sigma_2 &= \frac{I_1}{3} + c \cos \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \sigma_3 &= \frac{I_1}{3} + c \cos \left( \theta + \frac{4\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (11.36)$$

### §11.3. CÁCH BỐ TRÍ MẠNG FTHH 4 MẶT 4 NÚT

Trong miền 2 chiều, cách bố trí mạng FTHH tam giác hoặc tứ giác có thể thực hiện một cách tùy ý, nhưng trong miền 3 chiều thì việc bố trí mạng FTHH tứ diện có tính chất phức tạp hơn. Dưới đây, giới thiệu một số cách bố trí mạng FTHH tứ diện trong miền khối vuông.

Trên hình (11.4) là cách bố trí 5 FTHH tứ diện trong miền khối vuông. Sơ đồ liên kết giữa các nút biểu thị trong bảng 11.1. Trong cách bố trí trên, 4 tứ diện đầu tiên có thể tích như nhau còn tứ diện thứ 5 thì có thể tích gấp đôi thể tích của phần tử khác.



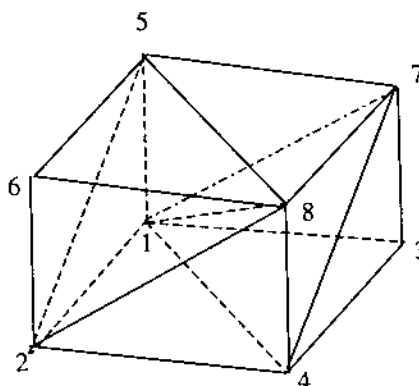
Hình 11.4: Cách bố trí 5 FTHH tứ diện trong miền khối vuông.

Bảng 11.1. Sơ đồ liên kết giữa các FTHH và các nút

FTHH số	Nút cục bộ				
	1	2	3	4	
1	1	4	2	6	Nút tổng thể
2	1	4	3	7	
3	6	7	5	1	
4	6	7	8	4	
5	1	4	6	7	

Cũng có thể bố trí 6 FTHH tứ diện trong một miền khối vuông như trên hình (11.5).

Trong cách chia này, một nửa khối vuông được chia thành 3 tứ diện có thể tích bằng nhau (hình 11.5). Sơ đồ liên kết giữa các tứ diện và giữa các nút như trên bảng (11.2) và hình (11.5).



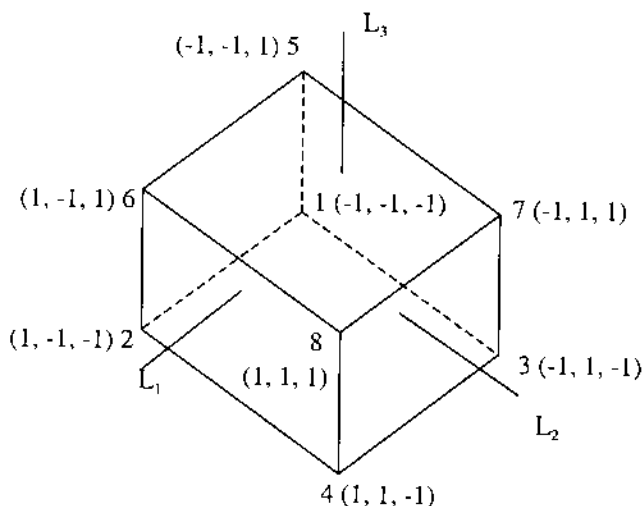
Hình 11.5: Cách bố trí 6 tứ diện trong miền khối vuông.

**Bảng 11.2. Sơ đồ liên kết giữa các nút trên hình (11.6)**

FTHH số	Nút cục bộ: 1, 2, 3, 4			
	Số thứ tự nút tổng thể			
1	1	2	4	8
2	1	2	8	5
3	2	8	5	6
4	1	3	4	7
5	1	7	8	5
6	1	8	4	7

**§11.4. PHẦN TỬ HỮU HẠN 6 MẶT VÀ CÁC PHẦN TỬ HỮU HẠN BẬC CAO HƠN**

Hình 11.6 biểu thị một phần tử hữu hạn 6 mặt 8 nút có dạng khối vuông với kích thước mỗi cạnh bằng 2 đơn vị trong hệ tọa độ tự nhiên  $L_1, L_2, L_3$ .



*Hình 11.6: Phần tử hữu hạn 6 mặt 8 nút*

Đối với FTHH khối vuông (hình 11.6), các hàm hình dạng Lagrange có thể viết:

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + L_{1i}L_{1i})(1 + L_{2i}L_{2i})(1 + L_{3i}L_{3i}) \quad (11.37)$$

$$i = 1, 2, \dots, 8$$

Trong đó:  $L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}$  là các tọa độ tự nhiên  $L_1, L_2, L_3$  tại nút  $i$  trong hệ tọa độ  $(L_1, L_2, L_3)$ .

Mỗi nút của FTTH 6 mặt 8 nút có 3 thành phần chuyển vị nên có tất cả 24 thành phần chuyển vị tại các nút. Vectơ chuyển vị:

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \dots \dots q_{24}]' \quad (11.38)$$

Các thành phần chuyển vị tại 1 điểm trong FTTH có thể biểu thị bằng các thành phần chuyển vị tại các nút như sau:

$$\begin{aligned} u &= N_1 q_1 + N_2 q_4 + \dots + N_8 q_{22} \\ v &= N_1 q_2 + N_2 q_5 + \dots + N_8 q_{23} \end{aligned} \quad (11.39)$$

$$\begin{aligned} w &= N_1 q_3 + N_2 q_6 + \dots + N_8 q_{24} \\ x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + \dots + N_8 x_8 \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + \dots + N_8 y_8 \end{aligned} \quad (11.40)$$

$$z = N_1 z_1 + N_2 z_2 + \dots + N_8 z_8$$

Dưới dạng biểu thị cùng tham số, các tọa độ tại 1 điểm trong FTTH có thể biểu thị bằng tọa độ tại các nút như trong (11.40).

Giống như các bước trình bày trong chương 7 đối với FTTH tứ giác, ta có các hệ thức nhau sau:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{q} \quad (11.41)$$

Ma trận độ cứng của FTTH:

$$\mathbf{k} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}' \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} |\det \mathbf{J}| dL_1 dL_2 dL_3 \quad (11.42)$$

Trong đó:  $dV = |\det \mathbf{J}| dL_1 dL_2 dL_3$ ;

$\mathbf{J}$  - ma trận Jacobian.

Việc tính tích phân (11.42) thực hiện theo phép cầu phương Gauss.

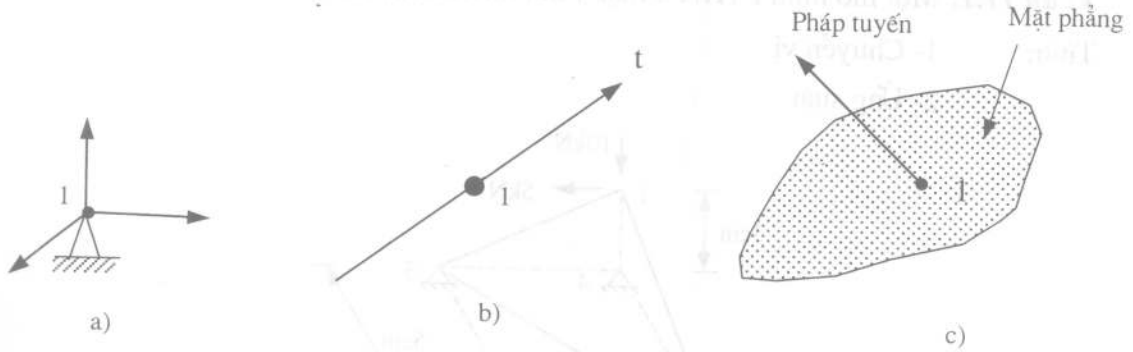
Đối với các FTTH tứ diện bậc cao hơn, chẳng hạn như loại 10 nút, 20 nút, 27 nút, cũng có thể thực hiện các bước như đã trình bày trong chương 7.

### §11.5. CÁCH XỬ LÝ CÁC ĐIỀU KIỆN BIÊN

Về cách xử lý các điều kiện biên, ta làm như đối với các bài toán 1 chiều hoặc 2 chiều.

Ràng buộc điểm (hình 11.7a) là ràng buộc tại đó một điểm hoàn toàn cố định. Trong trường hợp này, ta thêm một số C khá lớn vào phần tử có bậc tự do tương ứng trên đường chéo chính của ma trận độ cứng.

Ràng buộc đường thẳng là một ràng buộc trong đó 1 điểm chỉ được phép chuyển vị trên phương đường thẳng t (hình 11.7b).



Hình 11.7: Ràng buộc tại các nút

a) Ràng buộc điểm; b) Ràng buộc trên đường thẳng; c) Ràng buộc mặt phẳng.

Giả sử  $t$  có các cosin định hướng  $(l, m, n)$ . Xuất phát từ điều kiện  $\mathbf{u} \times \mathbf{t} = 0$  ta thêm các số hạng độ cứng sau vào các phần tử có BTD tương ứng của nút I trong ma trận độ cứng:

3l - 2	3l - 1	3l	← BTD của nút 1
--------	--------	----	-----------------

$$\begin{matrix}
 3l - 2 \\
 3l - 1 \\
 3l \\
 \uparrow \\
 \text{BTD}
 \end{matrix}
 \begin{bmatrix}
 Cl^2 & Clm & Cln \\
 & Cm^2 & Cmn \\
 & & Cn^2
 \end{bmatrix}$$

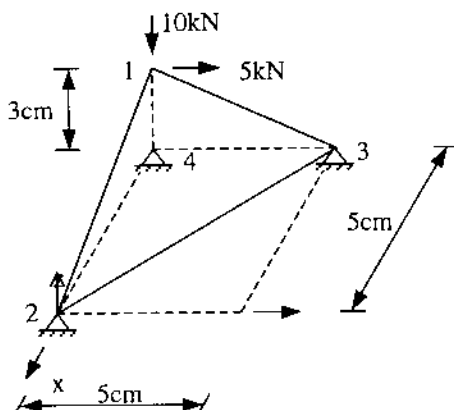
Đối với ràng buộc mặt phẳng (hình 11.7c), một nút chỉ được di chuyển trong mặt phẳng có pháp tuyến  $t$ . Giả sử  $t$  có các cosin định hướng  $(l, m, n)$ . Xuất phát từ điều kiện  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = 0$ , ta thêm vào các số hạng sau vào các phần tử có BTD tương ứng của nút I trong ma trận độ cứng.

3l - 2	3l - 1	3l	← BTD của nút 1
--------	--------	----	-----------------

$$\begin{matrix}
 3l - 2 \\
 3l - 1 \\
 3l \\
 \uparrow \\
 \text{BTD}
 \end{matrix}
 \begin{bmatrix}
 C(1-l^2) & -Clm & -Cln \\
 & C(1-m^2) & Cmn \\
 & & C(1-n^2)
 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 11.1: Một mô hình FTHH 4 mặt 4 nút như trên hình (11.8).

- Tính: 1- Chuyển vị  
2- Ứng suất



Môđun đàn hồi: 21000kN/cm<sup>2</sup>

Hệ số Poisson: 0.3

Phần tử	Số thứ tự nút tổng thể			
	1	2	3	4
1	1	2	3	4

Hình 11.8

Giải:

Tính ma trận cấu trúc vật liệu theo (1.17)

$$D = \begin{bmatrix} 4523,077 & 1938,462 & 1938,462 & 0 & 0 & 0 \\ & 4523,077 & 1938,462 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4523,077 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1292,308 & 0 & 0 \\ \text{Đối xứng} & & & & 1292,308 & 0 \\ & & & & & 1292,308 \end{bmatrix}$$

Tính ma trận B theo (11.24):

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & -0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,33 \\ 0 & 0,33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & -0,33 & -0,2 \\ 0,33 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & -0,33 & 0 & 0 & -0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & -0,2 & -0,2 & 0 \end{bmatrix}$$

Tính ma trận độ cứng riêng theo (11.26)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$k_1 =$	143,589	0	0	0	0	86,154	0	0	0	-143,589	0	-86,154
		143,589	0	0	0	0	0	0	86,154	0	-143,589	-86,154
			502,654	129,231	0	0	0	129,231	0	-129,231	-129,231	-502,564
				180,923	0	0	0	77,538	0	-180,923	-77,538	-129,231
					51,692	0	51,692	0	0	-51,692	-51,692	0
						51,692	0	0	0	-86,154	0	-51,692
							51,692	0	0	-51,692	-51,692	0
								180,923	0	-77,538	180,923	-129,231
									51,692	0	-86,154	-51,692
										376,205	129,231	215,385
											376,205	215,385
												605,949

Xác lập ma trận độ cứng tổng thể:

Vì chỉ có một phần tử, từ ma trận độ cứng riêng  $k_1$ , ta dùng phương pháp loại trừ để xác lập MTĐC tổng thể:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \leftarrow \text{Số thứ tự BTĐ tổng thể} \\ 143,589 & 0 & 0 & 1 \\ & 143,589 & 0 & 2 \\ \text{Đối xứng} & & 502,654 & 3 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Kết quả tính:

$$[Q_1 \ Q_2 \ Q_3] = [0 \quad 0,0348 \quad -0,0199]' \text{ cm}$$

Tính ứng suất theo (11.33)

Các thành phần chuyển vị của phần tử là:

$$[q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8 \ q_9 \ q_{10} \ q_{11} \ q_{12}]' = [0 \quad 0,035 \quad -0,019 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Các thành phần ứng suất:

$$\begin{aligned}
 US1 &= -12,857 \text{ kN/cm}^2 & US2 &= -12,857 \text{ kN/cm}^2 \\
 US3 &= -30 \text{ kN/cm}^2 & US4 &= 14,999 \text{ kN/cm}^2 \\
 US5 &= 0 & US6 &= 0
 \end{aligned}$$

## §11.6. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH GIẢI BÀI TOÁN 3 CHIỀU (CTR17)

1. Nhập số liệu (lấy thí dụ trên hình (11.9))

Số phần tử: 1

Số BTĐ có chuyển vị: 3

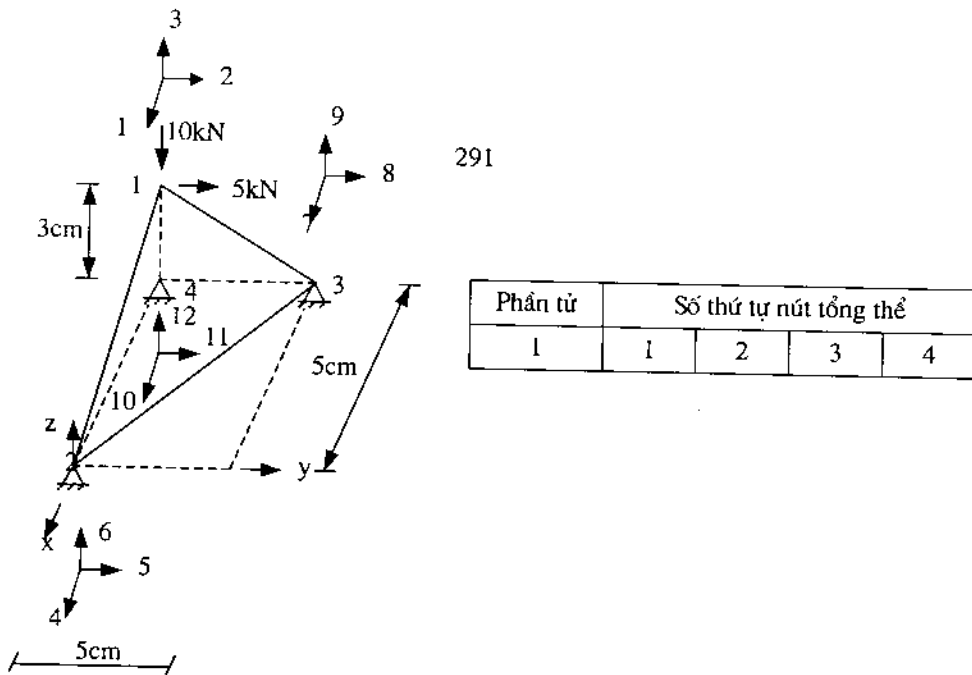
Tổng số BTĐ : 12

Số BTĐ có chuyển vị triệt tiêu: 9

Số thứ tự BTĐ có chuyển vị triệt tiêu: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm<sup>2</sup>

Hệ số poát xong: 0,3



Hình 11.9

Các số liệu còn lại thống kê trong bảng sau:

Phần tử	Tọa độ (cm)											
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$
1	-5	0	-5	-5	0	0	5	0	3	0	0	0

Phần tử	Số thứ tự bậc tự do											
	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$	$d_6$	$d_7$	$d_8$	$d_9$	$d_{10}$	$d_{11}$	$d_{12}$
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

2. Xác lập các ma trận độ cứng riêng theo (11.26)
3. Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể
4. Ghép các vectơ tải trọng theo (11.28), (11.31) và các tải trọng nhập vào.
5. Gọi chương trình con để giải hệ phương trình cân bằng
6. Căn cứ vào các giá trị chuyển vị tìm được ở trên, tính ứng suất theo (11.33).