Chương 12
BÀI TOÁN DAO ĐỘNG

§12.1. KHÁI NIỆM

Trong các chương 3 - 10, ta đã phân tích ứng suất và biến dạng của kết cấu dưới tác dụng của tải trọng tĩnh. Ta gọi là tải trọng tĩnh khi nó được đặt lên kết cấu một cách chậm chạp và từ từ. Ta gọi là *tải trọng động* khi nó tác dụng lên kết cấu một cách đột ngột hoặc thay đổi theo thời gian. Tải trọng động gây ra gia tốc và dẫn đến sự dao động của kết cấu. Đối với một vật rắn biến dạng đàn hồi, khi cất tải trọng một cách đột ngột, nó có xu hướng dao động quanh vị trí cân bằng của nó. Chuyển động có tính chu kỳ do năng lượng biến dạng phục hồi gây ra, gọi là *dao động tự do*. Số chu kỳ trong đơn vị thời gian gọi là *tần số*. Chuyển vị lớn nhất kể từ vị trí cân bằng gọi là *biên độ*. Trong thực tế, dao động sẽ giảm dần nếu có lực cản. Tuy nhiên, nếu lực cản không lớn, sự khác nhau giữa tần số dao động tự do không cơ lực cản và tần số dao động tự do có lực cản, có thể bỏ qua. Ở đây, ta bỏ qua ảnh hưởng của lực cản khi áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn để nghiên cứu dao động tự do của kết cấu.

§12.2. CÔNG THỨC CƠ BẢN

Ta định nghĩa *hàm Lagrange L* như sau:

$$L = T - TN \tag{12.1}$$

Trong đó: T - động năng;

TN - thế năng.

Nguyên lý Hamintơn:

Trong khoảng thời gian bất kỳ từ t_1 đến t_2, trạng thái chuyển động của vật thể, cực trị hóa hàm:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt \tag{12.2}$$

Nếu hàm L được biểu thị bằng các biến khái quát (q_1, q_2, q_3 … q_n, $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3 \ldots \dot{q}_n$ thì phương trình chuyển động có dạng:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots n \tag{12.3}$$

Trong đó: $\dot{q}_i = dq_i/dt$

Ví dụ sau sẽ minh họa nguyên lý Hamintơn.

Ví dụ 12.1: Cho một hệ lò xo và khối lượng như trên hình (12.1).

Động năng và thế năng có thể viết;

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$TN = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(x_2 - x_1\right)^2$$

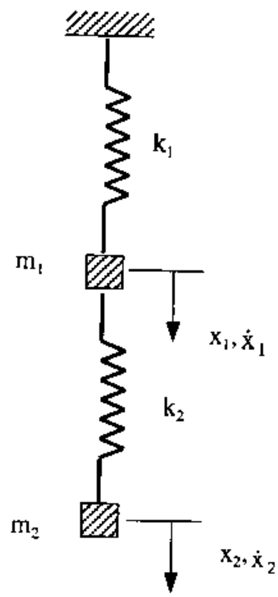
Vì L = T - TN, ta có phương trình chuyển động:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 \left(x_2 - x_1\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = m_2 \ddot{x}_2 + k_2 \left(x_2 - x_1\right) = 0$$

Phương trình trên có thể viết:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(k_1 + k_2\right) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$



Hình 12.1

Phương trình trên có thể viết dưới dạng ma trận rút gọn:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0 \qquad (12.4)$$

Trong đó: **M** - ma trận khối lượng;

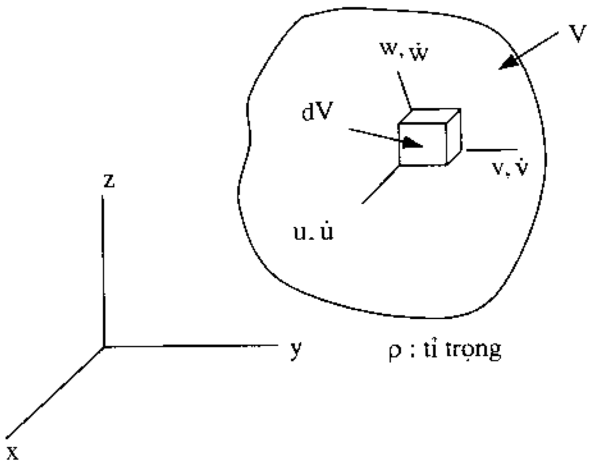
K - ma trận độ cứng;

$\ddot{\mathbf{x}}$ - véc tơ gia tốc;

$\mathbf{x}$ - véc tơ chuyển vị.

Vật rắn có khối lượng phân bố

Xét một vật rắn có khối lượng phân bố như trên hình (12.2)



***Hình 12.2.** Vật rắn có khối lượng phân bố*

Thế năng đã được trình bày trong chương 1. Động năng có dạng

$$T = \frac{1}{2}\int \dot{\mathbf{u}}'.\dot{\mathbf{u}}.\rho \quad dV \tag{12.5}$$

Trong đó: ρ - tỉ trọng (khối lượng trên đơn vị thể tích) của vật liệu; $\dot{\mathbf{u}}$ - véc tơ vận tốc tại điểm (x, y, z) với các thành phần $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{w}$ (hình 12.2)

$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \dot{u} & \dot{v} & \dot{w} \end{bmatrix} \tag{12.6}$$

Trong phương pháp phần tử hữu hạn, ta chia vật thể thành các phần tử, véc tơ chuyển vị trong mỗi phần tử được biểu thị bằng hàm hình dạng và các thành phần chuyển vị tại các nút:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Nq} \tag{12.7}$$

Trong động lực học, các thành phần chuyển vị phụ thuộc vào thời gian, do đó, véc tơ vận tốc có dạng:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\dot{\mathbf{q}} \tag{12.8}$$

Thay (12.8) vào (12.5), ta có:

$$T_e = \frac{1}{2}\mathbf{q}'\left[\int \rho \mathbf{N}'\mathbf{N} dV\right]\dot{\mathbf{q}} \tag{12.9}$$

Trong đó, số hạng trong dấu ngoặc vuông là ma trận khối lượng của phần tử hữu hạn:

$$m_e = \int \rho \mathbf{N}'\mathbf{N} dV \tag{12.10}$$

Ma trận khối lượng cho các FTHH khác nhau sẽ được suy ra trong phần sau.

Tổng động năng cho toàn hệ có thể viết:

$$T = \sum T_c = \sum \frac{1}{2} \dot{q}'.m_e.q = \frac{1}{2} Q'MQ \qquad (12.11)$$

Như trong chương hai đã trình bày, thế năng có dạng:

$$TN = \frac{1}{2} \mathbf{Q'KQ} - \mathbf{Q'F} \qquad (12.12)$$

Theo (12,1) và (12.3), ta có phương trình chuyển động:

$$\mathbf{M\ddot{Q}} + \mathbf{KQ} = \mathbf{F} \qquad (12.13)$$

Đối với dao động tự do, lực $\mathbf{F} = 0$ nên:

$$\mathbf{M\ddot{Q}} + \mathbf{KQ} = 0 \qquad (12.14)$$

Xuất phát từ trạng thái cân bằng, ta đặt:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{U}\sin\omega t \qquad (12.15)$$

Trong đó: **U** - vec tơ biên độ dao động tại các nút;

ω (radian/s) là tần số vòng (= 2π.f, f = số chu kỳ/s hoặc Hz).

Thay (12.15) vào (12.14), ta có:

$$\mathbf{kU} = \omega^2\mathbf{MU} \qquad (12.16)$$

Đây là bài toán giá trị riêng khái quát:

$$\mathbf{kU} = \lambda\mathbf{MU} \qquad (12.17)$$

Trong đó: **U** là vectơ riêng, nó biểu thị *mốt dao động* và ứng với giá trị riêng λ. Giá trị riêng λ là bình phương của tần số vòng ω. Tần số f bằng heztz (số chu kỳ trên giây) tính theo công thức $f = \omega/2\pi$.

Các phương trình trên cũng có thể suy ra từ nguyên lý D' Alembert hoặc công ảo.

§12.3. MA TRẬN KHỐI LƯỢNG CỦA CÁC PHẦN TỬ HỮU HẠN

Dưới đây, căn cứ vào các hàm hình dạng đã trình bày trong các chương trước, ta suy ra biểu thức ma trận khối lượng cho các FTHH khác nhau. Giả sử tỷ trọng không thay đổi trong FTHH, ta có:

$$m_e = \rho \int \mathbf{N'N}dV \qquad (12.18)$$

12.3.1. Thanh 1 chiều (chương 3)

$$\mathbf{q'} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} \qquad (12.19)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix}$$

Trong đó: $N_1 = \dfrac{1-\xi}{2}$ $\qquad N_2 = \dfrac{1+\xi}{2}$

$$\mathbf{m}_e = \rho \int_e \mathbf{N'NA}\,dx = \frac{\rho A_c.L_e}{2}\int_{-1}^{+1}\mathbf{N'N}d\xi$$

Sao khi tính tích phân:

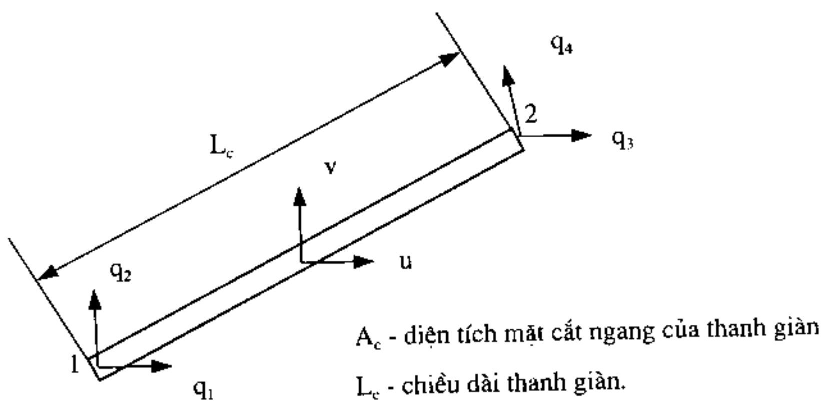
$$m_e = \frac{\rho A_c L_e}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (12.20)$$

12.3.2. Giàn (chương 4)

$$\mathbf{u'} = [u \quad v]$$

$$\mathbf{q'} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4]$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \qquad (12.21)$$



***Hình 12.3:** Giàn*

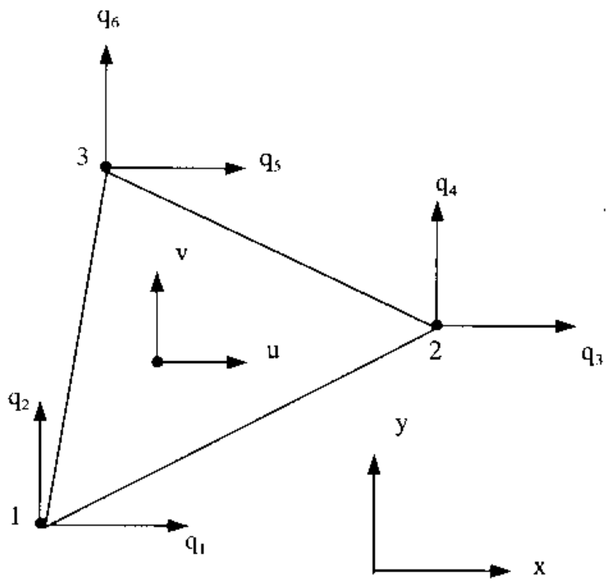
Cận tích phân lấy từ - 1 đến + 1 :

$$N_1 = \frac{1-\xi}{2} \qquad N_2 = \frac{1+\xi}{2}$$

$$\mathbf{m}_c = \frac{\rho A_e L_e}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (12.22)$$

12.3.3. Phần tử hữu hạn tam giác 3 nút (chương 5)

Trong bài toán ứng suất phẳng và biến dạng phẳng từ chương 5, ta có:



A_e - diện tích của FTHH tam giác
h_e - bề dày của FTHH (dạng tấm)

Hình 12.4: FTHH tam giác 3 nút

$$\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}' = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \tag{12.23}$$

Ma trận khối lượng của phần tử hữu hạn

$$\mathbf{m}_e = \rho \int \mathbf{N}'\mathbf{N} dA$$

Do $\int_e N_1^2 dA = \frac{1}{6} A_e$, $\int_e N_1 N_2 dA = \frac{1}{12} A_e \ldots$ ta có:

$$\mathbf{m}_e = \frac{\rho h_e A_e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & 2 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 1 \\ & & & & 2 & 0 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix} \tag{12.24}$$

12.3.4. Phần tử hữu hạn trong vật thể tròn xoay (chương 6)

Ta có: $\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} u & w \end{bmatrix}$

Trong đó: u, w là các thành phần chuyển vị trên phương xuyên tâm và phương dọc trục. Các vectơ **q** và **N** tương tự như đối với FTHH tam giác trong (12.23). Ta có:

$$\mathbf{m}_e = \int \rho \mathbf{N'N} dV = \int \rho \mathbf{N'N} 2\pi r dA \tag{12.25}$$

Vì $r = N_1r_1 + N_2r_2 + N_3r_3$ (chương 6) nên:

$$\mathbf{m}_e = 25\pi\rho \int \left(N_1.r_1 + N_2r_2 + N_3r_3\right)\mathbf{N'N}dA$$

Vì $\int N_1^2 dA = \frac{20A_e}{20}$; $\int N_1^2N_2 dA = \frac{2A_e}{60}$; $\int N_1N_2N_3 dA = \frac{2A_e}{120}$, v.v...

ta có:

$$\mathbf{m}_e = \frac{\pi\rho A_e}{10}\begin{bmatrix} \frac{4}{3}r_1 + 2\bar{r} & 0 & 2\bar{r} - \frac{r_3}{3} & 0 & 2\bar{r} - \frac{r_2}{3} & 0 \\ & \frac{4}{3}r_1 + 2\bar{r} & 0 & 2\bar{r} - \frac{r_3}{3} & 0 & 2\bar{r} - \frac{r_2}{3} \\ & & \frac{4}{3}r_2 + 2\bar{r} & 0 & 2\bar{r} - \frac{r_1}{3} & 0 \\ & & & \frac{4}{3}r_2 + 2\bar{r} & 0 & 2\bar{r} - \frac{r_1}{3} \\ & & & & \frac{4}{3}r_3 + 2\bar{r} & 0 \\ & & & & & \frac{4}{3}r_3 + 2\bar{r} \end{bmatrix} \tag{12.26}$$

Trong đó: $\bar{r} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}$ (12.27)

12.3.5. Phần tử hữu hạn tứ giác (chương 7)

Đối với FTHH tứ giác trong bài toán ứng suất phẳng và biến dạng phẳng, ta có:

$$\mathbf{u'} = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q'} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \tag{12.28}$$

Ma trận khối lượng có dạng:

$$\mathbf{m}_e = \rho L_e \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{N'N} \det \mathbf{J} d\xi d\eta \tag{12.29}$$

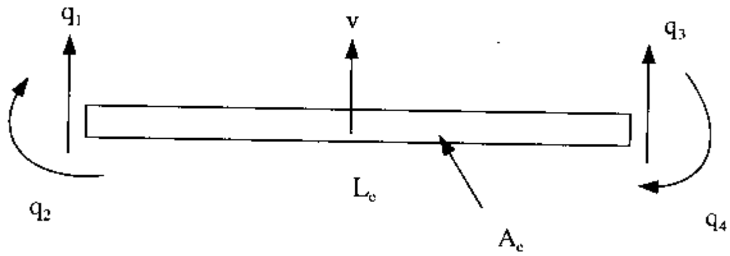
Tích phân trong (12.29) tiến hành theo phép cầu phương Gauss (xem chương 7).

12.3.6. Dầm (chương 8)

Đối với dầm trên hình (12.5), ta dùng các hàm hình dạng Hecmit trong chương 8.

$$v = \mathbf{H}.\mathbf{q} \tag{12.30}$$

$$\mathbf{m}_e = \int_{-1}^{+1} \mathbf{H}'\mathbf{H}\rho A_e = \frac{L_e}{2} d\xi \tag{12.31}$$



Hình 12.5: Dầm

Sau khi tính tích phân, ta được:

$$\mathbf{m}_e = \frac{\rho A_e L_e}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22L_e & 54 & -13L_e \\ & 4L_e^2 & 13L_e & -3L_e^2 \\ \text{đối xứng} & & 156 & -22L_e \\ & & & 4L_e^2 \end{bmatrix} \tag{12.32}$$

12.3.7. Phần tử của khung phẳng (chương 8)

Phần tử của khung trong hệ tọa độ cục bộ (hình 8.14a,b) là sự kết hợp của dầm và thanh 1 chiều. Vậy kết hợp (12.20) với (12.32), ta có ma trận khối lượng trong hệ tọa độ cục bộ:

$$\mathbf{m}_e = \begin{bmatrix} 2a & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ & 156b & 22L_e b & 0 & 54b & -13L_e b \\ & & 4L_e^2 b & 0 & 13L_e b & -3L_e^2 b \\ & & & 2a & 0 & 0 \\ & & & & 156b & -22L_e b \\ & & & & & 4L_e^2 b \end{bmatrix} \tag{12.33}$$

Dùng ma trận xoay **R** trong (8.49) (chương 8), ta có ma trận khối lượng trong hệ tọa độ tổng thể:

$$\mathbf{m}_e = \mathbf{R}'\mathbf{m}_e.\mathbf{R} \tag{12.34}$$

12.3.8. Phần tử hữu hạn tứ diện (chương 11)

Theo chương 11, vectơ chuyển vị **u** và ma trận hàm hình dạng **N** có dạng:

$$\mathbf{u}' = [u \quad v \quad w]$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \tag{12.35}$$

Ma trận khối lượng

$$m_e = \frac{\rho V_e}{20}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & & & 2 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & & & & 2 & 0 & 0 \\ & \text{Đối xứng} & & & & & & & & & 2 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 2 \end{bmatrix} \qquad (12.36)$$

§12.4. GIÁ TRỊ RIÊNG VÀ VECTƠ RIÊNG

Trước hết, ta nghiên cứu hệ phương trình tuyến tính dưới dạng tổng quát:

$$\mathbf{A}.\,\mathbf{X} = \lambda \mathbf{X} \qquad (12.37)$$

Trong đó: **A** - ma trận vuông;

X - véc tơ riêng;

λ - giá trị riêng.

Đối với bài toán dao động tự do, từ (12.17), ta có:

$$\mathbf{KU} = \lambda\ \mathbf{MU} \qquad (12.38)$$

Để đưa phương trình (12.38) về dạng (12.37), ta nhân bên trái 2 vế của nó với nghịch đảo của ma trận khối **M:**

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{KU} = \lambda \mathbf{U} \qquad (12.39)$$

Đặt:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \qquad (12.40)$$

và:

$$\mathbf{U} = \mathbf{X} \qquad (12.41)$$

ta trở về dạng phương trình (12.37)

M là ma trận khối;

K là ma trận độ cứng.

12.4.1. Các tính chất của vectơ riêng và một số định lý liên quan

Phương trình (12.37) có thể đưa về dạng:

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

Dưới dạng ma trận, phương trình trên có thể viết:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{X} = \mathbf{0} \qquad (12.42)$$

Hệ phương trình thuần nhất (12.42) có nghiệm duy nhất khi định thức của ma trận **(A - λI)** triệt tiêu, nghĩa là:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \mathbf{0} \qquad (12.43)$$

Khai tính định thức trên, ta có đa thức bậc n của λ:

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \cdots + b_n$$

Nếu cho vế phải bằng không, ta có phương trình đặc trưng của ma trận **A**:

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \cdots + b_n = 0$$

Khi cấp của ma trận A bằng n, phương trình đặc trưng trên cho n giá trị riêng (λ_1, λ_2, ..., λ_n)

Các nghiệm này có thể là số thực, số phức hoặc nghiệm bội (có từ 2 nghiệm bằng nhau trở lên).

Thay một giá trị riêng, chẳng hạn giá trị λ_i vào hệ phương trình (12.37) ta được *véc tơ riêng* tương ứng X_i. X_i là một véc tơ cột được ký hiệu như sau:

$$X_1 = [x_{11} \quad x_{21} \cdots x_{n1}]' \text{ ứng với } \lambda_1.$$

$$X_2 = [x_{12} \quad x_{22} \cdots x_{n2}]' \text{ ứng với } \lambda_2$$

....

$$X_n = [x_{1n} \quad x_{2n} \ldots x_{nn}]' \text{ ứng với } \lambda_n$$

Các vectơ riêng thường được biểu thị dưới dạng chuẩn hóa nghĩa là các phần tử X_i được chọn sao cho:

$$x_{1i}^2 + x_{2i}^2 + x_{3i}^2 + \ \ldots\ + x_{ni}^2 = 1$$

Ma trận vuông tạo thành bởi các vectơ riêng gọi là *ma trận các mô đơ*:

$$\overline{X} = [X_1 \quad X_2 \ldots X_n] \qquad (12.44)$$

Ma trận chéo tạo thành bởi các giá trị riêng gọi là *ma trận phổ*:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & . & & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & & . & . \\ . & & & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ 0 & . & . & & . & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{12.45}$$

Thay $\overline{\mathbf{X}}$ từ (12.44) vào (12.37 sau khi đã xác định được toàn bộ các giá trị riêng của ma trận A, ta được:

$$\mathbf{A\overline{X}} = \mathbf{\overline{X}.D} \tag{12.46}$$

do đó:

$$\mathbf{\overline{X}^{-1}.A.\overline{X}} = \mathbf{D} \tag{12.47}$$

Sau đây là một số định lý liên quan đến giá trị riêng và vec tơ riêng, không chứng minh:

Định lý 1: Nếu ma trận vuông A có các giá trị riêng λ_i và các vectơ riêng tương ứng X_i thì các giá trị riêng của chuyển vị của A (tức A') bằng các giá trị riêng tương ứng nhưng các véc tơ riêng Y_i thì lại trực giao với vectơ riêng X_i của A nghĩa là:

$$\mathbf{Y'_j\, X_i} = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad i = j \\ 0 & \text{nếu} \quad i \neq j \end{cases} \tag{12.48}$$

Trong đó, các véc tơ **X** và **Y** đều được chuẩn hóa.

Định lý 2: Nếu ma trận A đối xứng và toàn bộ các phần tử của nó đều là những số thực thì toàn bộ các giá trị riêng và vec tơ riêng của nó cũng là những số thực. Hơn nữa, các véc tơ riêng trực giao với nhau nghĩa là:

$$\mathbf{X'_i\, Y_j} = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad i = j \\ 0 & \text{nếu} \quad i \neq j \end{cases} \tag{12.49}$$

Định lý 3: Một ma trận đối xứng A có thể được biến đổi thành một ma trận chéo trong đó các phần tử là các giá trị riêng của nó bằng phép biến đổi trực giao $\mathbf{\overline{X}'.A.\overline{X}}, \mathbf{\overline{X}}$ là ma trận các mô đơ của A.

Định lý 4: Nếu các giá trị riêng và vec tơ riêng của ma trận **A** là λ_i và $\mathbf{X}_i$ thì các giá trị riêng của ma trận $\mathbf{B} = \mathbf{T.A.T}^{-1}$ bằng các giá trị riêng tương ứng của **A** còn các vec tơ riêng bằng $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{X}_i$, **T** là một ma trận vuông không suy biến.

Định lý 5: Nếu gọi vệt của ma trận **A** là tổng các phần tử trên đường chéo chính của nó thì tổng các giá trị riêng của **A** bằng vệt của nó nghĩa là:

$$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \tag{12.50}$$

Định lý 6: Định thức của ma trận **A** bằng tích toàn bộ các giá trị riêng của nó nghĩa là:

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \tag{12.51}$$

Định lý 7: Cho ma trận **A** và ma trận **B** = **T.A.T**$^{-1}$, **T** là một ma trận vuông bất kỳ không suy biến. Định thức và vệt của 2 ma trận **A** và **B** hoàn toàn như nhau nghĩa là:

$$\left.\begin{aligned} &|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| \\ &a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = b_{11} + b_{22} + \cdots + b_{nn} \end{aligned}\right\} \qquad (12.52)$$

Dưới đây, trình bày cách tính các giá trị riêng và vectơ riêng của một ma trận.

12.4.2. Một số phương pháp tính giá trị riêng và vectơ riêng

Sau đây là một số phương pháp tính giá trị riêng và vectơ riêng.

12.4.2.1. Phương pháp đa thức đặc trưng

Như trong phần trước đã trình bày, giải hệ phương trình (12.43), ta sẽ được các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$. Lần lượt thay các giá trị riêng λ_i vào phương trình (12.37), ta sẽ được các vectơ riêng tương ứng. Phương pháp này khá phức tạp.

12.4.2..2. Phương pháp thương số Rayleigh để xác định giá trị riêng lớn nhất

Như trong phần trước đã trình bày, đối với ma trận cấp n, ta có n giá trị riêng được sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn như sau:

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \ldots \le \lambda_n \qquad (12.53)$$

Trong đó: λ_1 - giá trị riêng bé nhất;

λ_n - giá trị riêng lớn nhất.

Phương pháp thương số Rayleigh là phương pháp tính lặp. Quá trình tính chia thành nhiều vòng cho đến khi nào giá trị riêng và vectơ riêng ở vòng sau xấp xỉ với các giá trị tương ứng ở vòng trước.

Trước hết, ta gán cho vectơ riêng những giá trị bất kỳ, chẳng hạn:

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}$$

Thay vào (12.37) ta được: $\qquad \mathbf{AX}^{(1)} = \lambda\mathbf{X}^{(1)}$

Trong vòng tính đầu tiên, ta được giá trị ban đầu gần đúng $\lambda^{(1)}$ bằng cách chia phần tử đầu tiên của ma trận cột $\mathbf{A.X}^{(1)}$ cho phần tử đầu tiên của vectơ riêng:

$$\lambda^{(1)} = \frac{\text{Phần tử đầu tiên của } \mathbf{AX}^{(1)}}{\mathbf{x}_1^{(1)}} \tag{12.54}$$

Trong đó, chỉ số trong dấu ngoặc biểu thị số thứ tự của vòng tính. Giá trị gần đúng thứ hai của vectơ riêng được xác định theo công thức:

$$X^{(2)} = \frac{\mathbf{AX}^{(1)}}{\lambda^{(1)}} \tag{12.55}$$

Một cách tổng quát, ta có hệ thức:

$$\mathbf{A.X}^{(m)} = \lambda^{(m)}.\mathbf{X}^{(m+1)} \tag{12.56}$$

Trong đó, m biểu thị số thứ tự của vòng tính. Ta tiếp tục các vòng tính theo (12.54), (12.55), (12.56) cho đến khi giá trị của vectơ riêng trong vòng tính cuối cùng xấp xỉ với giá trị tương ứng của nó trong vòng tính trước thì kết thúc.

Khi giá trị riêng chỉ cần độ chính xác vừa phải và vectơ riêng là một đại lượng không quan trọng, ta tính giá trị riêng bằng công thức gần đúng sau đây gọi là *thương số Rayleizh.*

$$\lambda_0 = \frac{\mathbf{X'.A.X}}{\mathbf{X'.X}} \tag{12.57}$$

Ví dụ 12.2: Tìm giá trị riêng lớn nhất $\lambda_3$và vectơ riêng tương ứng của ma trận:

$$A = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 7 \end{vmatrix}$$

Giải:

Trước hết, ta gán cho vectơ riêng những giá trị bất kỳ chẳng hạn bằng đơn vị:

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Thực hiện các vòng tính theo (12.54), (12.55), (12.56), ta lần lượt được các kết quả sau:

$$\begin{array}{cccc} & AX^{(m)} & \lambda^{(m)} & X^{(m+1)} \\ m = 1 & \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} & 2 & \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ m = 2 & \begin{bmatrix} 11 \\ -18 \\ 19 \end{bmatrix} & 11 & \begin{bmatrix} 1 \\ -1{,}63 \\ 1{,}72 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$m = 3 \qquad \begin{bmatrix} 13,24 \\ -20,63 \\ 19,54 \end{bmatrix} \qquad 13,24 \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -1,56 \\ 1,48 \end{bmatrix}$$

$$m = 7 \qquad \begin{bmatrix} 12,29 \\ -18,26 \\ 16,28 \end{bmatrix} \qquad 12,29 \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -1,485 \\ 1,325 \end{bmatrix}$$

$$m = 8 \qquad \begin{bmatrix} 12,265 \\ -18,21 \\ 16,21 \end{bmatrix} \qquad 12,265 \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -1,485 \\ 1,325 \end{bmatrix}$$

Sau 8 vòng tính, ta thấy 2 vectơ riêng cuối cùng bằng nhau. Vậy giá trị riêng lớn nhất là:

$$\lambda_3 = 12,265 \qquad X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1,485 \\ 1,325 \end{bmatrix}$$

Trong vòng tính thứ 3, nếu áp dụng (12.57), ta được kết quả:

$$m = 3 \qquad \mathbf{X'AX} = 68,87 \qquad \mathbf{X'X} = 5,63$$

Vậy $\lambda_3 = 68,87/5,63 = 12,33$. So với kết quả vừa tính ở trên, sai số không lớn.

12.4.2.3. Phương pháp thương số Rayleizh xác định giá trị riêng bé nhất.

Giả sử λ_n là giá trị riêng lớn nhất của ma trận **A**. Theo (12.37) ta có:

$$\mathbf{AX} = \lambda_n \mathbf{X}$$

Nhân bên trái 2 vế của phương trình trên với A^{-1}, ta có:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{X} = \frac{1}{\lambda_n}\mathbf{X} = \lambda_1 \mathbf{X} \tag{12.58}$$

Trong đó, λ_1 là giá trị riêng bé nhất của **A**.

Vậy ta có quy tắc tìm giá trị riêng bé nhất của ma trận **A**: *giá trị riêng bé nhất của A bằng nghịch đảo của giá trị riêng lớn nhất của A^{-1}.*

12.4.2.4. Phương pháp khử dần giá trị riêng đã biết để tính các giá trị riêng tiếp theo.

Giả sử xuất phát từ giá trị riêng lớn nhất λ_n và vectơ riêng tương ứng X_n, ta tính các giá trị riêng và vectơ riêng tiếp theo bằng cách khử nghiệm λ_n trong phương trình đặc trưng.

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

Theo định lý 4, các giá trị riêng của ma trận $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{T}$ bằng các giá trị riêng tương ứng của A còn các vectơ riêng $\mathbf{Y}_i = \mathbf{T}^{-1}.\mathbf{X}_i$ trong đó **T** là một ma trận vuông không suy biến.

Giả sử dùng phép biến đổi sao cho ma trận **B** có dạng:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ 0 & . & . & . & . \\ . & & & & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \qquad (12.59)$$

Ta có:

$$|B - \lambda\mathbf{I}| = 0 \Rightarrow (\lambda_n - \lambda)|C - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

Trong đó:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \qquad (12.60)$$

Vậy các giá trị riêng của **C** cũng là các giá trị riêng của **B** đồng thời cũng là giá trị riêng của **A**.

Ma trận **T** thoả mãn điều kiện (12.59) có dạng như sau:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ x_{n2} & 1 & \ldots & 0 \\ x_{n3} & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & & \\ x_{nn} & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -x_{n2} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -x_{n3} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & & & \\ -x_{nn} & 0 & . & . \; . \; . \; . & 1 \end{bmatrix} \qquad (12.61)$$

Trong đó, cột đầu tiên của **T** biểu thị vectơ riêng tương ứng với giá trị riêng λ_n. Xác định giá trị riêng tiếp theo λ_{n-1} theo các bước sau:

Lập ma trận biến đổi **T** và nghịch đảo của nó theo (12.61);

Tính ma trận **B = T^{-1}.A.T**

Chia khối ma trận B như sau:

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} b_{11} & B_{12} \\ \hline 0 & B_{22} \end{array}\right] \tag{12.62}$$

Trong đó: $b_{11} = \lambda_n$;

$\mathbf{B}_{12}$ là hàng đầu tiên của ma trận **A** sau khi loại bỏ phần tử thứ nhất.

Tính giá trị riêng lớn nhất của ma trận $\mathbf{C} = \mathbf{B}_{22}$ theo phương pháp tính lặp. Giá trị này chính là giá trị riêng tiếp theo λ_{n-1} của ma trận A.

Vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ_{n-1} được tính như sau:

Véc tơ riêng Y_{n-1} ứng với giá trị riêng λ_{n-1} thỏa mãn hệ thức:

$$\mathbf{B}.\,\mathbf{Y}_{n-1} = \lambda_{n-1}.Y_{n-1}$$

Thay $b_{11} = \lambda_n$ và $\mathbf{B}_{22} = \mathbf{C}$ vào (12.62) ta có:

$$\left[\begin{array}{c|c} \lambda_n & \mathbf{B}_{12} \\ \hline 0 & \mathbf{C} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} y_{12} \\ \hline Y'_{n-1} \end{array}\right] = \lambda_{n-1}\left[\begin{array}{c} y_{12} \\ \hline Y'_{n-1} \end{array}\right] \tag{12.63}$$

Trong đó: y_{12} là phần tử đầu tiên của vectơ riêng Y_{n-1};

Y'_{n-1} là vectơ riêng của ma trận **C** vì $\mathbf{CY}_{n-1} = \lambda_2.\mathbf{Y}_{n-1}$.

Thực hiện phép nhân ma trận:

$$\lambda_n y_{12} + \mathbf{B}_{12}\mathbf{Y}'_{n-1} = \lambda_{n-1} y_{12}$$

do đó
$$y_{12} = \frac{\mathbf{B}_{12}.\mathbf{Y}'_{n-1}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \tag{12.64}$$

Vectơ riêng $\mathbf{X}_{n-1}$ ứng với giá trị riêng λ_{n-1} của ma trận **A** tính theo công thức:

$$\mathbf{X}_{n-1} = \mathbf{T}.\mathbf{Y}_{n-1} \tag{12.65}$$

Giá trị riêng tiếp theo λ_{n-2} và vectơ giá trị riêng tương ứng $\mathbf{X}_{n-2}$ của ma trận **A** được xem như giá trị riêng thứ hai và vectơ riêng thứ hai của ma trận **C**. Cứ như vậy, ta tiếp tục tính các giá trị riêng và vectơ riêng tiếp theo cách trình bày trên.

Ví dụ 12.3: Xác định các giá trị riêng tiếp theo của ma trận:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \text{ nếu } \lambda_3 = 12{,}265$$

$$\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1{,}485 \\ 1{,}325 \end{bmatrix}$$

Giải:

Theo (12.61) ta có:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1,485 & 1 & 0 \\ 1,325 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1,485 & 1 & 0 \\ -1,325 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Thực hiện các phép nhân ma trận:

$$\mathbf{AT}_1 = \begin{bmatrix} 12,265 & -4 & 1 \\ -18,21 & 6 & -4 \\ 16,21 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}_1^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 12,265 & -4 & 1 \\ 0 & 0,06 & -2,515 \\ 0 & 1,30 & 5,675 \end{bmatrix}$$

Vậy theo (12.60): $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0,06 & -2,515 \\ 1,30 & 5,675 \end{bmatrix}$

Sau khi dùng phương pháp tính lặp đối với ma trận **C**, ta được kết quả:

$$\lambda_2 = 5,01 \qquad\qquad Y'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1,97 \end{bmatrix}$$

Vì $B_{12} = [-4 \quad 1]$ nên sau khi áp dụng (12.64) ta được kết quả:

$$y_{12} = \frac{\mathbf{B}_{12}\mathbf{Y'}_2}{\lambda_3 - \lambda_2} = \frac{5,97}{12,265 - 5,01} = \frac{5,97}{7,255} = 0,825$$

Vậy vectơ riêng thứ hai của B là:

$$\mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} 0,825 \\ 1 \\ -1,97 \end{bmatrix}$$

Theo định lý 4:

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{T}_1.\mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} 0,825 \\ 0,224 \\ -0,878 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,371 \\ -1,062 \end{bmatrix}$$

Giá trị riêng cuối cùng được xác định bằng cách khử λ_2 từ phương trình đặc trưng:

$$|\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}| = \mathbf{0}$$

Căn cứ vào giá trị $\mathbf{Y'}_2$ và (12.61), ta được kết quả:

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1,97 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1,97 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{CT}_2 = \begin{bmatrix} 5,01 & -2,515 \\ 9,88 & 5,675 \end{bmatrix}$$

Vậy $\mathbf{D} = \mathbf{T}_2^{-1}\,\mathbf{CT}_2 = \begin{bmatrix} 5,01 & -2,512 \\ 0 & 0,725 \end{bmatrix}$

Thực hiện phương pháp tính lặp đối lập với ma trận **D**, ta được kết quả:

$\lambda_1 = 0,725 \quad Z'_3 = 1$. Theo (12.64)

$$z_{23} = \frac{(-2,512).1}{5,01 - 0,725} = 0,586$$

Vậy : $\quad z_3 = \begin{bmatrix} 0,586 \\ 1 \end{bmatrix};$

$$\mathbf{Y'}_1 = \mathbf{T}_2\mathbf{Z}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1,97 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,586 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,586 \\ -0,154 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,263 \end{bmatrix}$$

Theo (12.64):

$$y_{13} = \frac{-[-4 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 \\ -0,263 \end{bmatrix}}{12,265 - 0,725} = \frac{4,263}{11,54} = 0,369$$

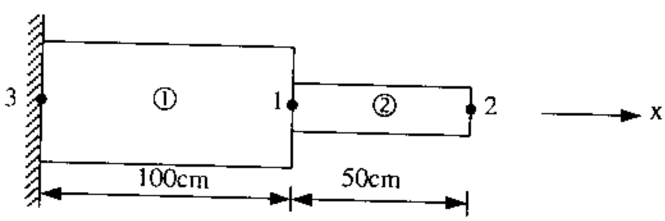
Vậy: $\quad \mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} 0,369 \\ 1 \\ -0,263 \end{bmatrix}$

Cuối cùng, vectơ tiêng ứng với giá trị riêng λ_1 của ma trận **A** là:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{T}_1\mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1,485 & 1 & 0 \\ 1,325 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,369 \\ 1 \\ -0,263 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,369 \\ 0,452 \\ 0,226 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,221 \\ 0,612 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 12.4:

Hệ một chiều như trên hình (12.6)



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm²

Khối lượng riêng: 0,00785 kG/cm³

Hình : 12.6

Tính : 1- Giá trị riêng lớn nhất;

2- Vectơ riêng tương ứng.

Giải:

Căn cứ vào (12.20), xác lập các ma trận độ cứng riêng và ghép thành MTĐC tổng thể. Ta có ma trận khối lượng.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & \quad 2 \end{array} \\ \mathbf{M} = & \begin{bmatrix} 1{,}793 & 0{,}262 \\ \text{Đối xứng} & 0{,}523 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

Nghịch đảo ma trận trên:

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}602 & -0{,}301 \\ -0{,}301 & 2{,}063 \end{bmatrix}$$

Căn cứ vào (3.19), xác lập các MTĐC riêng và ghép thành MTĐC tổng thể.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2940 & -1680 \\ \text{Đối xứng} & 1680 \end{bmatrix}$$

Tính ma trận **A** theo (12.40)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1926{,}115 & -1284{,}076 \\ -4173{,}248 & 3852{,}229 \end{bmatrix}$$

Tính lặp giá trị riêng lớn nhất và vectơ riêng tương ứng của ma trận **A** theo (12.54), (12.55), (12.56).

Kết quả: GTRLN: 5396,411

Vectơ riêng tương ứng: [1,0 -2,703]'

Ví dụ 12.5:

Hệ một chiều như trong ví dụ (12.4). Tính:

1- Giá trị riêng bé nhất;

2- Vectơ riêng tương ứng.

Giải:

Theo quy tắc trình bày trong 12.4.2.3, tính nghịch đảo của ma trận **A** (đã tính trong ví dụ (12.4).

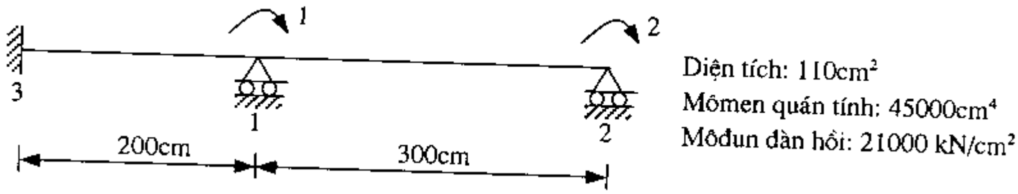
$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}869\times10^{-3} & 6{,}231\times10^{-4} \\ 2{,}025\times10^{-3} & 9{,}345\times10^{-4} \end{bmatrix}$$

Tính lặp giá trị riêng lớn nhất và vectơ riêng tương ứng theo (12.54), (12.55), (12.56).

GTRBN = 1/GTRLN = 382,03

Vectơ riêng tương ứng: [1,0 1,203]'

Ví dụ 12.6: Một dầm liên tục như trên hình (12.7)



Khối lượng riêng: 0,00785 kg/cm³

Hình 12.7

Tính : 1- Giá trị riêng lớn nhất;

2- Vectơ riêng tương ứng.

Giải:

Căn cứ vào (12.32), xác lập các ma trận khối lượng riêng và ghép thành ma trận khối lượng tổng thể:

$$\begin{array}{cc} \quad 1 & \quad\quad 2 \end{array}$$
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 28783313,33 & -166522,14 \\ -166532,14 & 222042,86 \end{bmatrix}$$

Nghịch đảo ma trận trên:

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 6,137\text{x}10^{-6} & 4,603\text{x}10^{-6} \\ 4,603\text{x}10^{-6} & 7,956\text{x}10^{-6} \end{bmatrix}$$

Căn cứ vào (8.23), xác lập các MTĐC riêng và ghép thành MTĐC tổng thể.

$$\mathbf{K} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & \quad 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 315\times10^5 & 63\times10^5 \\ \text{Đối xứng} & 126\times10^5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

Tính ma trận **A** theo (12.40)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 222,329 & 96,665 \\ 195,120 & 192,244 \end{bmatrix}$$

Tính lặp theo (12.54), (12.55), (12.56). Kết quả:

GTRLN: 320,795

Vectơ riêng tương ứng: [1,0 1,019]'

Ví dụ 12.7:

Dầm liên tục như trong ví dụ (12.6)

Tính: 1- Giá trị riêng bé nhất

2- Vectơ riêng tương ứng

Giải:

Theo quy tắc trình bày trong 12.4.2.3, nghịch đảo ma trận **A** (đã tính trong ví dụ 12.6) và tiến hành tính lặp.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}0131 & -0{,}0098 \\ -0{,}0198 & 0{,}0225 \end{bmatrix}$$

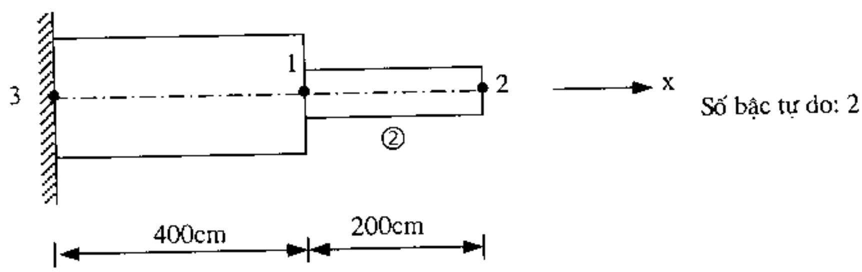
Kết quả: GTRBN: 1/GTRLN = 30,982

Vectơ riêng tương ứng: [1,0 -1,982]'

§12.5. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TÍNH GIÁ TRỊ RIÊNG LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ RIÊNG BÉ NHẤT CHO MỘT SỐ KẾT CẤU

12.5.1. Thuật toán lập trình tính GTRLN cho hệ một chiều (CTR19)

Lấy thí dụ trên hình (12.8)



Hình 12.8

Nhập số liệu theo bảng dưới:

Phần tử	Chiều dài (cm)	Diện tích (cm^2)	Môđun đàn hồi (kN/cm^2)	Khối lượng riêng (kg/cm^3)	Số thứ tự BTD	
					d_1	d_2
1	400	4	21000	0,00785	3	1
2	200	2	21000	0,00785	1	2

2- Xác lập các ma trận khối lượng riêng và ghép thành ma trận khối lượng tổng thể **M** theo (12.20).

3- Nghịch đảo ma trận khối lượng tổng thể.

4- Xác lập các MTĐC riêng và ghép thành MTĐC tổng thể **K** theo (3.19)

5- Tính ma trận **A** theo (12.40).

6- Thực hiện phương pháp tính lặp theo (12.54), (12.55), (12.56) để tìm GTRLN và vectơ riêng tương ứng.

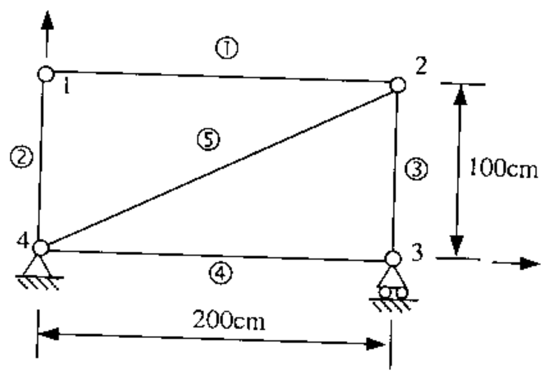
12.5.2. Thuật toán tính GTRBN và vectơ riêng tương ứng cho hệ một chiều (CTR20)

Các bước giống như đã trình bày trong §12.5.1 (CTR19)

Chỉ khác là nghịch đảo ma trận **A** và thực hiện phương pháp tính lặp.

12.5.3. Thuật toán tính GTRLN và vectơ riêng tương ứng cho hệ giàn (CTR21)

Lấy ví dụ trên hình (12.9):



Hình 12.9

Nhập số liệu như trong bảng sau:

Phần tử	Diện tích (cm^2)	Môđun đàn hồi (kN/cm^2)	Khối lượng riêng (kg/cm^3)	Tọa độ (cm)				Số thứ tự bậc tự do			
				x_1	x_2	y_1	y_2	d_1	d_2	d_3	d_4
1	12	21000	0,00785	0	200	100	100	1	2	3	4
2	12	21000	0,00785	0	0	0	100	7	8	1	2
3	12	21000	0,00785	200	200	0	100	5	6	3	4
4	12	21000	0,00785	0	200	0	0	7	8	5	6
5	12	21000	0,00785	0	200	0	100	7	8	3	4

2- Căn cứ vào (12.22), xác lập các ma trận khối lượng riêng và ghép thành ma trận khối lượng tổng thể **M**.

3- Nghịch đảo ma trận khối lượng tổng thể.

4- Căn cứ vào (4.10), xác lập các MTĐC riêng và ghép thành MTĐC tổng thể **K**.

5- Tính ma trận **A** theo (12.40)

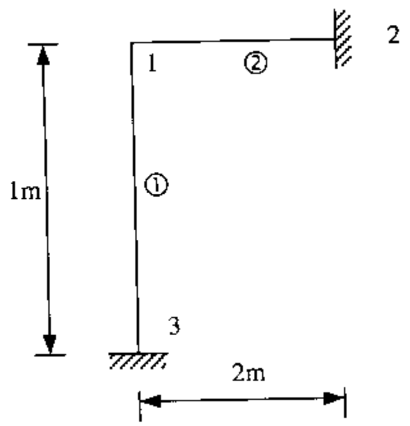
6- Thực hiện phương pháp tính lặp theo (12.54), (12.55), (12.56) để tìm GTRLN và vectơ riêng tương ứng.

12.5.4. Thuật toán tính GTRBN và vectơ riêng tương ứng cho hệ giàn (CTR22)

Các bước giống như đã trình bày trong §12.5.3 (CTR21) chỉ khác là nghịch đảo ma trận **A** và thực hiện phương pháp tính lặp để được GTRBN và vectơ riêng tương ứng.

12.5.5. Thuật toán tính GTRLN và vectơ riêng tương ứng cho hệ khung (CTR23)

Lấy ví dụ trên hình (12.10)



Số BTD = 3

Hình 12.10

Phần tử	Tọa độ (m)				Diện tích m^2	Môđun đàn hồi (kN/m^2)	Mômen quán tính (m^4)
	x_1	x_2	x_3	x_4			
1	0	0	0	1	8×10^{-3}	21×10^7	2×10^{-4}
2	0	2	1	1	8×10^{-3}	21×10^7	2×10^{-4}

Phần tử	Số thứ tự bậc tự do					
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
1	7	8	9	1	2	3
2	1	2	3	4	5	6

2- Căn cứ vào (12.34), xác lập các ma trận khối lượng riêng và ghép thành ma trận khối lượng tổng thể **M**.

3- Nghịch đảo ma trận khối lượng tổng thể

4- Căn cứ vào (8.53a), xác lập các MTĐC riêng và ghép thành MTĐC tổng thể **K**.

5- Tính ma trận **A** theo (12.40)

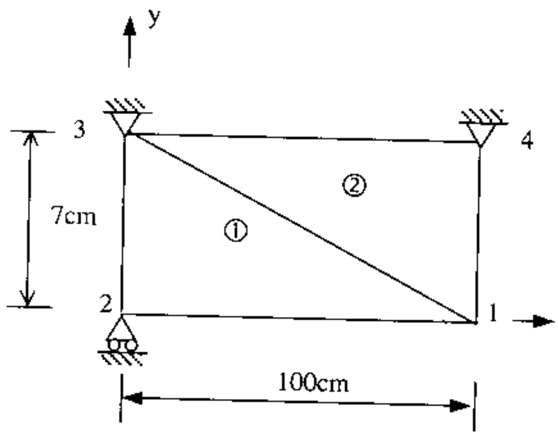
6- Thực hiện phương pháp lặp để tìm GTRLN và vectơ riêng tương ứng.

12.5.6. Thuật toán tính GTRBN và vectơ riêng tương ứng cho hệ khung (CTR24)

Các bước như đã trình bày trong §12.5.5 (CTR23). Công việc tiếp theo là nghịch đảo ma trận **A** để tìm GTRBN và vectơ riêng tương ứng.

12.5.7. Thuật toán tính GTRLN cho hệ 2 chiều kiểu FTHH tam giác 3 nút (CTR25)

Lấy ví dụ trên hình (12.11):



Phần tử	Số thứ tự tổng thể		
1	1	3	2
2	1	4	3

Số BTD có chuyển vị: 3

Hình 12.11

1- Nhập số liệu

Phần tử	Tọa độ (m)						Môđun đàn hồi (kN/cm²)	Bề dày tấm (cm²)
	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3		
1	10	0	0	0	7	0	21000	0,5
2	10	10	0	0	7	7	21000	0,5

Phần tử	Hệ số poát xong	Số thứ tự bậc tự do					
		d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
1	0,3	1	2	5	6	3	4
2	0,3	1	2	7	8	5	6

2- Căn cứ vào (12.24), xác lập các ma trận khối lượng riêng và ghép thành ma trận khối lượng tổng thể **M**.

3- Nghịch đảo ma trận khối lượng tổng thể

4- Căn cứ vào (5.30), xác lập các MTĐC riêng và ghép thành MTĐC tổng thể **K**.

5- Tính ma trận **A** theo (12.40)

6- Thực hiện phương pháp tính lặp để tìm GTRLN và vectơ riêng tương ứng.

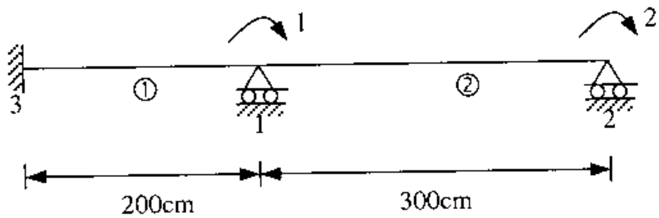
12.5.8. Thuật toán tính GTRBN cho hệ 2 chiều kiểu FTHH tam giác 3 nút (CTR26)

Các bước như đã trình bày trong § 12.5.7 (CTR25).

Công việc tiếp theo là nghịch đảo ma trận **A** và thực hiện phương pháp tính lặp để tìm GTRBN và vectơ riêng tương ứng.

12.5.9. Thuật toán tính GTRLN cho hệ dầm liên tục (CTR27)

Lấy ví dụ trên hình 12.12.



Số BTD có chuyển vị: 2

Hình 12.12

1- Nhập số liệu trong bảng sau:

Phần tử	Chiều dài (cm)	Diện tích (cm^2)	Mômen quán tính (cm^4)	Môđun đàn hồi (kN/cm^2)	Khối lượng riêng (kG/cm^3)	Số thứ tự bậc tự do			
						d_1	d_2	d_3	d_4
1	200	110	45000	21000	0,00785	5	6	3	1
2	300	110	45000	21000	0,00785	3	1	4	2

2- Căn cứ vào (12.32), xác lập các ma trận khối lượng riêng và ghép thành ma trận khối lượng tổng thể **M**.

3- Nghịch đảo ma trận khối lượng tổng thể.

4- Căn cứ vào (8.23), xác lập các MTĐC riêng và ghép thành MTĐC tổng thể **K**.

5- Tính ma trận **A** theo (12.40)

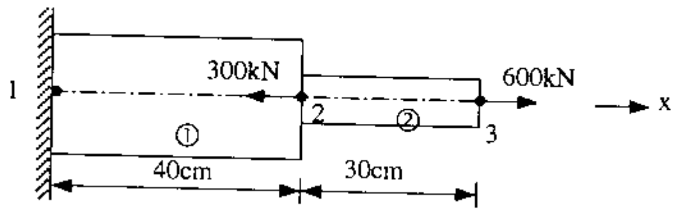
6- Thực hiện phương pháp tính lặp để tìm GTRLN và vectơ riêng tương ứng.

12.5.10. Thuật toán tính GTRBN cho hệ dầm liên tục(CTR28)

Các bước như đã trình bày trong §12.5.9. Công việc tiếp theo là nghịch đảo ma trận **A** và được thực hiện phương pháp tính lặp để tìm GTRBN và vectơ riêng tương ứng.

BÀI TẬP

Bài 1:



Diện tích:

Thanh 1: $4cm^2$

Thanh 2: $2,5cm^2$

Môđun đàn hồi:

Hình: B_1

Cho thanh 1 chiều như trên hình B_1. Dùng phương pháp loại trừ tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

3- Biến dạng

Đáp án:

1- Chuyển vị: [-0,1429 -0,4857]'cm

2- Ứng suất: [75 240]' kN/cm^2

3- Phản lực: -300kN

Bài 2: Đầu đề như trên hình B_1. Dùng phương pháp mô hình lò xo tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

3- Phản lực

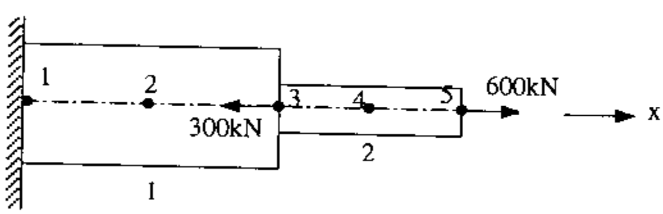
Đáp án:

1- Chuyển vị: [$-7,79.10^{-6}$ -0,1429 -0,485]' cm

2- Ứng suất: [75 240]' kN/cm^2

3- Phản lực: -300kN

Bài 3:



Diện tích:

Thanh 1: $4cm^2$

Thanh 2: $2,5cm^2$

Môđun đàn hồi: $21000 N/cm^2$

Hình: B_2

Đầu đề như trên hình B_2. Dùng phương pháp mô hình phân tử hữu hạn bậc 2 tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

3- Phản lực

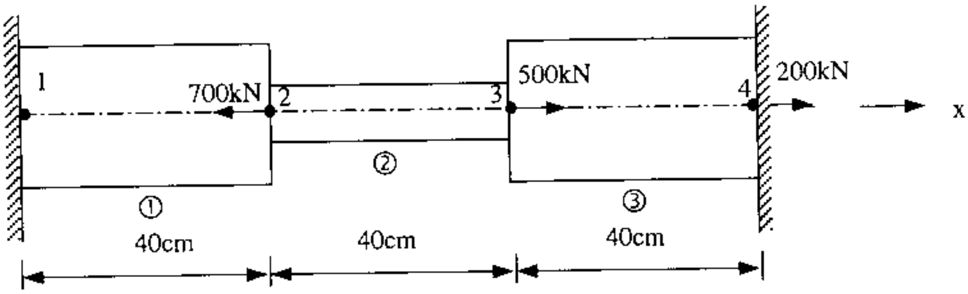
Đáp án:

1- Chuyển vị: [-0,0714 -0,1429 -0,3143 -0,4857]'cm

2- Ứng suất: giống bài 1 và bài 2

3- Phản lực: giống bài 1 và bài 2

Bài 4:



Diện tích:

Thanh 1: $4cm^2$

Thanh 2: $2cm^2$ Môđun đàn hồi: $21000kN/cm^2$

Thanh 3: $4cm^2$

Hình: *B_3*

Đầu đề như trên hình B_3. Dùng phương pháp mô hình lò xo tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

3- Phản lực

Đáp án:

1- Chuyển vị: [$-1,2698.10^{-5}$ -0,1905 0,0952 $1,2698.10^{-5}$]'cm

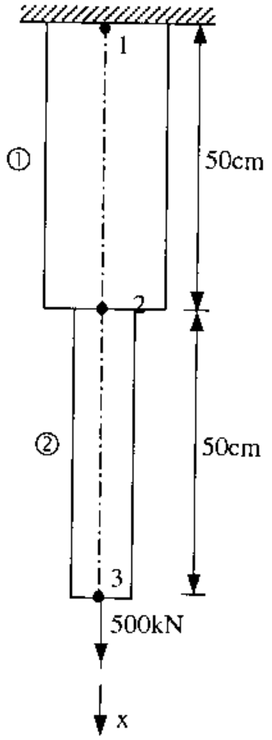
2- Ứng suất: [-99,997 150 -49,997]' kN/cm^2

3- Phản lực:

Điểm 1: 400 kN

Điểm 4: -400kN

Bài 5: Đầu đề như trên hình B_4



Diện tích:

Thanh 1: $6cm^2$

Thanh 2: $2cm^2$

Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2

Hệ số giãn nở: $20.10^{-6}/^0C$

Gia số nhiệt độ: 40^0C

Tỷ trọng: 785.10^{-5} kN/cm^3

***Hình:** B_4*

Thanh chịu tác dụng của tải trọng, của nhiệt độ và trọng lượng bản thân. Dùng phương pháp loại trừ tính:

1- Chuyển vị

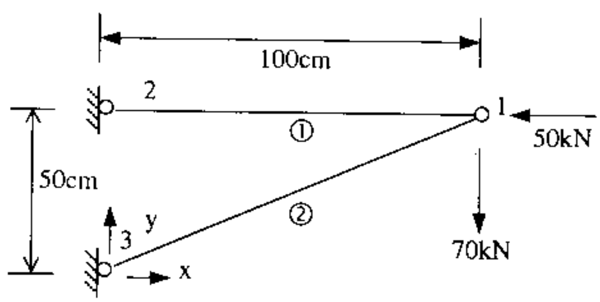
2- Ứng suất

Đáp án:

1) Chuyển vị: $[0,2306\ 0,8612]^t$cm

2) Ứng suất: $[96,86 \qquad 264,84]^t$ kN/cm^2

Bài 6: Cho một giàn như trên hình B_5



Diện tích:

Thanh 1: $8cm^2$

Thanh 2: $8cm^2$

Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2

***Hình:** B_5*

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

3- Phản lực

So sánh với kết quả tách nút

Đáp án:

1- Chuyển vị: [0,0536 -0,34]'cm

2- Ứng suất: [11,25 19,57]' kN/cm^2

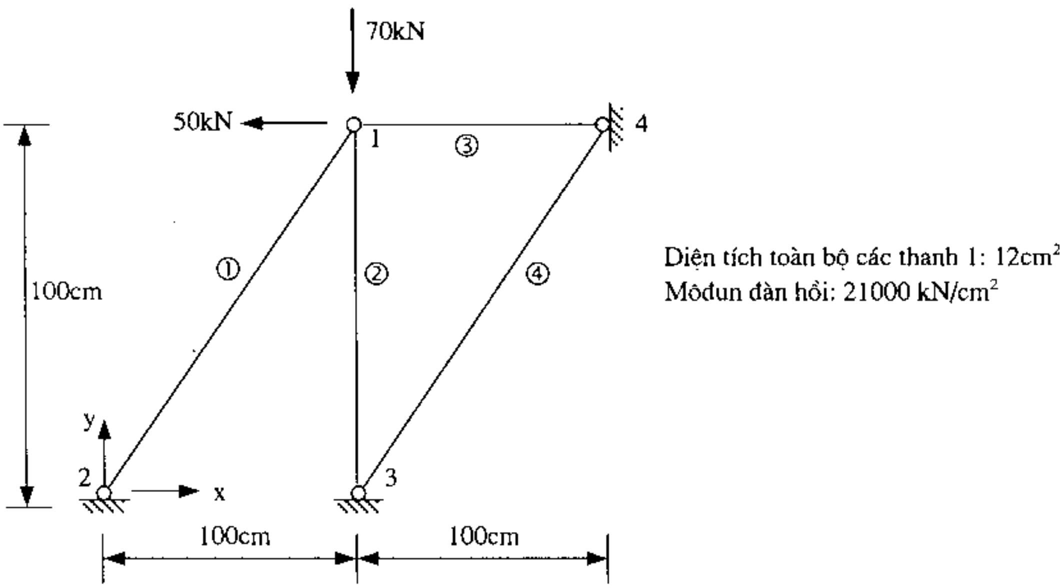
3- Phản lực

fl(3) = -90kN fl(4) = 0 fl(5) = 140kN fl(6) = 70kN

4- Kết quả hoàn toàn giống với phương pháp tách nút.

Bài 7:

Cho 1 giàn như trên hình B_6.



Hình: B_6

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

3- Phản lực

Đáp án:

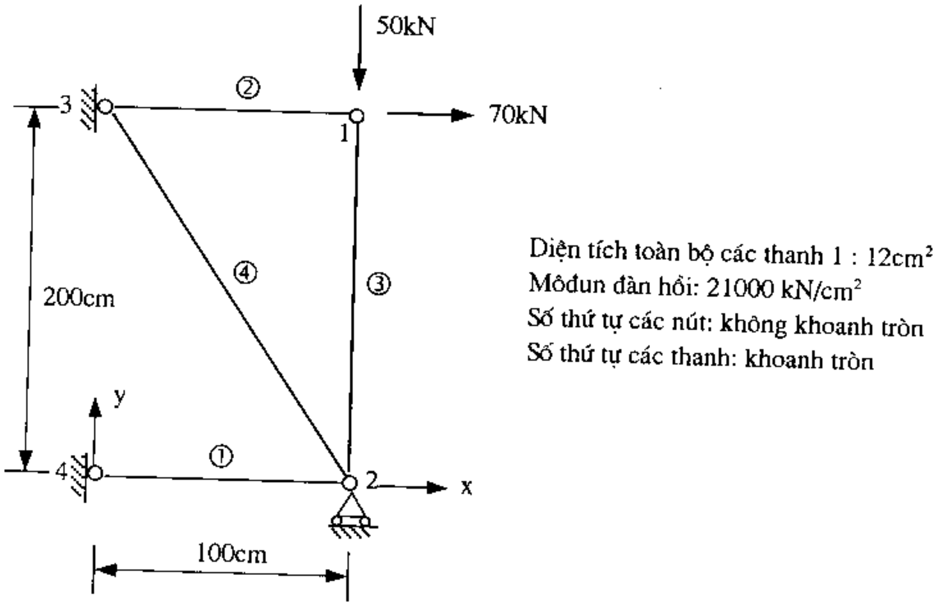
1- Chuyển vị: [-0,0099 0,0179]'cm

2- Ứng suất: [-2,93 -3,76 2,09 0]' kN/cm²

3- Phản lực: fl(3) = 2485kN fl(4) = 2485kN fl(5) = 0

fl(6) = 4515 kN fl(7) = 2515kN fl(8) = 0

Bài 8: Một giàn phẳng như trên hình B_7.



***Hình** B_7*

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

3- Phản lực

Đáp án:

1- Chuyển vị: [0,028 -0,04 0]'cm

2- Ứng suất: [0 5,83 -4,16 0]' kN/cm²

3- Phản lực

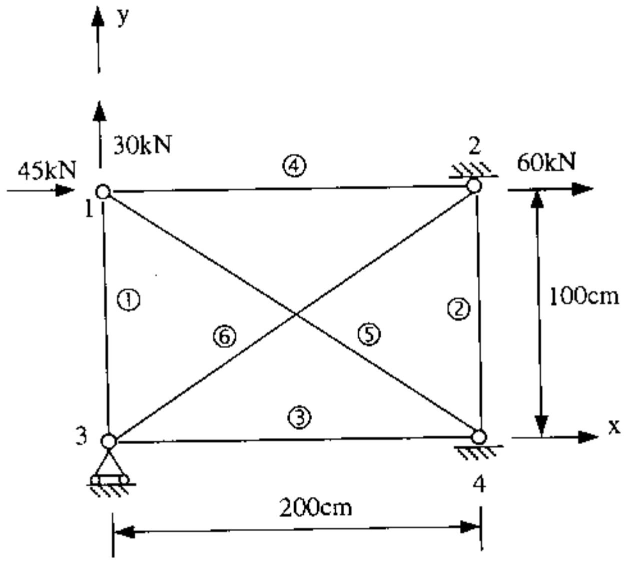
fl(4) = 50kN fl(5) = -70 fl(6) = 0kN fl(7) = 0KN fl(8) = 0

Bài 9: Cho một giàn phẳng như trên hình B_8

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất



Diện tích toàn bộ các thanh 1: 12cm^2
Số thứ tự các nút: không khoanh tròn
Số thứ tự các thanh: khoanh tròn
Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2

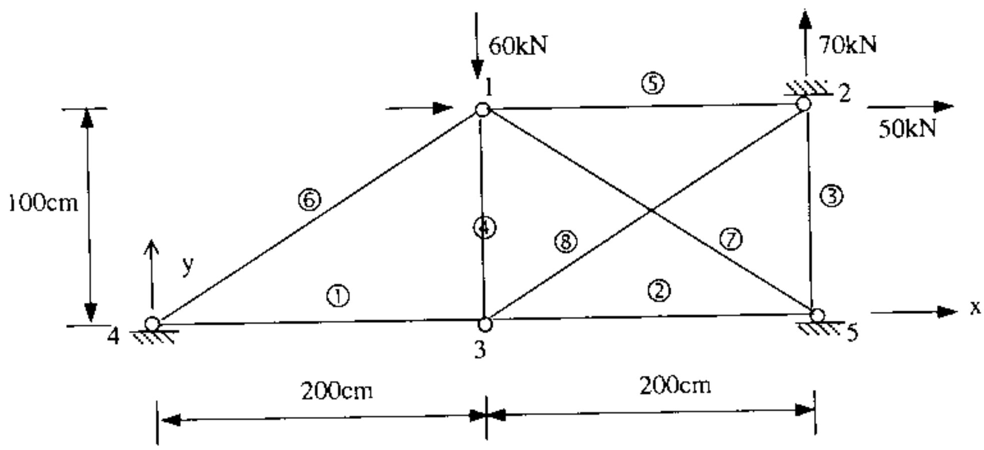
***Hình:** B_8*

Đáp án:

1- Chuyển vị: [0,048 0,019 0,039 0,0005 0]'cm

2- Ứng suất: [3,93 -3,28 0 -0,88 -3,20 3,31]' KN/cm^2

Bài 10: Cho một giàn phẳng như trên hình B_9.



Diện tích toàn bộ các thanh : 4cm^2

Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2

Số thứ tự các nút: không khoanh tròn

Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

***Hình:** B_9*

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

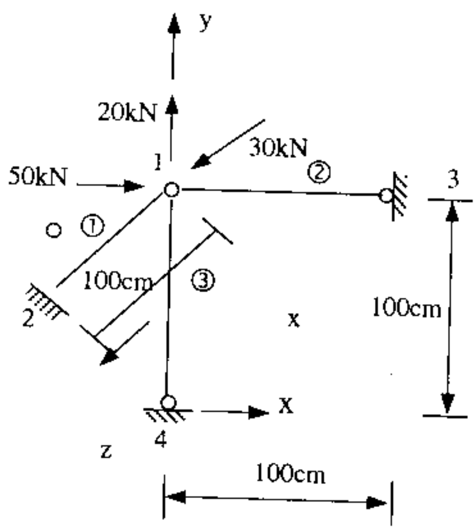
Đáp án:

1- Chuyển vị: [0,053 -0,103 0,093 0,13 -0,007 -0,12]'cm

2- Ứng suất: [-0,72 0,72 6,56 4,05 4,17 -5,21 -8,78 -1,62]' KN/cm^2

Bài 11:

Cho một giàn không gian như trên hình B_{10}.



Diện tích toàn bộ các thanh : 1cm^2
Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2
Số thứ tự các nút: không khoanh tròn
Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: B_{10}

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

3- Phản lực

Đáp án:

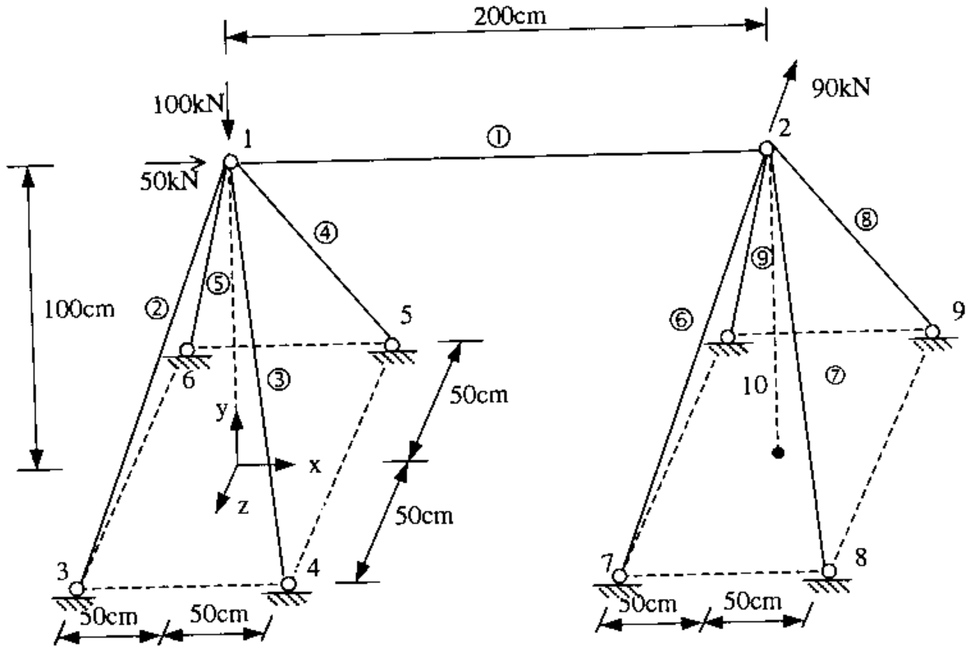
1- Chuyển vị: [0,016 0,006 0,01]'cm

2- Ứng suất: [-2,00 -3,33 1,33]' kN/cm^2

3- Phản lực

fl(4) = 0	fl(5) = 0	fl(6) = -30kN
fl(7) = -50kN	fl(8) = 0	fl(9) = 0
fl(10) = 0	fl(11) = -20kN	fl(12) = 0

Bài 12: Cho 1 giàn không gian như trên hình B_{11}.



Diện tích toàn bộ các thanh : 20cm²
Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm²
Số thứ tự các nút: không khoanh tròn
Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

***Hình:** B_{11}*

Dùng hương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

Đáp án:

1- Chuyển vị: [0,01 -0,01 0 0,007 -0,079 0,591]'cm

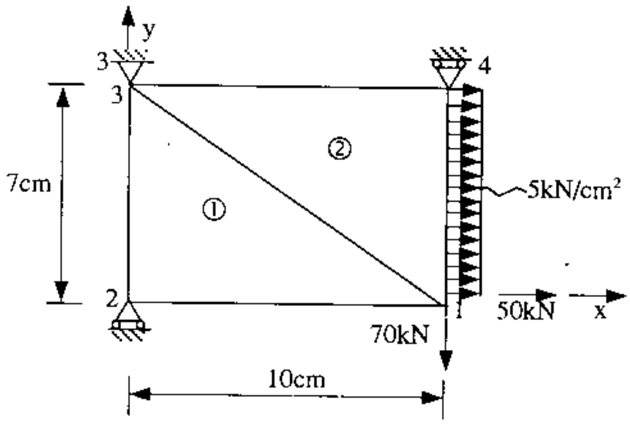
2- Ứng suất: [-51,86 -52,85 29,82 30,81 -0,50 -51,86 -52,85 29,82 30,81]' kN/cm²

Bài 13: Một mô hình FTHH tam giác biến dạng không đổi như trên hình B_{12}.

Yêu cầu tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm²
Số thứ tự các nút: không khoanh tròn
Số thứ tự các thanh: khoanh tròn
Hệ số Poátxong: 0,3

Hình: B_{12}

Đáp án:

1- Chuyển vị: [0,0048 -0,032 0,019]'cm

2- Ứng suất:

Phần tử 1: [6,82 3,20 2,05]' kN/cm²

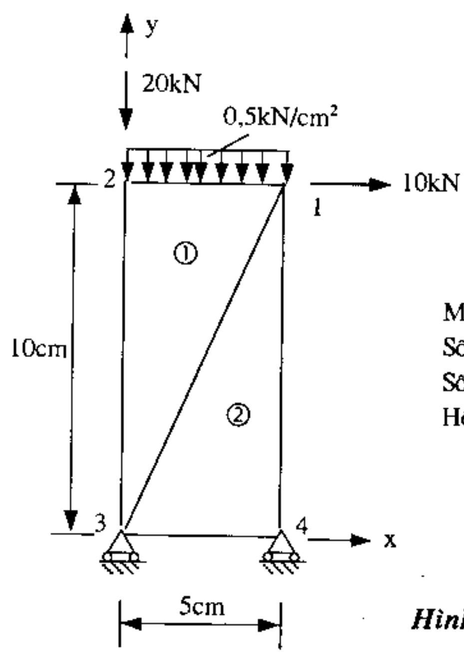
Phần tử 2: [10,66 -4,78 -5,57]' kN/cm²

Bài 14:

Một mô hình FTHH tam giác biến dạng không đổi như trên hình B_{13}. Yêu cầu tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm²
Số thứ tự các nút: không khoanh tròn
Số thứ tự các thanh: khoanh tròn
Hệ số Poátxong: 0,3

Hình: B_{13}

Đáp án:

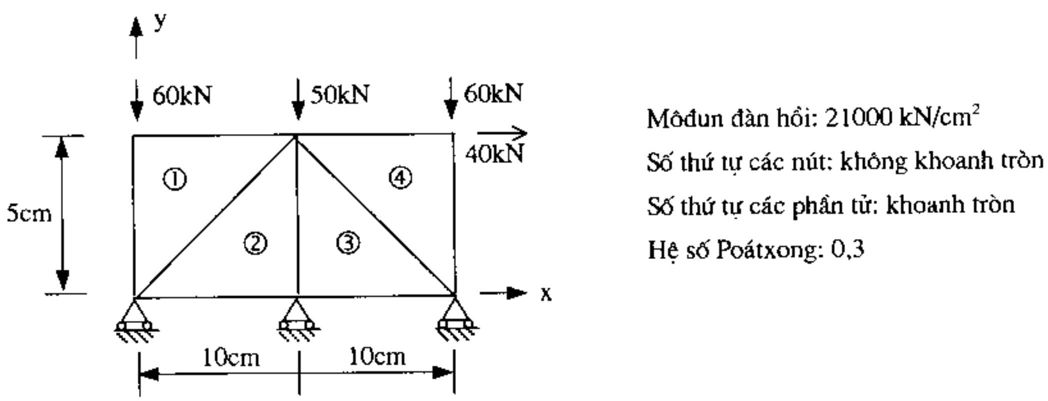
1- Chuyển vị: [0,0025 -0,002 0,0019 -0,0023]'cm

2- Ứng suất:

Phần tử 1: [1,009 -1,361 -4,462]' kN/cm^2

Phần tử 2: [-4,538 2,019 1,981]' kN/cm^2

Bài 15: Một mô hình FTHH tam giác biến dạng không đổi như trên hình B_{14}



Hình: B_{14}

Yêu cầu tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

Đáp án:

1- Chuyển vị: [-0,0010 -0,0029 0,0072 -0,0078 0,0050 -0,0039]'cm

2- Ứng suất:

Phần tử 1: [0,0527 -11,983 0,0264]' kN/cm^2

Phần tử 2: [-1,076 -3,587 1,153]' kN/cm^2

Phần tử 3: [-1,076 -3,587 1,153]' kN/cm^2

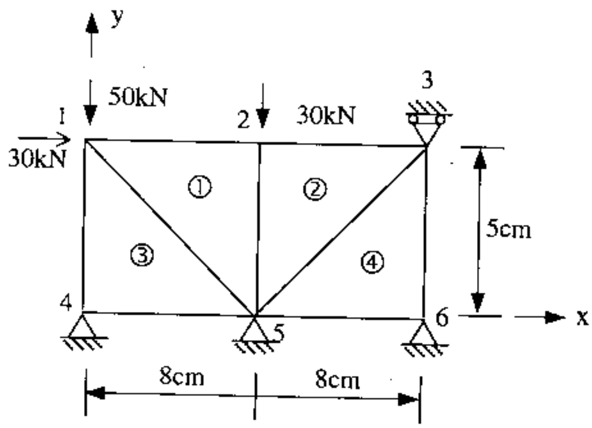
Phần tử 4: [4,663 -14,830 5,669]' kN/cm^2

Bài 16: Một mô hình FTHH tam giác biến dạng không đổi như trên hình B_{15}

Yêu cầu tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm²

Số thứ tự các nút: không khoanh tròn

Số thứ tự các phần tử: khoanh tròn

Hệ số Poátxong: 0,3

Hình: B_{15}

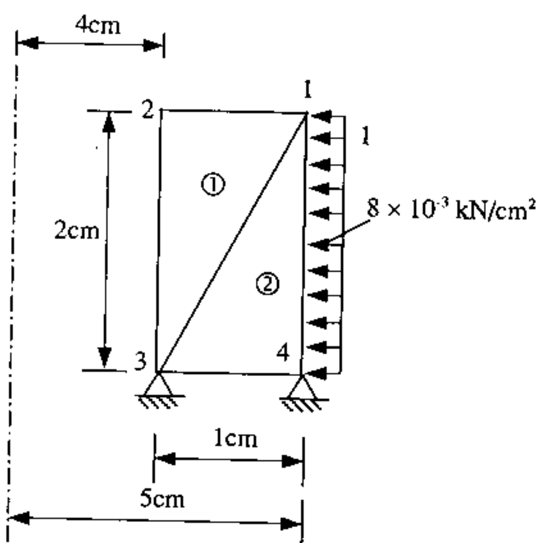
Đáp án:

1) Chuyển vị: [0,0022 -0,0024 0,0003 -0,0007 0,0034]'cm

2) Ứng suất:

Phần tử 1:	[-6,371	-4,886	2,215]' kN/cm²
Phần tử 2:	[-0,884	-3,239	1,214]' kN/cm²
Phần tử 3:	[-3,335	-11,115	3,518]' kN/cm²
Phần tử 4:	[0	0	0,5528]' kN/cm²

Bài 17: Một vật rắn tròn xoay có mô hình FTHH như trên hình B16



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm²

Hệ số Poátxong: 0,3

Số thứ tự các nút: không khoanh tròn

Số thứ tự các phần tử: khoanh tròn

Hình: B_{16}

Yêu cầu tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

Đáp án:

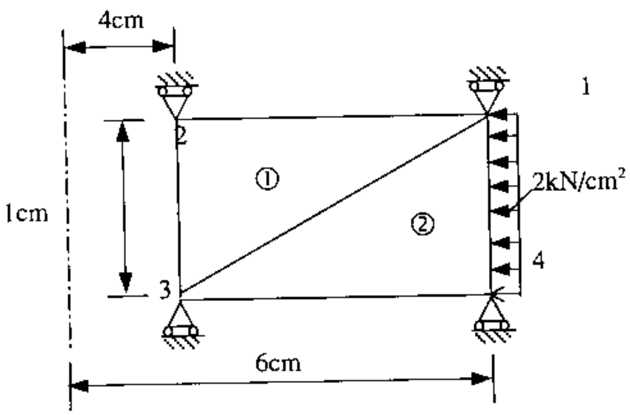
1- Chuyển vị: [0,1625   0,0689   0,0937   0,128]'cm

2- Ứng suất:

Phần tử 1: [-0,007   -0,0023   -0,0122   0,0141]' kN/cm^2

Phần tử 2: [-0,0061   0,0406   -0,0568   -0,0114]' kN/cm^2

Bài 18: Một vật rắn tròn xoay có mô hình FTHH như trên hình B17.



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2

Hệ số Poátxong: 0,3

Số thứ tự các nút: không khoanh tròn

Số thứ tự các phần tử: khoanh tròn

Hình : B_{17}

Đáp án:

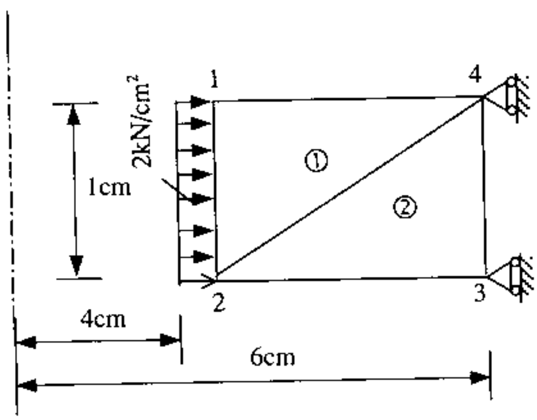
1- Chuyển vị: [-1,112   -1,246   -1,229   -1,131]'.10^{-3}cm

2- Ứng suất:

Phần tử 1: [-1,204   -2,290   -0,143   -0,428]' kN/cm^2

Phần tử 2: [-1,246   -2,036   -0,153   -5,540]' kN/cm^2

Bài 19: Một vật rắn tròn xoay có mô hình FTHH như trên hình B_{18}.



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2

Hệ số Poátxong: 0,3

Số thứ tự các nút: không khoanh tròn

Số thứ tự các phần tử: khoanh tròn

Hình: B_{18}

Tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

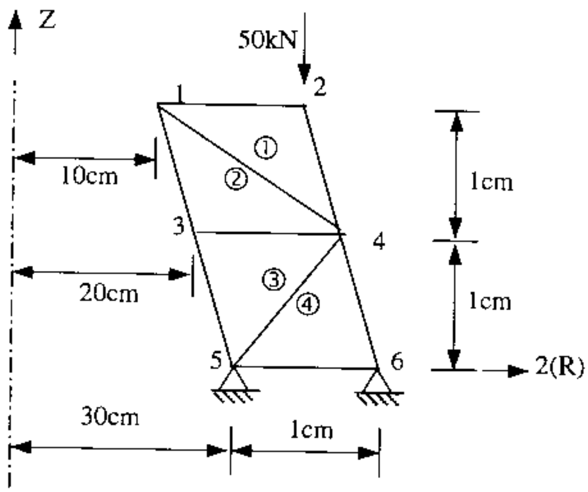
Đáp án:

1- Chuyển vị: $[-9{,}842.10^{-5}$ $3{,}043.10^{-4}$ $-9{,}278.10^{-16}$ $2{,}799.10^{-4}$
$1{,}964.10^{-4}$ $2{,}02.10^{-4}]'$cm

2- Ứng suất:

Phần tử 1:	[-1,01	0,1797	0,3593	-0,1014]' kN/cm^2
Phần tử 2:	[-0,067	-0,157	-0,314	-0,067]' kN/cm^2

Bài 20: Một vật rắn tròn xoay có mô hình FTHH như trên hình B_{19}.



Hệ số Poátxong: 0,3
Thứ tự các nút: không khoanh tròn
Thứ tự các phần tử: khoanh tròn

***Hình:** B_{19}*

Tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

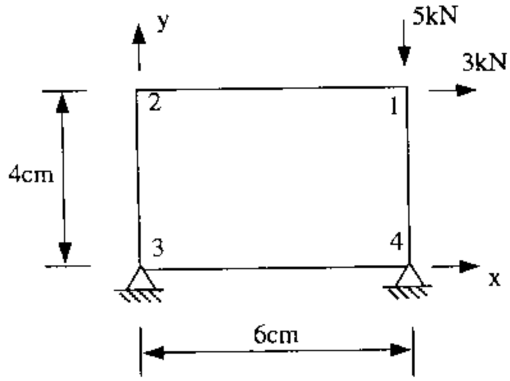
Đáp án:

1- Chuyển vị: $[-0{,}0722.10^{-5}$ $0{,}03.10^{-4}$ $-0{,}0538.10^{-5}$ $0{,}0239.10^{4}$
$0{,}0684.10^{-5}$ $-0{,}0430.10^{-4}$ $0{,}0732.10^{-5}$ $-0{,}0442.10^{-4}]'$cm

2- Ứng suất:

Phần tử 1:	[0,0129	0,0214	-0,0021	0,0100]' kN/cm^2
Phần tử 2:	[0,0760	0,1745	-0,0084	0,0754]' kN/cm^2
Phần tử 3:	[-0,0645	-0,1535	0,0085	-0,0650]' kN/cm^2
Phần tử 4:	[-0,0534	-0,1248	0,0059	-0,0533]' kN/cm^2

Bài 21: Một mô hình FTHH 4 cạnh 4 nút như trên hình B_{20}.



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm²
Bề dày tấm: 0,5cm
Hệ số Poátxong: 0,3
Không xét trọng lượng bản thân

Hình: B_{20}

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

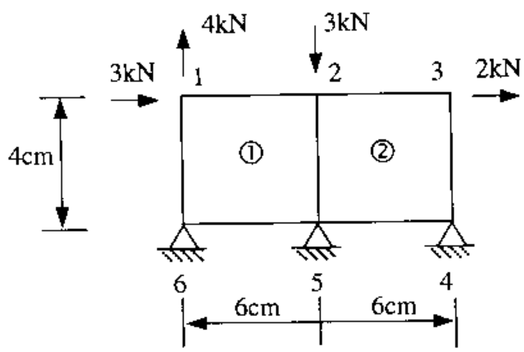
Đáp án:

Chuyển vị: $(d_1, d_2, d_3, d_4) = (0{,}218; -9{,}774; -2{,}243; 7{,}116) \times 10^{-3}$ cm

Ứng suất: US1 = 303,559 kN/cm²; US2 = -779,787 kN/cm²

US3 = 1673,925 kN/cm²

Bài 22: Một mô hình FTHH 4 cạnh 4 nút như trên hình B21



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm²
Bề dày tấm: 0,5cm
Hệ số Poátxong: 0,3
Không xét trọng lượng bản thân

Hình: B_{21}

Số thứ tự các nút cục bộ và nút tổng thể thống kê trong bảng sau:

Phần tử	Nút cục bộ				Nút tổng thể			
1	1	2	3	4	1	6	5	2
2	1	2	3	4	2	5	4	3

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

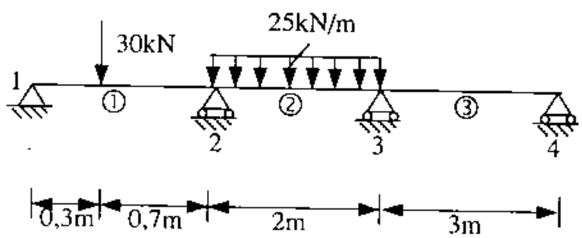
Đáp án:

1- Chuyển vị: $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6) = (-0,452; -4,786; -0,584; 2,313; 3,092; 5,741) \times 10^{-4}$cm

2- Ứng suất (xem bảng dưới)

Phần tử	US1 (kN/cm^2)	US2 (kN/cm^2)	US3 (kN/cm^2)
1	-29,877	-89,972	46,590
2	175,200	316,433	60,396

Bài 23: Cho 1 dầm liên tục như trên hình B_{22}.



Môđun đàn hồi: 21×10^7 kN/m^2

Mômen quán tính: $23 \times 10^{-6} m^4$

Số thứ tự các nút: không khoanh tròn

Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

***Hình:** B_{22}*

Dùng phương pháp phần tử hữu hạn tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

3- Lực cắt

Đáp án:

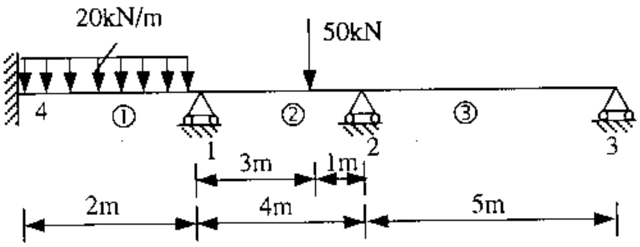
1- Chuyển vị: $[7,26.10^{-5} \quad 3,11.10^{-4} \quad -6,79.10^{-4} \quad 3,39.10^{-4}]'$ radian

2- Mômen (xem kết quả dưới)

3- Lực cắt (xem kết quả dưới)

Thanh	Mômen (kN.m)		Lực cắt (kN)	
1	0	8,6054	14,915	15,085
2	-8,6054	3,2789	27,663	22,337
3	-3,2789	0	1,093	-1,093

Bài 24: Một dầm liên tục như trên hình B_{23}.



Môđun đàn hồi: 21×10^7 kN/cm^2

Mômen quán tính: 25×10^{-6}m^4

Thứ tự nút: không khoanh tròn

Thứ tự các thanh: khoanh tròn

***Hình:** B_{23}*

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

3- Lực cắt

Đáp án:

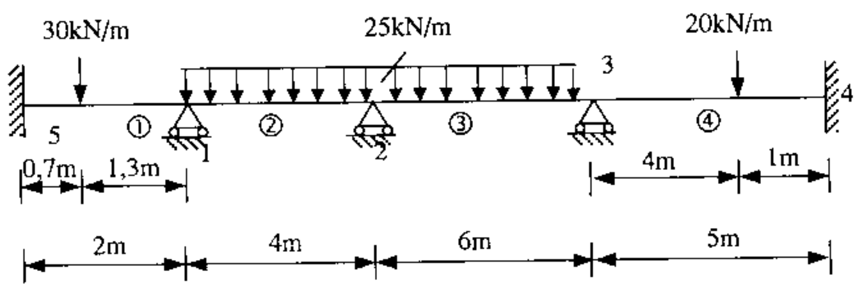
1- Chuyển vị: [$7,701.10^{-4}$ $-3,589.10^{-3}$ $1,794.10^{-3}$]' radian

2- Mômen (xem kết quả dưới)

3- Lực cắt (xem kết quả dưới)

Thanh	Mômen (kN.m)		Lực cắt (kN)	
1	-2,624	14,753	13,935	26,065
2	-14,753	11,305	8,674	41,326
3	-11,305	0	2,261	-2,261

Bài 25: Một dầm liên tục như trên hình B_{24}



Môđun đàn hồi: 21×10^7 kN/cm^2

Mômen quán tính: 30×10^{-6} m^4

Thứ tự nút: không khoanh tròn

Thứ tự các thanh: khoanh tròn

***Hình:** B_{24}*

Dùng phương pháp phần tử hữu hạn tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

2- Lực cắt

Đáp án:

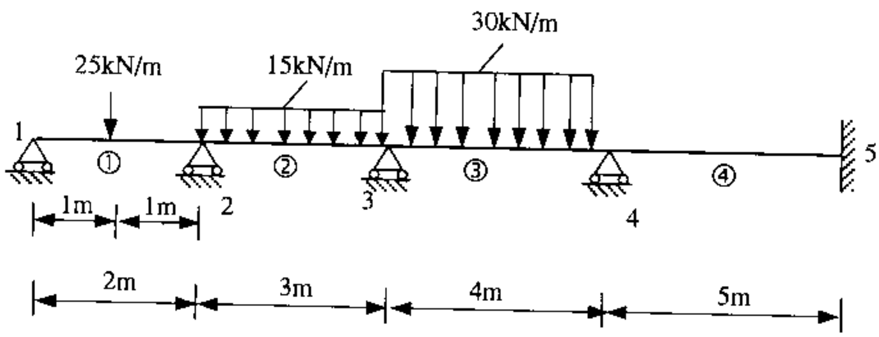
1- Chuyển vị: [5,769.10^{-4} -5,604.10^{-3} -9,044.10^{-3}]' radian

2- Mômen (xem kết quả dưới)

3- Lực cắt (xem kết quả dưới)

Thanh	Mômen (kN. m)		Lực cắt (kN)	
1	-5,238	12,046	18,143	11,857
2	-12,046	70,456	35,398	64,602
3	-70,456	48,783	76,612	71,388
4	-48,783	-9,991	13,835	6,165

Bài 26: Một dầm liên tục như trên hình B_{25}



Môđun đàn hồi: 21 × 10^7 kN/cm^2

Thứ tự nút: không khoanh tròn

Mômen quán tính: 35 × 10^{-6} m^4

Thứ tự các thanh: khoanh tròn

***Hình:** B_{25}*

Dùng phương pháp phần tử hữu hạn tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

3- Lực cắt

Đáp án:

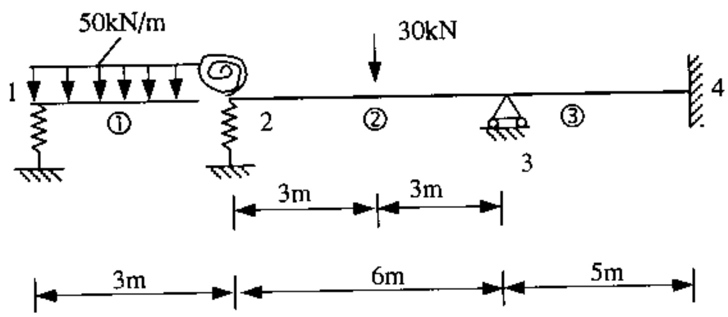
1- Chuyển vị: [0,689 -0,526 2,621 3,704]' rad

2- Mômen (xem kết quả dưới)

3- Lực cắt (xem kết quả dưới)

Thanh	Mômen (kN.m)		Lực cắt (kN)	
1	0	3,569	10,715	14,285
2	-3,569	34,352	12,239	32,761
3	-34,352	22,404	62,987	57,013
4	-22,404	-11,202	6,721	-6,721

Bài 27: Một dầm liên tục trên gối tựa đàn hồi biểu thị trên hình B_{26}



Độ cứng thẳng đứng (nút 1): 10×10^4 kN/m;
Độ cứng xoay (nút 2): 4×10^4 kN-m/rad;
Số thứ tự nút: không khoanh tròn;
Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

***Hình:** B_{26}*

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

3- Lực cắt

Đáp án:

1- Chuyển vị: $[-5{,}814.10^{-4}$m 1,035rad $-4{,}185.10^{-4}$rad $-5{,}137.10^{-4}$ rad $]'$

2- Mômen (xem kết quả dưới)

3- Lực cắt (xem kết quả dưới)

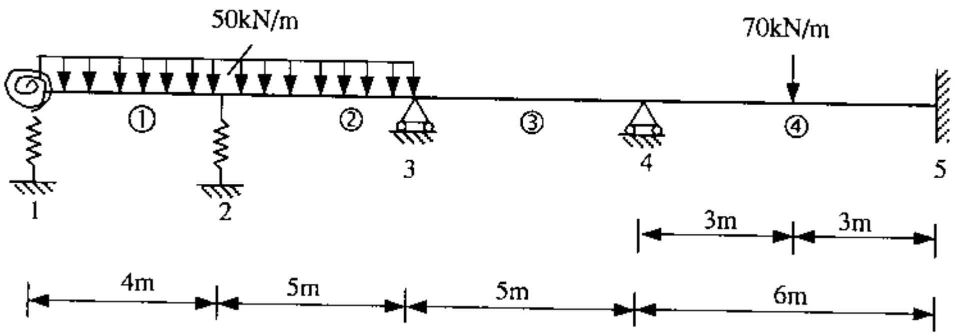
Thanh	Mômen (kN.m)		Lực cắt (kN)	
1	0	50,587	58,138	97,862
2	-33,846	10,355	18,915	11,085
3	-10,355	-5,178	3,107	-3,107

Bài 28: Một dầm liên tục trên gối tựa đàn hồi biểu thị trên hình B_{27}. Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

3- Lực cắt



Môđun đàn hồi: 21×10^7 kN/cm^2;

Độ cứng xoay (nút 1): = 4.10^4 kN-m/rad;

Số thứ tự nút: không khoanh tròn;

Mômen quán tính: 120×10^{-6} m^4;

Độ cứng thẳng (nút 2): 10.10^4kN/m;

Số thứ tự các thanh: khoanh tròn.

***Hình:** B_{27}*

Đáp án:

1- Chuyển vị: [1,072rad -2,470m 1,599rad 1,599rad -3,980rad]

2- Mômen (xem kết quả dưới)

3- Lực cắt (xem kết quả dưới)

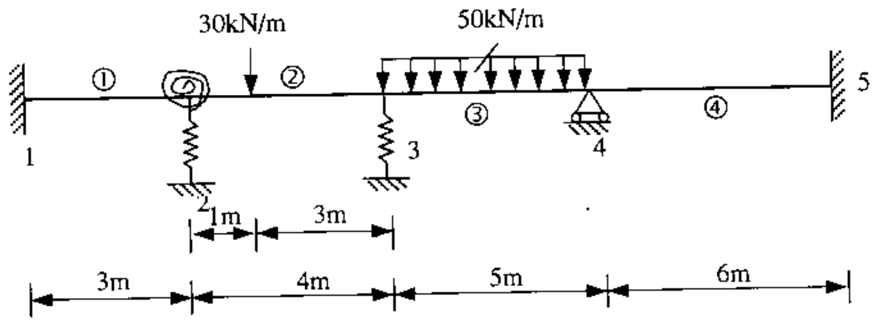
Thanh	Mômen (kN.m)		Lực cắt (kN)	
1	42,860	97,117	86,436	113,564
2	-97,117	54,980	133,427	116,573
3	-54,980	10,340	8,916	-8,916
4	-10,340	73,550	24,475	45,525

Bài 29: Một dầm liên tục trên gối tựa đàn hồi biểu thị trên hình B_{28}. Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

3- Lực cắt



Môđun đàn hồi: 21×10^7 kN/cm^2; Mômen quán tính: 120×10^{-6} m^4;

Độ cứng xoay (nút 2): = 4.10^4 kN-m/rad; Độ cứng thẳng (nút 3): 10.10^4kN/m;

Số thứ tự nút: không khoanh tròn; Số thứ tự các thanh: khoanh tròn.

***Hình:** B_{28}*

Đáp án:

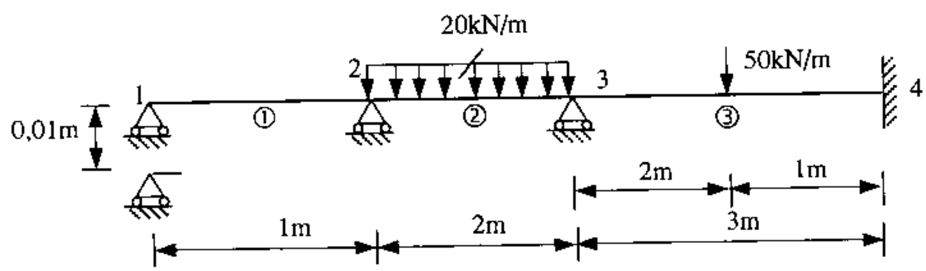
1- Chuyển vị: [-8,965.10^{-5}rad -1,526.10^{-3}m 3,187.10^{-3}rad 0 -3,937.10^{-3} rad]'

2- Mômen (xem kết quả dưới)

3- Lực cắt (xem kết quả dưới)

Thanh	Mômen (kN - m)		Lực cắt (kN)	
1	-1,501	-3,012	1,506	-1,506
2	6,598	70,380	6,068	23,932
3	-70,380	66,144	125,847	124,153
4	-66,144	-33,072	16,536	-16,536

Bài 30: Một dầm liên tục trên gối tựa bị lún như trên hình B_{29}.



Môđun đàn hồi: 21×10^7 kN/cm^2 Mômen quán tính: 23×10^{-6} m^4

Số thứ tự nút: không khoanh tròn; Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

***Hình:** B_{29}*

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

Đáp án:

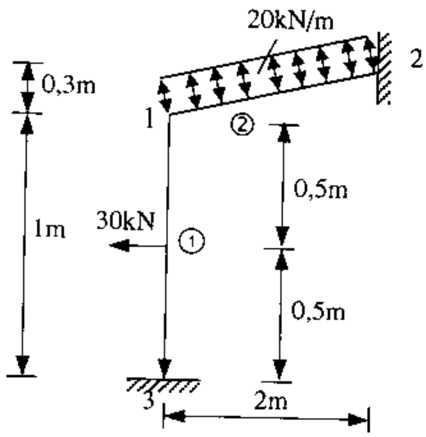
1- Chuyển vị: $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6) = (-0{,}01m;\ 0{,}012rad;\ 0;\ 0{,}006rad;\ 0;\ -0{,}001rad)'$

2- Mômen (xem bảng dưới)

3- Lực cắt (xem bảng dưới)

Phần tử	Mômen (kN.m)	
1	0	-50,795
2	50,795	27,492
3	-27,492	0

Bài 31: Một khung phẳng như trên hình B_{30}.



Diện tích: $8 \times 10^{-3}\ m^2$

Môđun đàn hồi: $21 \times 10^7\ kN/m^2$

Mômen quán tính: $2 \times 10^{-4}\ m^4$

Số thứ tự nút: không khoanh tròn;

Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

***Hình:** B_{30}*

Dùng phương FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

3- Lực cắt

Đáp án:

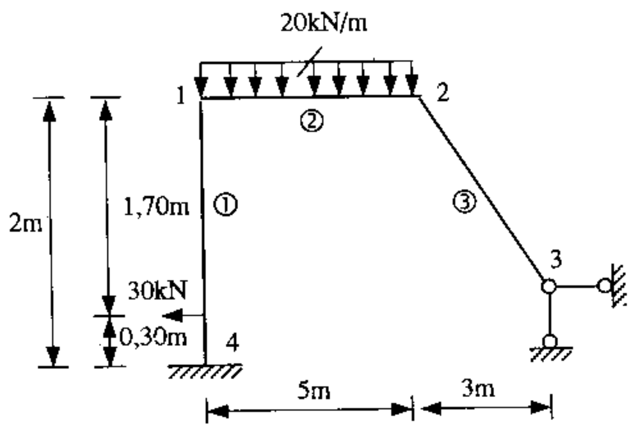
1- Chuyển vị: $(d_1, d_2, d_3) = (-0{,}115m;\ -0{,}997m;\ 3{,}856rad)' \times 10^{-5}$

2- Mômen (xem bảng dưới)

3- Lực cắt (xem bảng dưới)

Phần tử	Mômen (kN. m)		Lực cắt(kN. m)	
1	7,278	3,017	-25,294	-4,706
2	-3,017	9,015	17,258	23,190

Bài 32: Một khung phẳng như trên hình B_{31}.



Diện tích: 7×10^{-3} m^2
Mômen quán tính: 3×10^{-4} m^4
Môđun đàn hồi: 21×10^2 kN/m^2
Số thứ tự nút: không khoanh tròn
Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: B_{31}

Dùng phương FTHH tính:

1- Chuyển vị
2- Mômen
3- Lực cắt

Đáp án:

1- Chuyển vị: $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7)' = (-2{,}023m; -0{,}602m; 1{,}851rad;$
$-3{,}207m; -7{,}396m; -3{,}616rad; -1{,}492rad)' \times 10^{-4}$

2- Mômen (xem bảng sau)

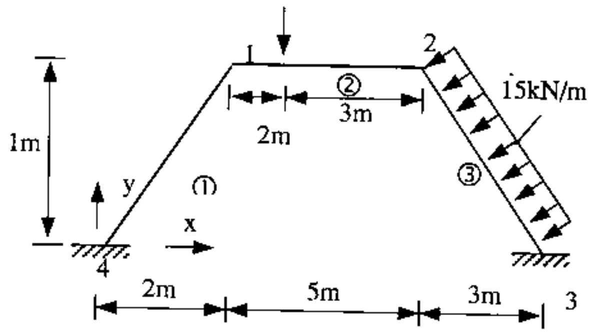
3- Lực cắt (xem bảng sau)

Phần tử	Mômen (kN.m)		Lực cắt (kN)	
1	37,288	41,302	-67,473	37,473
2	-41,302	7,420	44,276	30,724
3	-7,420	0	2,058	-2,058

Bài 33: Một khung phẳng như trên hình B_{32}.

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị
2- Mômen
3- Lực cắt



Diện tích: $8 \times 10^{-3}\ m^2$
Mômen quán tính: $2 \times 10^{-4}\ m^4$
Môđun đàn hồi: $21 \times 10^7\ kN/m^2$
Số thứ tự nút: không khoanh tròn
Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

***Hình:** B_{32}*

Đáp án:

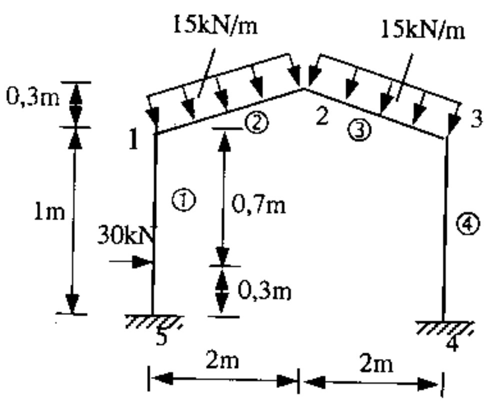
1- Chuyển vị: $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6)' = (-0{,}012m;\ -2{,}154m;\ 4{,}139rad;\ -2{,}122m;\ -10{,}53m;\ -3{,}144\ rad)' \times 10^{-4}$

2- Mômen (xem bảng dưới)

3- Lực cắt (xem bảng dưới)

Phần tử	Mômen (kN.m)		Lực cắt (kN)	
1	5,867	21,415	-12,201	12,201
2	-21,415	2,35	23,253	6,747
3	-2,35	31,003	14,656	32,778

Bài 34: Một khung phẳng như trên hình B_{33}.



Diện tích: $7 \times 10^{-3}\ m^2$
Mômen quán tính: $3 \times 10^{-4}\ m^4$
Môđun đàn hồi: $21 \times 10^7\ kN/m^2$
Số thứ tự nút: không khoanh tròn
Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

***Hình:** B_{33}*

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

3- Lực cắt

Đáp án:

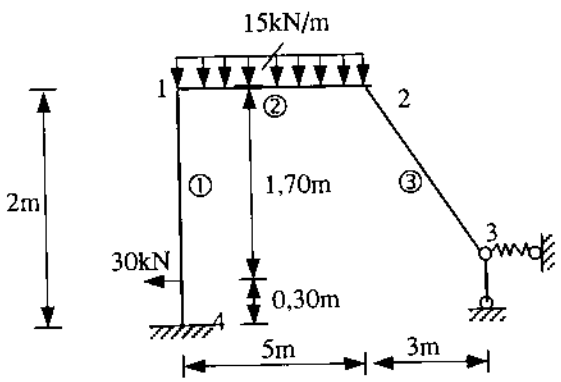
1- Chuyển vị: $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9) = (1{,}416\text{m}; -2{,}027\text{m}; 6{,}947\text{rad}; 0{,}653\text{m}; -21{,}240\text{m}; -0{,}207\text{rad}; -0{,}124\text{m}; -2{,}054\text{m}; -6{,}075\text{rad}) \times 10^{-5}$

2- Mômen (xem bảng dưới)

3- Lực cắt (xem bảng dưới)

Phần tử	Mômen (kN - m)		Lực cắt (kN)	
1	-1,011	14,042	10,490	19,510
2	-14,042	-8,274	26,202	4,134
3	8,274	14,843	3,737	26,598
4	-14,843	-7,188	22,030	-22,030

Bài 35: Một khung phẳng có gối tựa đàn hồi như trên hình B_{34}.



Diện tích: $7 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$

Mômen quán tính: $3 \times 10^{-4}\ \text{m}^4$

Môđun đàn hồi: $21 \times 10^{7}\ \text{kN/m}^2$

Độ cứng lò xo (nút 3): $10 \times 10^{4}\ \text{kN/m}$

Số thứ tự nút: không khoanh tròn

Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: B_{34}

Dùng phương FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

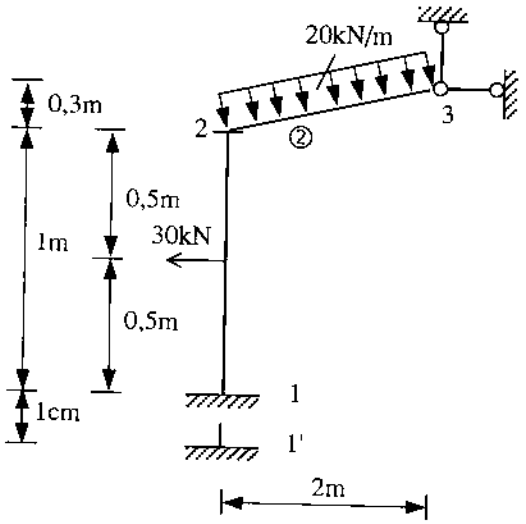
Đáp án:

1) Chuyển vị: $[6{,}945 \times 10^{-4}\text{m} \quad -3{,}446 \times 10^{-6}\text{m} \quad 7{,}138 \times 10^{-4}\text{rad} \quad 6{,}945 \times 10^{-4}\text{m} \quad -1{,}009 \times 10^{-3}\text{m} \quad -5{,}028 \times 10^{-4}\text{rad} \quad 1{,}372 \times 10^{-3}\text{m} \quad -2{,}543 \times 10^{-4}\text{rad}]^T$

2- Mômen (xem kết quả dưới)

Thanh	Mômen (kN - m)	
1	-14,158	23,158
2	-23,158	8,684
3	-8,684	0

Bài 36: Một khung phẳng có gối tựa bị lún như trên hình B_{35}.



Môđun đàn hồi: 21×10^7 kN/cm²
Diện tích: 8×10^{-3} m²
Mômen quán tính: 2×10^{-4} m⁴
Số thứ tự nút: không khoanh tròn;
Số thứ tự các thanh: khoanh tròn
Độ lún tại nút 1: 1cm

***Hình:** B_{35}*

Dùng phương FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

Đáp án:

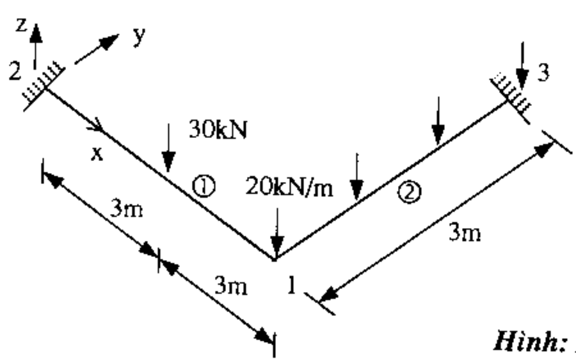
Chuyển vị: $\begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & d_7 & d_8 & d_9 \end{bmatrix}'$

$\begin{bmatrix} 0 & -0{,}01\text{m} & 0 & 0{,}0023\text{m} & -0{,}0004\text{m} & -0{,}008\text{rad} & 0 & 0 & 0{,}003\text{rad} \end{bmatrix}'$

Mômen (xem bảng sau):

Phần tử	Mômen (kN.m)	
1	131,995	57,689
2	-57689	0

Bài 37: Cho một hệ dầm trực giao như trên hình B_{36}:



Diện tích: 0,125m²
Mômen quán tính x: 1821×10^{-6} m⁴
Mômen quán tính y: 26×10^{-4} m⁴
Môđun trượt: $6{,}36 \times 10^6$ kN/m²
Mômen đun đàn hồi: 21×10^7 kN/m².

***Hình:** B_{36}*

Tính: 1- Chuyển vị

2- Mômen uốn và mômen xoắn

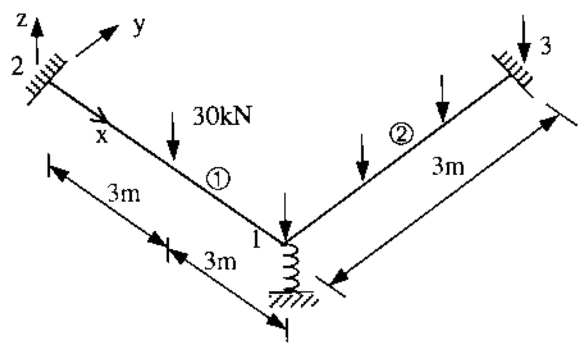
Đáp án:

$(d_1, d_2, d_3) = (-6{,}802\text{m}; 3{,}598\text{rad}; 1{,}271\text{rad}) \times 10^4$

Xem bảng dưới

Phần tử	Mômen (kN.m)		Lực cắt (kN)	
1	-3,006	61,486	0,694	-0,694
2	-276,904	-116,593	-0,413	0,413

Bài 38: Cho một hệ dầm trực giao như trên hình B_{37}



Diện tích: $0{,}135\text{m}^2$
Mômen quán tính x: $1821 \times 10^{-6}\,\text{m}^4$
Mômen quán tính y: $26 \times 10^{-4}\,\text{m}^4$
Môđun trượt: $6{,}36 \times 10^6\,\text{kN/m}^2$
Mômen đun đàn hồi: $21 \times 10^7\,\text{kN/m}^2$
Hệ số độ cứng (gối đàn hồi): 10^5 kN/m

Hình: B_{37}

Tính: 1- Chuyển vị

2- Mômen uốn

3- Mômen xoắn

Đáp án:

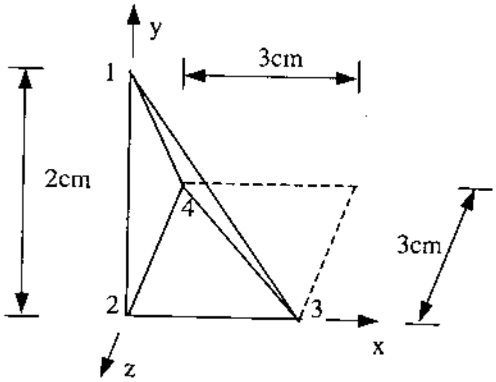
1- Chuyển vị $(d_1, d_2, d_3) = (-4{,}389\text{m}; 4{,}244\text{rad}; -5{,}031\text{rad}) \times 10^{-5}$

2- Mômen uốn (xem bảng dưới)

3- Mômen xoắn (xem bảng dưới)

Phần tử	Mômen (kN.m)		Lực cắt (kN)	
1	-31,656	4,188	0,082	-0,082
2	-45,893	-44,662	0,194	-0,194

Bài 39: Một phần tử hữu hạn tứ diện 1234 như trên hình B_{38}



Hình: B_{38}

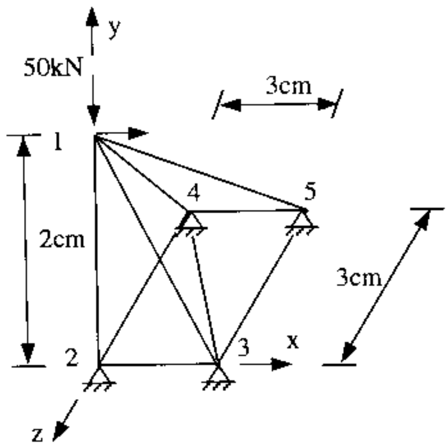
Lập ma trận độ cứng tổng thể S.

Đáp án:

Ma trận S có tính đối xứng

S(1,1) = 646,15	S(1,2) = 0	S(1,3) = 0	S(1,4) = -538,46
S(1,5) = -215,38	S(1,6) = 215,38	S(1,7) = 0	S(1,8) = -215,38
S(1,9) = 107,69	S(1,10) = 0	S(1,11) = 0	S(1,12) = 215,38
S(2,2) = 1453,85	S(2,3) = -807,69	S(2,4) = -323,08	S(2,5) = -1346,15
S(2,6) = 323,077	S(2,7) = 323,07	S(2,8) = 0	S(2,9) = 0
S(2,10) = -107,69	S(2,11) = 161,54	S(2,12) = 0	S(3,3) = 1543,846
S(3,4) = 323,28	S(3,5) = 700	S(3,6) = -753,85	S(3,7) = -323,08
S(3,9) = 0	S(3,10) = 107,69	S(3,11) = -376,92	S(3,12) = 0
S(4,4) = 969,23	S(4,5) = 538,46	S(4,6) = 358,97	S(4,7) = -502,56
S(4,8) = 143,59	S(4,9) = 71,79	S(4,10) = 0	S(4,11) = -107,69
S(4,12) = -215,38	S(5,5) = 1417,95	S(5,6) = -323,08	S(5,7) = -323,08
S(5,8) = 0	S(5,9) = 0	S(5,10) = 71,79	S(5,11) = 161,54
S(5,12) = -143,59	S(6,6) = 646,154	S(6,7) = 215,38	S(6,8) = 143,59
S(6,9) = -71,79	S(6,10) = 0	S(6,11) = 0	S(6,12) = 0
S(7,7) = 502,56	S(7,8) = 0	S(7,9) = 0	S(7,10) = 0
S(7,11) = 107,69	S(8,8) = 143,59	S(8,9) = 71,79	S(8,10) = 0
S(8,11) = 0	S(8,12) = 0	S(9,9) = 35,90	S(9,10) = 0
S(9,11) = 0	S(9,12) = 0	S(10,10) = 35,90	S(10,11) = 0
S(10,12) = 0	S(11,11) = 125,64	S(11,12) = 0	S(12,12) = 143,59

Bài 40: Một hình FTHH tứ diện 12345 như trên hình B_{39}.



Phần tử	Số TT nút tổng thể			
1	1	2	3	4
2	1	3	5	4

Hệ số Poátxong: 0,3

***Hình:** B_{39}*

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

Đáp án:

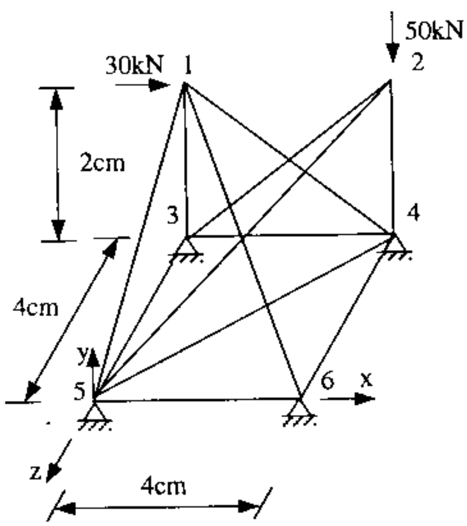
1- Chuyển vị: [2,321 -2,487 -1,382] x 10^{-2}cm

2- Ứng suất

Phần tử 1: [-10,714 -42,857 7,143 7,143 -15 15] kN/cm^2

Phần tử 2: [-10,714 -42,857 7,143 7,143 -15 15] kN/cm^2

Bài 41: Một hình FTHH tứ diện gồm 3 phần tử như trên hình B_{40}.



Phần tử	Số TT nút tổng thể			
1	1	5	4	3
2	1	6	4	5
3	2	3	5	4

Hệ số Poátxong: 0,3

***Hình:** B_{40}*

Tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

Đáp án:

1- Chuyển vị: $[4{,}536 \times 10^{-8} \quad 1{,}451 \times 10^{-10} \quad -1{,}152 \times 10^{-15} \quad 0 \quad -2{,}264 \times 10^{-7} \quad 0\,]'$cm

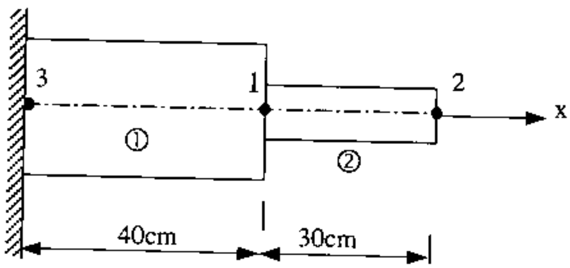
2) Ứng suất

Phần tử 1: $[-6{,}40 \times 10^{-2} \quad 6{,}40 \times 10^{-2} \quad -6{,}40 \times 10^{-2} \quad -5{,}08 \times 10^{-7} \quad 0 \quad 20]'$ kN/cm²

Phần tử 2: $[-6{,}40 \times 10^{-2} \quad 6{,}40 \times 10^{-2} \quad -6{,}40 \times 10^{-2} \quad -5{,}08 \quad 0 \quad 20]'$ kN/cm²

Phần tử 3: $[99{,}31 \quad 6{,}40 \times 10^{-2} \quad 99{,}81 \quad 0 \quad 0 \quad 0]'$ kN/cm²

Bài 42: Tính giá trị riêng lớn nhất và véctơ riêng tương ứng cho hệ một chiều trên hình B_{41}.



Diện tích thanh 1: 4cm²
Diện tích thanh 2: 2,5cm²
Môđun đàn hồi: 21000kN/cm²
Khối lượng riêng: 785×10^{-5} kg/cm³

Hình: B_{41}

Đáp án:

Giá trị riêng lớn nhất: 17719,24

Véctơ riêng tương ứng: [1 -0,4951]'

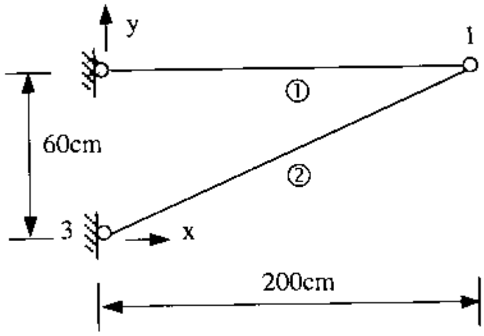
Bài 43: Đầu đề trên hình B_{41}. Tính giá trị riêng bé nhất và vectơ riêng tương ứng.

Đáp án:

Giá trị riêng bé nhất: 1864,12

Vectơ riêng tương ứng: [1 0,7158]'

Bài 44: Tính giá trị riêng lớn nhất và véctơ riêng tương ứng cho hệ giàn trên hình B_{42}.



Diện tích toàn bộ các thanh: $4cm^2$
Môđun đàn hồi: $7200\ kN/cm^2$
Khối lượng riêng: $28 \times 10^{-4}\ kg/cm^3$

Hình: B_{42}

Đáp án: Giá trị riêng lớn nhất: 48,214

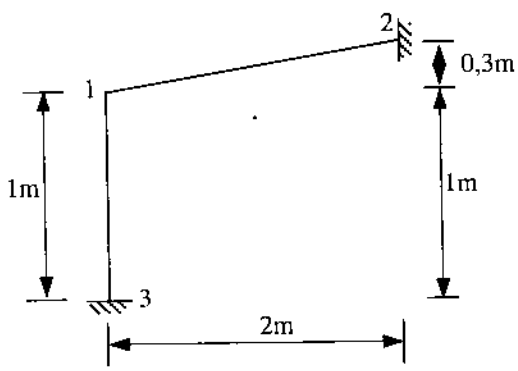
Véctơ riêng tương ứng: [1,0   0,002]'

Bài 44: Đầu đề như trên hình B_{42}. Tìm giá trị riêng bé nhất và véctơ riêng tương ứng.

Đáp án: Giá trị riêng bé nhất: 48,214

Véctơ riêng tương ứng: [1,0   493,829]'

Bài 45: Tìm giá trị riêng lớn nhất cho hệ khung trên hình B_{43}.



Diện tích toàn bộ các thanh: $8 \times 10^{-3}\ m^2$
Mômen quán tính toàn bộ các thanh: $2 \times 10^{-4}\ m^4$
Môđun đàn hồi: $21 \times 10^7\ kN/m^2$
Khối lượng riêng: $7850\ kg/m^3$

Hình: B_{43}

Đáp án: Giá trị riêng lớn nhất: 3382040,28

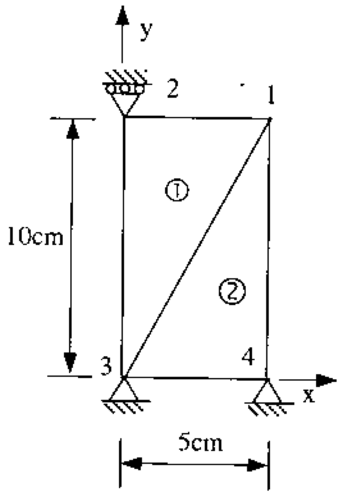
Véctơ riêng tương ứng: [1,0   0,058   -0,098]'

Bài 46: Đầu đề như trên hình B_{43}. Tính giá trị riêng bé nhất và véctơ riêng tương ứng.

Đáp án: Giá trị riêng bé nhất: 560537,56

Véctơ riêng tương ứng: [1,0   0,369   3,289]'

Bài 47: Tìm giá trị riêng lớn nhất và véctơ riêng tương ứng cho hệ có mô hình FTHH tam giác biến dạng không đổi biểu thị trên hình B_{44}.



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm²
Bề dày tấm: 1cm
Hệ số Poátxong: 0,3
Số thứ tự các nút: không khoanh tròn
Số thứ tự phần tử: khoanh tròn
Khối lượng riêng: 785×10^{-5} kg/cm³

Hình: B_{44}

Đáp án: Giá trị riêng lớn nhất: 780694,49

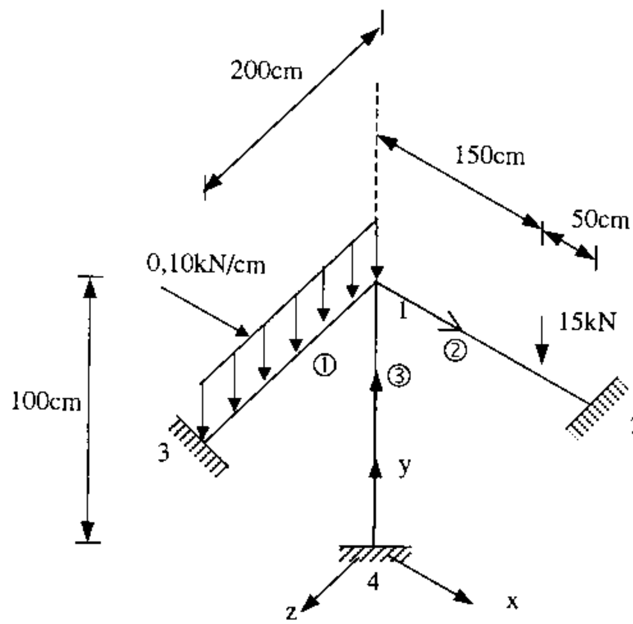
Véctơ riêng tương ứng: [1,0 -5,931 -5,466]'

Bài 48: Đầu đề như trên hình B_{44}. Tính giá trị riêng bé nhất và véctơ riêng tương ứng.

Đáp án: Giá trị riêng bé nhất: 0,113

Véctơ riêng tương ứng: [1,0 -0,281 0,965]'

Bài 49: Một khung không gian như trên hình B_{45}.



Hình: B_{45}

Diện tích:

Thanh 1: $20cm^2$

Thanh 2: $20cm^2$

Thanh 3: $30cm^2$

Môđun đàn hồi : $21000kN/cm^2$

Môđun xoắn: $8077cm^2$

Mômen quán tính x:

Thanh 1: $4cm^4$

Thanh 2: $4cm^4$

Thanh 3: $10cm^4$

Môđun quán tính y:

Thanh 1: $53cm^4$

Thanh 2: $53cm^4$

Thanh 3: $150cm^4$

Môđun quán tính z

Thanh 1: $720cm^4$

Thanh 2: $720cm^4$

Thanh 3: $2230cm^4$

Dùng chương trình CTR18 tính các nội lực:

- Q_y, M_x, M_z cho các thanh 1, 2
- N, M_y, M_z, M_z cho thanh 3

Đáp án:

Nội lực \ Phần tử	1	2
Q_{y1} (kN)	-5,067	-5,067
M_{x1} (kN.cm)	0	0
M_{z1} (kN.cm)	-4,465	-4,465
Q_{y2} (kN)	-10,398	-0,398
M_{x2} (kN.cm)	0	0
M_{y2} (kN.cm)	359,879	26,545

Nội lực \ Phần tử	3
N_1 (kN)	0
M_{y1} (kN.cm)	18900
M_{z1} (kN.cm)	164,434
N_2 (kN)	0
M_{y2} (kN.cm)	18900
M_{z2} (kN.cm)	-4,465

Bài 50: Tìm giá trị riêng liên tiếp và các véctơ riêng tương ứng của ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Đáp án:

Giá trị riêng lớn nhất:	38,802
Véctơ riêng tương ứng:	[1 0,648 2,955]'
Giáp trị trung gian :	6,429
Véctơ riêng tương ứng:	[1 -18,310 -12,430]
Giá trị riêng bé nhất:	-2,150
Véctơ riêng tương ứng:	[1 -1,011 1,558]